EOMETRÍA ANALÍTICA

REY PASTOR, L. A. SANTALÓ Y M. BALANZAT

EDITORIAL
PELUSZ

La Geometría Analítica fue creada por Descartes para ser un "método" que permitiera resolver problemas geométricos. Pero pronto se vio que, además, era un instrumento indispensable para penetrar en la esencia de dichos problemas e interpretar los conceptos del análisis.

Como método, la Geometría Analítica permite hallar y estudiar los lugares geométricos de manera sistemática y general. Como instrumento de análisis, dio la clasificación de las curvas en algebraicas y trascendentes, permitió demostrar la imposibilidad de solución de ciertos problemas clásicos (duplicación del cubo, trisección del ángulo . . .) y abrió las puertas al estudio general de las transformaciones geométricas. Ambos efectos han sido de tanto interés para la matemática pura como para las aplicaciones: la Geometría Analítica ha penetrado tan profundamente en cualquiera de las ramas de aquélla, que se ha hecho consubstancial; el ser sostén del cálculo infinitesimal, es base de todo estudio cuantitativo de la técnica.

En la Geometría Analítica que presentamos resaltan bien ambas finalidades.

Se ha dado máxima importancia a la geometría "métrica". Creemos que la Geometría Proyectiva tiene sus métodos sintéticos propios, instructivos y elegantes: los más ventajosos. Por esto limitamos el estudio analítico de las propiedades proyectivas al mínimo que permita ver cómo la Geometría Analítica sirve también para ello.

Geometria analitica

★

Geometría analítica

Julio Rey Pastor

Ex Director del Instituto de Matemática de la Universidad de Buenos Aires

Luis A. Santaló

Profesor de la Universidad de Buenos Aires

Manuel Balanzat

Catedrático de la Universidad de Cuyo (Facultad de Ciencias de la Educación)

EDITORIAL KAPELUSZ • BUENOS AIRES
MORENO 372

Todos los derechos reservados por (© 1955)
EDITORIAL KAPELUSZ, S. A. — Buenos Aires.
Hecho el depósito que establece la ley 11.723.
Impreso en la Argentina (Printed in Argentine).

Publicado en abril de 1955.

Cuarta edición, setiembre de 1959.

LIBRO DE EDICIÓN ARGENTINA

INDICE GENERAL

PÁG.

Presentación XIII
Plan de la obra XIV

CAPÍTULO I

ESPACIOS UNIDIMENSIONALES. SERIES Y HACES

§ 1. **Geometría métrica de la serie rectilínea** 1
1. La geometría métrica. 2. Medida absoluta de un segmento. 3. Fundamentos de la geometría analítica. 4. Transformación de abscisas.

§ 2. **Haces de rectas** 6
1. Haces de rectas: medidas angulares. 2. Abscisas en el haz. 3. Haces de rayos o de rectas orientadas.

§ 3. **Razones simples y cuaternas armónicas** 9
1. Abscisas homogéneas y punto impropio. 2. Razón simple de tres puntos. 3. Las razones simples como abscisas. 4. Cuaternas armónicas. 5. Propiedades de las cuaternas armónicas. 6. Construcción geométrica de expresiones algebraicas.

§ 4. **Complementos sobre la Geometría de la recta** ... 18
1. Vectores sobre un eje y traslaciones. 2. Adición y sustracción de vectores. 3. Escala de abscisas sobre la recta. 4. Fundamento y esencia de la Geometría Analítica.

§ 5. **Notas y complementos al Capítulo I** 22
1. Precursores de la Geometría Analítica. 2. Creadores de la Geometría Analítica. 3. Los espacios fundamentales. 4. Geometría Métrica y Geometría Analítica.

CAPÍTULO II

GEOMETRÍA DEL PLANO. PUNTOS, RECTAS Y VECTORES

§ 6. **Coordenadas cartesianas y ecuaciones algebraicas** 25
1. Sistema de coordenadas cartesianas. 2. Ecuaciones y lugares geometricos. 3. Ecuaciones reducibles e irreducibles. 4. Inecuaciones y lugares bidimensionales.

PÁG.

§ 7. **Vectores en el plano y cambio de coordenadas cartesianas** 31

1. Vectores en el plano. 2. Sumas generales de vectores y sus proyecciones. 3. Cambio de ejes coordenados. 4. Baricentros de masas.

§ 8. **Problemas lineales en el plano** 37

1. Diversos tipos de ecuación de la recta. 2. Paralelismo y coincidencia de rectas. 3. Puntos alineados. 4. Intersección de rectas. Haces. 5. Ecuación simbólica del haz. 6. Coordenadas homogéneas.

§ 9. **Coordenadas ortogonales y polares** 44

1. Sistemas ortogonales o rectangulares. 2. Funciones circulares. 3. Relaciones fundamentales entre las funciones circulares. 4. Funciones circulares de ángulos notables. 5. Funciones circulares inversas. 6. Coordenadas polares. 7. Cambio a coordenadas cartesianas y viceversa. 8. Rotación de ejes rectangulares y rotación del plano. 9. Fórmulas goniométricas de adición y sustracción. 10. Fórmulas de los senos y del coseno. 11. Notas y complementos.

§ 10. **Problemas métricos. Distancias, ángulos, áreas** . 55

1. Distancia entre dos puntos. 2. Pendientes y ángulos de rectas. 3. Ecuacion normal de la recta. 4. Distancia de punto a recta y distancia entre paralelas. 5. Bisectrices de un ángulo. 6. Área del triángulo. 7. Área del polígono. 8. Método de los trapecios y método de los ángulos.

§ 11. **Complementos al Capítulo II** 64

CAPÍTULO III

CIRCUNFERENCIA Y FAMILIAS DE CIRCUNFERENCIAS

§ 12. **Circunferencia y círculo** 67

1. Definición y ecuación de la circunferencia. 2. Intersección de una recta con una circunferencia. 3. Ecuación de la tangente a la circunferencia en un punto. 4. Intersección de dos circunferencias. 5. Tangentes desde un punto a la circunferencia. 6. Determinación de las tangentes paralelas a una recta. 7. Determinación de circunferencias. 8. Ecuaciones paramétricas de la circunferencia. 9. Ecuación de la circunferencia en coordenadas polares.

§ 13. **Ejes radicales. Haces de circunferencias** 77

1. Potencia de un punto respecto a una circunferencia. 2. Ejes y centros radicales. 3. Haces lineales de circunferencias. 4. Clasificación de los haces lineales. 5. Circunferencias ortogonales. Haces ortogonales. 6. Circunferencia ortogonal a tres circunferencias.

PÁG.

§ 14. **Elementos imaginarios** 85

1. Introducción de los elementos imaginarios en geometría analítica. 2. Los elementos imaginarios en el estudio de la circunferencia. 3. Rectas isótropas y puntos cíclicos.

CAPÍTULO IV

LAS CÓNICAS

§ 15. **La elipse** 91

1. Preliminar. Cónicas reducibles. 2. Elipse, hipérbola y parábola. 3. Elipse. Tangente en un punto. 4. Intersección de una recta con una elipse. 5. Diámetros en la elipse. 6. Diámetros conjugados. 7. Ecuación de la elipse respecto de dos diámetros conjugados cualesquiera.

§ 16. **La hipérbola y la parábola** 99

1. Hipérbola. Tangentes. 2. Asíntotas. 3. Intersección de una hipérbola con una recta. 4. Diámetros de la hipérbola. 5. La hipérbola referida a dos diámetros conjugados. 6. Hipérbolas conjugadas. 7. La hipérbola referida a sus asíntotas. 8. La parábola. Tangentes. 9. Intersección de la parábola con una recta. 10. Diámetros en la parábola.

§ 17. **Propiedades métricas de la elipse** 111

1. La elipse en coordenadas ortogonales. 2. Focos de la elipse. 3. Vértices de la elipse. 4. Ecuaciones paramétricas de la elipse. 5. Proyecciones ortogonales de la elipse. 6. Propiedades métricas de los diámetros. 7. Normales a la elipse.

§ 18. **Propiedades métricas de la hipérbola y de la parábola** 123

1. Hipérbola en coordenadas ortogonales. 2. Focos y vértices. 3. Ecuaciones paramétricas de la hipérbola. 4. Propiedades métricas de los diámetros y asíntotas. 5. Normales a la hipérbola. 6. La parábola en coordenadas ortogonales. 7. Propiedades métricas en la parábola. 8. Normales a la parábola. 9. Forma trinomia común a las ecuaciones de las tres cónicas.

§ 19. **Focos y directrices de las cónicas** 132

1. Definición común a las tres cónicas. 2. Ecuación focal de las cónicas. 3. Determinación de los focos y directrices de las cónicas. 4. Ecuaciones de las cónicas en coordenadas polares. 5. Cónicas homofocales con centro. 6. Parábolas homofocales.

§ 20. **Cónicas en general** 148

1. Curvas representables por una ecuación de segundo grado con dos variables. 2. Estudio de las cónicas por el método de formación de cuadrados. 3. Clasificación

PÁG.

de las cónicas. 4. Aplicación práctica del método de formación de cuadrados. 5. Centro de las cónicas. 6. Diámetros en las cónicas. 7. Ejes de las cónicas.

§ 21. **Polaridad en las cónicas** 160

1. Polar de un punto con respecto a una cónica. 2. Polo de una recta con respecto a una cónica. 3. Propiedades de los polos y polares. 4. Construcción de la polar de un punto.

§ 22. **Determinación y construcción de cónicas** 169

1. Condiciones que determinan una cónica. 2. Determinación de cónicas en casos concretos. 3. Intersección de cónicas. 4. Cónica que pasa por cinco puntos. 5. Construcción de cónicas. Ejercicios sobre cónicas.

CAPÍTULO V

CURVAS PLANAS

§ 23. **Curvas notables de tercero y cuarto grado** 187

1. Definición de curva algebraica. 2. La parábola cúbica $y = ax^3$. 3. La parábola cúbica completa $y = ax^3 + bx^2 = cx - d$. 4. La parábola semicúbica $y^2 = ax^3$. 5. La parábola cuártica $y = ax^4$. 6. Cuárticas polizomales. 7. Cuárticas bicirculares. Curvas de Cassini. Lemniscata.

§ 24. **Curvas planas en general** 195

1. Curvas en forma explícita. 2. Curvas en forma implícita. 3. Curvas en forma paramétrica. 4. Estudio de las curvas. 5. Ramas infinitas. Asíntotas. 6. Curvas en coordenadas polares.

§ 25. **Lugares geométricos. Curvas clásicas** 207

1. Lugares geométricos. 2. Podarias. 3. Podaria de la parábola respecto del vértice. Cisoide. 4. Podarias de la elipse y de la hipérbola respecto del centro. 5. Concoides. 6. Cicloide. 7. Epicicloide e hipocicloide. 8. Espirales. 9. Otras curvas clásicas.

§ 26. **Curvas algebraicas** 223

1. Primeras observaciones. 2. Curvas reducibles e irreducibles. 3. Intersección de una curva algebraica con una recta. 4. Número de puntos que determinan una curva algebraica. 5. Intersección de curvas algebraicas: Teorema de Bezout. 6. Tangente a una curva algebraica. 7. Puntos del infinito de una curva algebraica. 8. Asíntotas de una curva algebraica.

§ 27. **Puntos singulares de una curva algebraica** 237

1. Puntos múltiples. 2. Propiedades de los puntos multiples. 3. Determinación de los puntos múltiples. 4. Puntos múltiples en el infinito. 5. Puntos dobles: sus clases. 6. Estudio general de un punto doble.

PÁG.

§ 28. **Construcciones geométricas** 250

1. Construcciones con regla y compás. 2. Cuerpos o campos de racionalidad. 3. Expresión analítica de las construcciones con regla y compás. 4. Irracionales cuadráticos conjugados. 5. Ecuación cuya raíz es un irracional cuadrático. 6. Problemas de tercer grado. 7. El problema de inscripción de polígonos regulares en el círculo. 8. Irreducibilidad de la ecuación ciclotómica. 9. Condiciones de construcción con regla y compás de los polígonos regulares. 10. El polígono de diecisiete lados. 11. La cuadratura del círculo. 12. Construcciones mediante el trazado de curvas no construíbles con regla y compás. Notas y comentarios.

CAPÍTULO VI

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

§ 29. **Transformaciones en general. Congruencias** 275

1. Transformaciones en general. 2. Grupos de transformaciones. 3. Traslaciones. 4. Rotaciones. 5. Condiciones para que una transformación lineal sea una rotación. 6. Productos de rotaciones y traslaciones. 7. Simetría respecto de un punto. 8. Simetría respecto de un eje. 9. Producto de simetrías. 10. Producto de una simetría por una traslación paralela al eje. 11. Congruencias.

§ 30. **Transformaciones lineales. Afinidad** 289

1. Homotecias. 2. Producto de homotecias. 3. Circunferencias homotéticas. 4. Semejanzas. 5. Afinidades. 6. Clasificación de las afinidades. 7. Colineaciones.

§ 31. **Transformaciones lineales en espacios unidimensionales** 298

1. Proyectividad entre espacios unidimensionales. 2. Razón doble de cuatro elementos: propiedad fundamental de las transformaciones proyectivas. 3. Ecuación de la proyectividad. 4. Elementos unidos de una proyectividad. 5. Puntos límites de una proyectividad entre puntos de dos rectas. 6. Involución. 7. Número de elementos que determinan una involución. 8. Elementos unidos de una involución. 9. Propiedades métricas de la involución. 10. Construcción geométrica. 11. La involución circular.

§ 32. **Transformaciones cuadráticas: la inversión** 309

1. La inversión. 2. Aplicaciones de la inversión. 3. Transformaciones birracionales. 4. Transformaciones cuadráticas. Notas y comentarios.

CAPÍTULO VII

RECTAS Y PLANOS

PÁG.

§ 33. **Coordenadas y ecuaciones** 323

1. Sistemas coordenados. 2. Triedros simples. 3. Coordenadas cartesianas. 4. Ecuaciones con una variable. 5. Ecuaciones con dos variables. 6. Sistema de dos ecuaciones. 7. El plano impropio. Coordenadas homogéneas.

§ 34. **La recta. Propiedades proyectivas y afines** 328

1. Ecuaciones de la recta. 2. Caso singular. 3. Planos proyectantes. Ecuaciones reducidas de la recta. 4. Coeficientes directores. Paralelismo de rectas. 5. Razones simples. 6. Resultante de masas. Baricentros.

§ 35. **El plano. Propiedades proyectivas y afines** 334

1. Ecuación general del plano. 2. Plano determinado por tres puntos. 3. Ecuación segmentaria del plano. 4. Paralelismo entre planos. 5. Paralelismo entre rectas y planos. 6. Haces de planos. La recta como intersección de dos planos.

§ 36. **Propiedades métricas en coordenadas ortogonales** 340

1. Distancia entre dos puntos. 2. Cosenos directores de una semirrecta. 3. Ángulo de dos rectas. 4. Ángulo de dos planos; paralelismo y perpendicularidad. 5. Cuadro sinóptico de las relaciones entre rectas y planos. 6. Ecuación normal y distancia de un punto a un plano. 7. Distancia entre dos rectas. 8. Área de un triángulo.

§ 37. **Cambios de coordenadas** 347

1. Caso general. 2. Caso de sistemas ortogonales. 3. Distancia de un punto al origen en coordenadas oblicuas. 4. Coordenadas cilíndricas. 5. Coordenadas esféricas. 6. Grupo de fórmulas de Bessel. 7. Resolución de triángulos rectángulos. 8. Transformación de las fórmulas del coseno. 9. Analogías de Delambre y Neper. 10. Resolución de triángulos oblicuángulos.

CAPÍTULO VIII

SUPERFICIES DE SEGUNDO ORDEN

§ 38. **Superficie esférica** 355

1. Definición y ecuación de la superficie esférica. 2. Intersección de una recta con una superficie esférica. Rectas y tangentes. 3. Intersección de un plano con una superficie esférica. 4. Determinación de superficies esféricas. 5. Potencia de un punto. Elementos radicales. 6. Superficies esféricas ortogonales. 7. Elementos imaginarios en geometría del espacio. 8. Círculo del infi-

PÁG.

nito. 9. Proyección estereográfica. 10. Estudio analítico de la proyección estereográfica.

§ 39. **Elipsoides** 371

1. Ecuaciones reducidas de las cuádricas. 2. Elipsoide: definición y forma. 3. Intersección del elipsoide con una recta. Planos diametrales. 4. Diámetros. Diámetros conjugados. 5. Ecuación del elipsoide referida a una terna de diámetros conjugados. 6. Planos tangentes al elipsoide. 7. Propiedades métricas del elipsoide.

§ 40. **Hiperboloides y conos cuadráticos** 384

1. Hiperboloides: definición y forma. Cono asociado. 2. Direcciones asintóticas y cono asintótico. 3. Planos diametrales y diámetros. 4. Ternas de diámetros conjugados. 5. Planos tangentes. 6. Propiedades métricas de los hiperboloides.

§ 41. **Paraboloides** 400

1. Paraboloide elíptico: definición y forma. 2. Intersección con una recta. Planos diametrales y diámetros. 3. Plano tangente. 4. Paraboloide elíptico referido a dos planos diametrales conjugados y al plano tangente en el extremo de su diámetro común. 5. Propiedades métricas del paraboloide elíptico. 6. Paraboloide hiperbólico. Definición y forma. 7. Intersección con una recta, direcciones asintóticas, planos directores y planos asintóticos. 8. Planos diametrales, diámetros y planos tangentes. 9. Propiedades métricas del paraboloide hiperbólico.

§ 42. **Cuádricas en general** 415

1. Estudio de las cuádricas por el método de formación de cuadrados. 2. Aplicación práctica del método de formación de cuadrados. 3. Centro de las cuádricas. 4. Planos diametrales en las cuádricas. 5. Planos y direcciones principales. Ecuación en S. 6. Generatrices rectilíneas de las cuádricas. 7. Secciones circulares. 8. Determinación de cuádricas. 9. Cuádricas homofocales.

CAPÍTULO IX

SUPERFICIES Y CURVAS EN GENERAL

§ 43. **Definiciones y propiedades generales** 443

1. Ecuaciones de una superficie. 2. Ecuaciones de una curva en el espacio. 3. Recta tangente a una curva y plano tangente a una superficie. 4. La hélice circular. 5. Superficies algebraicas. 6. Curvas algebraicas.

§ 44. **Superficies cilíndricas y cónicas** 453

1. Superficies cilíndricas. 2. Cilindro circunscrito a una superficie. 3. Superficies cónicas. 4. Cono circunscrito a una superficie. 5. Superficies desarrollables.

PÁG.

§ 45. **Superficies de revolución. Helicoides. Otras superficies especiales** 460

1. Superficies de revolución. 2. El toro. 3. Helicoide de plano o cono director. 4. Lugar geométrico de las rectas que se apoyan en tres no coplanares. 5. Otras superficies regladas. 6. Las 27 rectas de una superficie cúbica.

CAPÍTULO X

GEOMETRÍA REGLADA. GEOMETRÍA DE CÍRCULOS

§ 46. **Geometría reglada** 469

1. Coordenadas de recta. 2. Coordenadas plückerianas de recta. 3. Condición para que dos rectas se corten. 4. Complejos de rectas. 5. Complejos lineales. 6. Congruencias lineales. 7. Interpretación cinemática.

§ 47. **Geometría de círculos** 481

1. Representación de Möbius de los círculos del plano. 2. Coordenadas tetracíclicas. 3. Fórmulas útiles en la representación de Möbius. 4. Identidad de Darboux-Frobenius. 5. Coordenadas tetracíclicas normalizadas. Combinaciones lineales de círculos. 6. El problema de Apolonio: círculo tangente a otros tres. 7. Nota bibliográfica.

CAPÍTULO XI

NOMOGRAFÍA

§ 48. **Nomogramas de líneas concurrentes** 495

1. Generalidades. 2. Escalas y módulos. 3. Funciones con dos variables. Ábacos de escalas superpuestas. 4. Funciones con tres variables. Ábacos cartesianos. 5. Ábacos lineales. 6. Ábacos circulares. 7. Ábacos polares y exagonales.

§ 49. **Nomogramas de puntos alineados** 505

1. Conceptos generales. 2. Nomogramas con dos escalas paralelas. 3. Nomogramas con tres escalas concurrentes. 4. Nomogramas con escalas curvilíneas. 5. Funciones con más de tres variables.

§ 50. **Otros tipos de nomogramas** 521

1. Nomogramas de tipo especial. 2. Bibliografía.

Índice alfabético de materias 529

PRESENTACIóN

Aunque el plan de colaboración propuesto por la Editorial Kapelusz fué análogo al que condujo a la obra de Análisis Matemático a punto de conclusión, no disponían mis colaboradores de más base aprovechable entre mis anteriores publicaciones que de un viejo curso autografiado de Geometría analítica y de algún capítulo del Curso cíclico; habiendo tenido por tanto que redactar y elaborar como nueva la mayor parte del libro, agregándole por nuestra parte un par de capítulos.

Lejos de la pretensión enciclopédica con que fué trazado el Análisis Matemático hemos puesto el acento en la utilidad didáctica, sacrificando capítulos interesantes como la Geometría vectorial, que ya tienen cabida en el volumen II de aquella obra, para desarrollar en cambio minuciosamente la parte más clásica de la Geometría analítica, ahorrando toda dificultad al lector autodidacto y cuidando mucho por su trascendencia metodológica, la separación entre la Geometría afine desarrollada en coordenadas oblicuas, y la Geometría métrica referida a ejes ortogonales.

Los encariñados con la Geometría proyectiva por haberse acostumbrado a la lectura de libros italianos, habrían deseado más amplio desarrollo de esta bella disciplina que ya dispone de excelentes tratados y que interesa al ingeniero muchísimo menos que la Teoría de las transformaciones, ampliamente expuestas en Cap. VI, y que la Nomografía cuya redacción debemos al Ing. José Babini, especializado en la Matemática práctica.

Finalmente, a modo de complementos no esenciales, hemos agregado un capítulo de interés histórico y didáctico sobre las clásicas construcciones con regla y compás, sistematizadas en teoría moderna y otro capítulo sobre Geometría reglada y Geometría de círculos, con ventanas abiertas al paisaje de la Geometría moderna, a través de las cuales podrá el principiante vislumbrar desde el comienzo de sus estudios ese nuevo mundo que los tratados relegan con su silencio más allá del ámbito universitario, sin que el futuro ingeniero llegue nunca a tener más conocimiento que la vaga noticia negativa de que siempre fue para su gremio y siempre será para él, terra incognita.

J. REY PASTOR.

PLAN DE LA OBRA

La Geometría Analítica empezó con Descartes como un apéndice de su "método" para conducir bien la razón y buscar la verdad en las ciencias. Pronto se vió que, además, era un instrumento indispensable para comprender la esencia de los problemas geométricos y para interpretar los conceptos del análisis. Como método, la Geometría Analítica permite hallar y estudiar los lugares geométricos de manera sistemática y general. Como instrumento de análisis, dió la clasificación de las curvas en algebraicas y trascendentes, permitió demostrar la imposibilidad de solución de ciertos problemas clásicos (duplicación del cubo, trisección del ángulo, ...) y abrió las puertas al estudio general de las transformaciones geométricas. Ambos frutos han resultado de igual interés para la matemática pura como para las aplicaciones. Para la primera, la Geometría Analítica ha penetrado tan profundamente en cualquiera de sus ramas que puede decirse que es consubstancial con la misma. Para las aplicaciones, la Geometría Analítica, sostén del cálculo infinitesimal, es base de todo estudio cuantitativo de la técnica.

En la Geometría Analítica que presentamos se intenta hacer resaltar bien ambas finalidades. Vamos a indicar el plan seguido y las directrices generales que lo presiden.

Se ha dado máxima importancia a la geometría "métrica". Creemos que la Geometría Proyectiva tiene sus métodos sintéticos propios, instructivos y elegantes, que tienen para ella todas las ventajas. Por esto hemos reducido el estudio analítico de las propiedades proyectivas a un mínimo indispensable para hacer ver cómo la Geometría Analítica sirve también para ello, pero sin dedicarle más que una extensión secundaria.

Se divide la obra en tres partes: Iº Geometría de los espacios undimensionales o geometría de la recta; *IIº Geometría de los espacios bidimensionales o* geometría del plano; *IIIº Geometría de los espacios tridimensionales o* geometría del espacio. *Como apéndice se incluye un capítulo sobre la geometría de rectas y círculos, la primera como ejemplo de geometría de un espacio cuadrimensional, y otro sobre Nomografía, este último como ejemplo de aplicación de la Geometría Analítica.*

La geometría sobre la recta sirve para introducir el concepto de abscisa, el de razón simple entre tres puntos y el de razón doble entre cuatro; este último es un concepto proyectivo que se introduce por su definición métrica. En particular se estu-

dian las cuaternas armónicas. Se observa cómo la geometría sobre la recta equivale a la de los haces de rectas o de planos, por sección de los mismos por una recta normal a un elemento, figuras que, con la recta, forman los espacios unidimensionales (llamadas también "formas de primera especie"; en ellas cada elemento queda determinado por un solo parámetro: su abscisa).

Para la Geometría Analítica del plano se introducen las coordenadas cartesianas. Conviene no limitarse a las ortogonales, a pesar de que van a ser éstas las comúnmente usadas, pues para ciertos problemas las coordenadas oblicuas resultan más ventajosas. La demostración analítica, por ejemplo, de que las tres medianas de un triángulo concurren en un punto, es inmediata en coordenadas oblicuas (se toman por ejes dos lados del triángulo) y menos simple en coordenadas rectangulares. Lo que interesa hacer notar es que el "grado" de una curva, en particular de la recta y de las cónicas, es independiente de si las coordenadas son oblicuas o rectangulares y que las fórmulas son las mismas siempre que se trate de problemas "afines" (recta determinada por dos puntos, intersecciones, paralelismo, razones simples, ...). En cambio, para los problemas "métricos" (distancia, perpendicularidad, propiedades de la circunferencia, ...) las coordenadas rectangulares conducen a fórmulas más simples.

En cada caso hay que utilizar las coordenadas más convenientes; pretender prescindir de las coordenadas oblicuas lleva a una simplificación engañosa, así como el uso sistemático de las mismas motiva una complicación innecesaria.

La introducción de las fórmulas de cambios de ejes ortogonales y de las coordenadas polares, se aprovecha para deducir, como repaso para el lector, las fórmulas fundamentales de la trigonometría plana.

Después de estudiar la ecuación de la recta en sus diversas formas y los problemas de ángulos y distancias, se entra en el estudio de las cónicas o curvas de segundo grado. Primero, la circunferencia y haces de circunferencias; después, las tres cónicas por separado y por sus ecuaciones reducidas. Finalmente, la ecuación general de las cónicas.

Se pasa luego al estudio de las curvas en general, empezando con unos ejemplos simples de cúbicas y cuárticas. El concepto de lugar geométrico permite introducir varias curvas clásicas (concoide, cisoide, lemniscata, cicloide, ...) que sirven de ejemplo para aplicar los métodos de la Geometría Analítica a la construcción de curvas, sean éstas dadas por su ecuación explícita, implícita o por sus ecuaciones paramétricas.

Se entra luego en el capítulo de las "transformaciones geométricas". La geometría clásica, siguiendo la pauta de los griegos, es esencialmente "estática": considera a las figuras como entes rígidos, cuyas propiedades estudia. La geometría moder-

na, en cambio, presta mayor atención a las "transformaciones" de las figuras en otras y al estudio de las propiedades que se conservan por estas transformaciones. De aquí que hayamos dado una amplitud mayor que la acostumbrada, a este capítulo. Se estudian principalmente las transformaciones lineales: movimientos, simetrías, homotecias, semejanzas, afinidades. Se dan, en cada caso, las condiciones que deben cumplir los coeficientes de una substitución lineal para que la transformación sea una u otra de las mencionadas. Como transformación cuadrática se estudia con detalle la inversión, mencionando brevemente las transformaciones cuadráticas en general y la manera de obtenerlas.

Termina la parte de geometría plana con una nota acerca de la solución de problemas con regla y compás, demostrando la imposibilidad de resolver los problemas clásicos de la duplicación del cubo y trisección del ángulo y haciendo ver cómo la trascendencia de π imposibilita la cuadratura del círculo. Estos problemas, incluídos por costumbre en los libros de álgebra más que en los de Geometría Analítica, creemos útil tratarlos aquí, pues fué precisamente la Geometría Analítica la que permitió demostrar su imposibilidad.

La geometría del espacio sigue paralelamente el plan expuesto para la del plano. Sistemas de coordenadas, repaso de las fórmulas fundamentales de la trigonometría esférica al estudiar el cambio de ejes ortogonales, cuádricas (primero en su ecuación reducida y luego por su ecuación general), curvas y superficies. Sin entrar en las transformaciones correlativas a las estudiadas en el plano, lo que sería prácticamente una repetición, se incluye, en cambio, un capítulo de geometría reglada y otro de geometría de círculos, tópicos éstos destinados al lector que desee introducirse en la comúnmente llamada "geometría superior".

Termina la obra con un capítulo sobre Nomografía (nomogramas usuales, construcción de nomogramas y teoría de los mismos) redactado íntegramente por el Ing. José Babini, especialista en la materia, a quien deseamos expresar desde aquí nuestro agradecimiento por su valiosa y amable colaboración.

LOS AUTORES.

Capítulo I

ESPACIOS UNIDIMENSIONALES. SERIES Y HACES

§ 1. Geometría métrica de la serie rectilínea

1. **La geometría métrica.** — Después de estudiar Euclides las formas y relaciones de las figuras planas y espaciales en los libros I - IV de los *Elementos*, consideró necesario abordar la geometría métrica, estudiando en los libros V y VI las relaciones numéricas entre las medidas de los segmentos y ángulos de cada figura geométrica; de modo tal, que conocidas algunas medidas (datos) se logra deducir por cálculo aritmético las restantes distancias y ángulos, así como las áreas y volúmenes. La semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras eran sus instrumentos más eficaces; y el maravilloso cálculo así logrado del octógono, pentágono y decágono regular, no fueron ni podían ser superados en más de dos mil años, hasta que el adolescente Gauss hizo el magno descubrimiento de calcular el lado del heptadecágono y construirlo con regla y compás, gracias al instrumento algebraico ya perfeccionado [1].

Pero no menos maravillosa es la geometría métrica de Eudoxio y Euclides, construída sin ayuda del álgebra, entonces inexistente, con el sólo recurso de la semejanza de triángulos, es decir, del teorema de Thales de Mileto.

Ahora veremos el fundamento de esta geometría métrica, que responde al programa inicial (Geometría = medición de la Tierra) y es la base de todas las técnicas.

Ejemplo: Para comprender el valor práctico de la geometría métrica, bastan ejemplos muy vulgares. ¿De qué serviría, al encargar un vidrio de ventana, dar su descripción geométrica, aun en el caso más sencillo de forma rectangular? Bastan en cambio un par de números, sus medidas, para determinar el vidrio adecuado. Varias medidas permiten al mecánico hacer fundir la pieza que necesita para armar una máquina; y lo mismo proceden con diverso grado de exactitud todos los ingenieros y artesanos de variados oficios, desde el sastre hasta el relojero.

2. **Medida absoluta de un segmento.** — Sabe el lector, desde la enseñanza primaria, cuál es el método de medición de un segmento o *distancia* entre dos puntos A, B, con una unidad

[1] Ver la demostración muy elemental en Rey Pastor: *Lecciones de Algebra.*

U, llevando reiteradamente ésta sobre el segmento, a partir de uno de sus extremos, hasta que el segmento queda descompuesto en un cierto múltiplo de U, más un resto menor que U, es decir: $mU \leqslant AB < (m+1)U$.

En la práctica de las mediciones se logra, por subdivisión de U en número suficiente n de partes, la coincidencia de AB con un cierto número de estas partes, es decir $AB = \frac{m}{n}U$, y el número racional m/n es la medida del segmento, cualquiera que sea el extremo inicial, es decir: AB y BA tienen la misma medida m/n. Inversamente, si deseamos encargar la construcción de un segmento (varilla, caño, ...) igual a AB, basta dar la unidad U y el número m/n, para obtener otro segmento igual a él.

Adoptado un segmento como unidad, cada segmento AB = = BA *tiene una medida; y recíprocamente cada número determina un segmento, que tiene esa medida.*

Algunos ejemplos nos indicarán la insuficiencia de la geometría métrica fundada sobre este principio inexacto.

a) Aunque en las mediciones físicas se llega a un número exacto, fraccionando suficientemente la unidad, es decir, todos los segmentos son prácticamente *conmensurables*, se llega a contradicciones al admitir que todo segmento contiene un número exacto de veces alguna parte alícuota de la unidad. Ya los pitagóricos demostraron que la diagonal del cuadrado es inconmensurable con el lado; y después se vió que también lo es la longitud de la circunferencia con el diámetro. Para conservar la validez del principio anterior se crearon en el siglo XIX los números irracionales [1].

b) Se comprende la ventaja de señalar en los caminos las distancias más importantes, pero ¿será suficiente al viajero leer en una cartelera "A Santa Fe 52 Km."? Si no lo sabe ya, o el cartel carece de flecha indicadora del sentido, forzoso le será averiguarlo. Y también será desconocimiento, más bien que conocimiento de la posición de un lugar geográfico o celeste, el basado en su latitud y longitud, calculadas con gran exactitud, pero sin dar sus sentidos, boreal o austral, oriental u occidental.

Conclusión: no basta expresar los segmentos por sus medidas: es preciso considerar además sus *sentidos*, es decir, no bastan los números *positivos* para medir segmentos de una recta, o arcos de una curva; es preciso usar además números *negativos*.

c) *Los números relativos* (esto es, números de signo ±) fueron introducidos en la Aritmética por los indos para la medición de magnitudes con dos sentidos (débitos y haberes, trayectos sobre una curva, etc.) pues cada cantidad está representada por un número absoluto, que expresa el *valor absoluto* (pesos en el primer ejemplo, centímetros en el segundo) y un signo ± siempre convencional, que representa el sentido. Así, es indi-

[1] Los griegos, desde Eudoxio, zanjaban la dificultad sustituyendo la inexistente medida por una sucesión de *razones* entre segmentos: artificio que equivale a la sucesión de números racionales hoy usados para definir el *número irracional*. Véase: J. REY PASTOR, P. PI CALLEJA y C. A. TREJO: *Análisis Matemático*, vol. I, pág. 87. Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 1952.

ferente adoptar sobre la curva uno u otro sentido como positivo; y en la c/c del banco B con el cliente C las cifras son las mismas que en la llevada por C al banco B, con signos opuestos.

Son precisamente los trayectos o segmentos sobre una recta las magnitudes de dos sentidos que interesan para la geometría analítica, logrando así la ubicación de cada punto de la recta sin ambigüedad, gracias al signo de su distancia a O, que así se llama *abscisa*.

3. **Fundamentos de la geometría analítica.** — Los números *racionales*, con los *irracionales*, tanto *positivos* como *negativos*, constituyen el campo de los números *reales*. Con todos ellos alcanza su plenitud, como ahora veremos, la geometría analítica, que se funda en dos teoremas.

DEF. 1. Dada una recta r y en ella un punto O llamado *origen*, y otro U llamado punto *unidad* en una de las dos semirrectas en que O divide a r, la que contiene el punto U se llama *semirrecta positiva* y la que no lo contiene se llama *semirrecta negativa*.

Puesto que todo segmento OX tiene una medida (racional o irracional) con la unidad OU, como veremos rigurosamente (§ 4-3), a cada punto X de la recta se le puede hacer corresponder el número real x que mide su distancia al punto origen O, medida con una unidad igual al segmento OU, con signo + si X está en la semirrecta positiva y con signo — si está en la semirrecta negativa. Al punto U, por ejemplo, corresponde el número 1 y al punto O se le hace corresponder el número 0.

DEF. 2. Cuando sobre una recta se han fijado los puntos O y U se dice que se tiene sobre la misma un *sistema de abscisas*. Se dice también, a veces, que la recta es entonces un *eje de abscisas*: a la parte positiva se le llama *semieje positivo* y a la negativa *semieje negativo*.

DEF. 3. El número real x, medida de OX con su signo correspondiente, se llama *abscisa* del *punto X*.

Recíprocamente, por el postulado de la continuidad (§ 4-4), a todo número real x se le puede hacer corresponder un punto sobre la recta, aquel cuya distancia al O, medida con la unidad OU, sea igual a x, y esté situado en la semirrecta positiva o negativa según que x sea positivo o negativo. Resulta en definitiva el fundamental:

TEOR. 1. *Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y los números reales que son sus abscisas.*

La trascendencia (que ya reconoció Descartes) de esta correspondencia, no reside tanto en ser *biunívoca*, como en ser *ordenada*; es decir: si es X *anterior* a Y, es $x < y$ (§ 4-5); por tanto, al *segmento* AB (es decir, A ant. X ant. B) corresponde el *intervalo* $(a < x < b)$. Elegido arbitrariamente pequeño el segmento AB, que se llama *entorno* de X, existe un

entorno del número x, que es el intervalo (a, b) al que corresponden los puntos de AB y recíprocamente, la correspondencia es pues *continua*, y también su inversa, es decir, a puntos *suficientemente* próximos a X corresponden abscisas *arbitrariamente* próximas al número x; tales correspondencias se llaman *bicontinuas*.

Esta correspondencia ordenada permite identificar, como se hace modernamente, las palabras *punto* y *número*, *segmento* e *intervalo*, y *derecha* e *izquierda* con *mayor* y *menor*; etc. La fusión de las matemáticas (aritmética y geometría) en una sola *matemática*, es obra de Descartes.

Si llamamos *distancia* desde P hasta Q a la medida de PQ con el signo que corresponda a su sentido, y suponemos enteras las abscisas positivas $p < q$, el segmento OQ contiene q unidades y solamente p unidades el OP; luego la medida de PQ es $q - p > 0$, mientras la de QP es $p - q < 0$. Es claro que esta fórmula subsiste si las abscisas son fraccionarias, pues *medir* no es sino *contar* las unidades $OU' = OU/n$; y solamente faltan considerar las diversas posiciones posibles de P y Q (§ 4-3) y la generalización para abscisas irracionales. Llamando brevemente *vector* a todo segmento ordenado, podemos, pues, formular el 2º teorema fundamental:

TEOR. 2. *La medida de un vector de la recta es la abscisa del extremo, menos la abscisa del origen.* Es decir, a la relación geométrica $PQ = OQ - OP$ corresponde la relación aritmética: med. $PQ = q - p$.

De ella deduciremos (§ 4-5) la correspondencia entre las cuatro operaciones aritméticas y geométricas (suma, resta, producto, cociente), que recibe el nombre de *isomorfismo*.

NOTACIÓN: Puesto que son dirigidos y ordenados los segmentos que habremos de considerar en este curso, es decir, *vectores*, es innecesario todo distintivo especial. Es corriente, sin embargo, en muchos libros, agregar una flecha, escribiendo por ejemplo $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$. Una letra mayúscula P representará, pues, en esta obra, indistintamente el *punto* P o el *vector* OP. De la misma manera, siempre que se escriba AB se entenderá el segmento orientado (vector) de origen A y extremo B.

Cuando excepcionalmente queramos indicar segmentos *absolutos*, sin asignación de orden, escribiremos $|AB|$; notación que a veces indica también su medida absoluta

COROLARIO. Si M es el punto medio del segmento AB cuyos extremos tienen las abscisas a y b, debe ser $b - m = m - a$ de donde $m = \frac{1}{2}(a + b)$. Es decir: *la abscisa del punto medio de un segmento es la media aritmética de las abscisas de sus extremos.*

4. **Transformación de abscisas.** — Hemos visto que fijados el punto origen O y el punto unidad U, para cada punto de la recta quedaba bien determinada su abscisa; y, recíprocamente, que cada número real es abscisa de un punto único de la recta. Los dos puntos O, U que permiten establecer esta correspon-

dencia biunívoca entre puntos y abscisas se dice que constituyen un sistema de abscisas (o de coordenadas) sobre la recta. Indicaremos este sistema, abreviadamente, por (O, U).

Se plantea de manera natural el problema: si se sustituyen los puntos O, U por otros O′, U′, ¿cómo se transformarán las abscisas de los puntos de la recta? Es decir, si un punto general X tiene la abscisa x en el sistema (O, U), ¿cuál será su abscisa x' en el sistema (O′, U′)?

a) El caso más importante en las aplicaciones es aquel en que la unidad de medida no se cambia, ni se cambia la orientación de la recta, lo cual equivale a suponer que se cumple la condición OU = O′U′.

La solución resulta inmediatamente del Teor. 2, pues al cambiar el origen O por el O′ de abscisa a, la nueva abscisa x' del punto X de abscisa x, es

[1] $$x' = \text{med. } O'X = x - a \quad \text{o bien} \quad x = x' + a.$$

Ésta es la fórmula del cambio de coordenadas sobre la recta para el caso de conservarse la orientación y la unidad de medida. Es decir: *la abscisa de un punto en el nuevo sistema es igual a la correspondiente en el sistema primitivo, menos la abscisa del nuevo origen respecto del sistema primitivo.*

Por ejemplo, si la abscisa del punto X es $x = -3$ y trasladamos el origen de coordenadas al punto O′ de abscisa $a = -4$, la nueva abscisa de X será $x' = -3 - (-4) = 1$.

b) *Caso general.* Consideremos ahora el caso en que se cambia también la unidad de medida, o sea, se pasa del sistema (O, U) a otro general (O′, U′).

La nueva unidad de medida será O′U′, o sea, si b es la abscisa de U′ y a la de O′ (ambas en el sistema (O, U)), será $O'U' = b - a$. La nueva abscisa x' de X será, por definición (1), la distancia O′X medida con la unidad O′U′ y con signo + o — según que X se encuentre o no en la misma semirrecta que U′, de las dos en que divide la recta el nuevo origen O′. Observando que en el primer caso O′X y O′U′ tienen el mismo signo y en el segundo caso tienen signos opuestos, resulta que, inclusive en signo será

[2] $$x' = \frac{O'X}{O'U'} = \frac{x - a}{b - a}.$$

Ésta es la fórmula general del cambio de coordenadas. Si la unidad de medida no cambia ni tampoco la orientación, es $b - a = 1$ y esta fórmula coincide con la [1] de antes.

De la fórmula $PQ = q - p$ (Teor. 2), es fácil obtener otras relaciones importantes entre segmentos orientados de una misma recta. Las más importantes son:

1ª) *Relación de Chasles.* Dados tres puntos A, B, C, sobre una recta, se verifica siempre que

[3] $$AB + BC + CA = 0$$

En efecto, basta poner $AB = b - a$, $BC = c - b$, $CA = a - c$, y comprobar que la relación se satisface.

2ª) Esta relación se generaliza al caso de n puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tomando la forma

$$[4] \qquad A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4 + \ldots + A_{n-1} A_n + A_n A_1 = 0$$

como resulta inmediatamente al sustituir cada segmento por la diferencia entre las abscisas de sus extremos.

3ª) *Relación de Euler.* Dados 4 puntos A, B, C, D, sobre una recta, existe la relación

$$[5] \qquad AB \,.\, CD + AC \,.\, DB + AD \,.\, BC = 0$$

Para demostrarlo basta, igual que antes, sustituir cada segmento por la diferencia entre las abscisas de sus extremos y verificar las operaciones indicadas.

4ª) *Relación de Stewart.*

$$AB \,.\, CM^2 + BC \,.\, AM^2 + CA \,.\, BM^2 + AB \,.\, BC \,.\, CA = 0$$

que se demuestra de igual manera.

§ 2. Haces de rectas

1. Haces de rectas: medidas angulares. — Se llama *haz de rectas*, al conjunto de todas las rectas de un plano que pasan por un punto fijo O, llamado *centro* o *vértice* del haz.

Para determinar cada recta del haz hay que definir en él un sistema de abscisas angulares. Para ello conviene recordar algunas nociones elementales.

Suponemos conocidos los conceptos de ángulo de dos rectas y las operaciones de suma y diferencia. La medición directa de ángulos suele hacerse adoptando como unidad el *ángulo recto*, o bien el *grado* (sexagesimal o centesimal, menos usado) que es una parte alícuota. La medida se expresa indicando la unidad con las abreviaturas R (ángulo recto), ° (grado sexagesimal), g (grado centesimal). Así, por ejemplo:

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{R} = 45^\circ = 50\ \mathrm{g}.$$

La medición usual en Análisis, que usaremos frecuentemente en este libro, es indirecta y se llama *radial*; adopta como medida α de cada ángulo la longitud de cualquier arco central subtendido por el ángulo, medida con su propio radio, es decir

$$[1] \qquad \text{medida radial } \alpha = \frac{\text{longitud del arco}}{\text{longitud del radio}}$$

Así, pues, la medida radial del ángulo llano es π, porque ésta es la longitud de la semicircunferencia medida con el radio; y el ángulo recto tiene la medida radial $\pi/2$. Son éstas las medidas que usaremos casi exclusivamente en este curso, insistiendo siempre en que estos números son *abstractos*, como razones de longitudes, lo mismo que los senos, cosenos, etc.

NOTA 1. Salta a la vista que esta medida es un *número abstracto*, independiente del radio adoptado, por ser proporcionales los ángulos centrales a sus respectivos radios. Es, pues, una medida análoga a las medidas goniométricas, pues también el seno, coseno, etc., es una razón de dos longitudes y por tanto un número abstracto. La diferencia estriba en que la medida radial cumple la condición de ser proporcional al ángulo, y las goniométricas no. Unas y otras pueden adoptarse como *abscisas* en el haz, pero solamente las anteriores son *medidas*, en sentido estricto.

2. Suele decirse frecuentemente, que en la medida radial, la unidad de medida es el ángulo llamado *radiante* (incorrectamente suele usarse la palabra *radian* del inglés *radiant*), cuya longitud es igual a su radio y cuya medida es algo inferior a 60°, puesto que éste tiene la *cuerda* igual al radio. Exactamente, puesto que la longitud de la semicircunferencia es πr, o sea su medida radial es π, resulta como amplitud del radiante, en grados sexagesimales

$$\frac{180}{\pi} = 57^\circ\, 17'\, 44'' \ldots \tag{2}$$

Es muy cierto que la medida radial de este ángulo es 1: pero no que se utilice como unidad de medida para los ángulos, y toda la Geometría y sus aplicaciones pueden desarrollarse sin usar ni mencionar este ángulo, que además de innecesario es peligroso por inducir a error. Así por ej. en la expresión importante: sen $x \cong x$, si el lector supone x expresado en radiantes, resulta el absurdo de ser un número abstracto igual a un ángulo.

La única razón que indujo a introducir ese ángulo innecesario, fué la de tener un modelo de unidad de ángulos; pero lo mismo acontece en todas las magnitudes cuya medida no es directa; por eso carecemos de patrones para los momentos, velocidades, energías, ... El caso del ángulo es singular, para él disponemos de unidad natural (el ángulo recto) pero su medición más útil, que es la radial, por estar inseparablemente unida de la circunferencia, es indirecta y por tanto no interesa cuál sea el ángulo cuya medida es 1, de igual modo que en las pesadas con una báscula, no interesa cuál sea el peso que corresponde a cada centímetro de escala.

2. **Abscisas en el haz.** — Alrededor de un punto fijo O (fig. 1) del plano hay dos sentidos de rotación: el *sentido directo* o *positivo*, que es el contrario al de las agujas de un reloj, y el *sentido inverso* o *negativo*, que es el de las agujas de un reloj.

Sea o una recta del haz, de centro O, que tomamos como recta origen. Toda recta a del haz puede determinarse por el ángulo α que forma con o, medido en sentido directo desde o hasta a. Este ángulo se llama *abscisa angular* de la recta a.

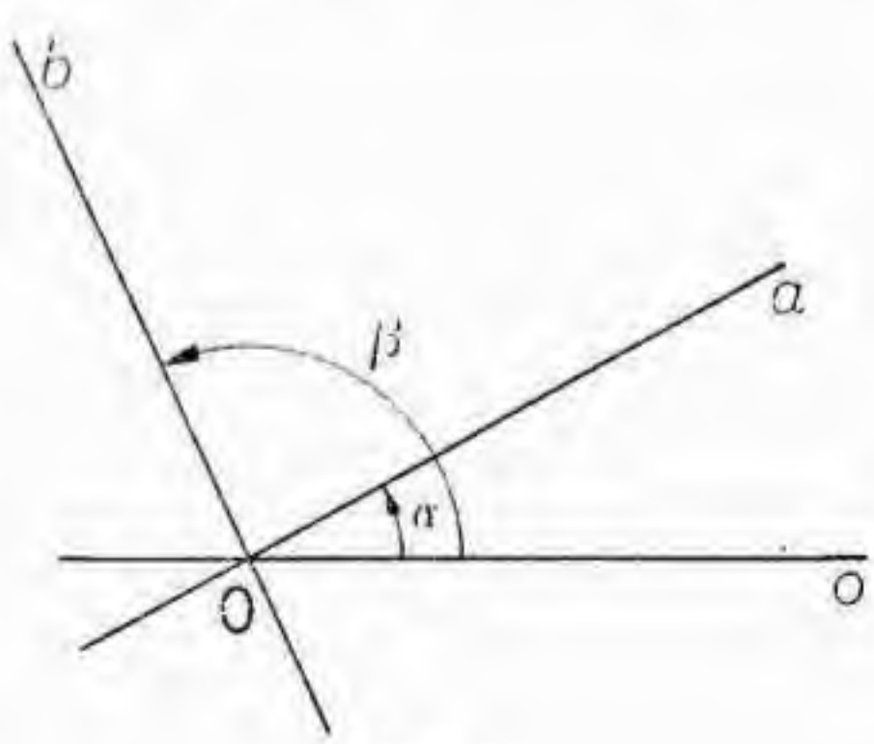

Fig. 1.

La abscisa angular de una recta queda determinada salvo un múltiplo de π. Es decir, a la recta a corresponden todas las abscisas α, $\alpha + \pi$, $\alpha + 2\pi$, ...

Si convenimos en tomar los

ángulos negativos en sentido inverso a partir de o, a la misma recta corresponden también las abscisas $\alpha - \pi$, $\alpha - 2\pi$, ... De una manera general, si una recta a forma con la recta origen o un ángulo positivo $\alpha < \pi$, medido en sentido directo de o hasta a, todas las abscisas angulares de la forma

[3] $$(oa) = \alpha + n\pi,$$

donde n indica un múltiplo positivo o negativo de π, corresponden a la misma recta.

En general, de todas estas abscisas se tomará siempre aquella comprendida en 0 y π, o sea la que cumpla la condición $0 \leqslant \alpha < \pi$.

Dadas dos rectas a, b del mismo haz de centro O, representaremos por (ab) al ángulo que debe girar la primera a, en sentido directo, para superponerla con la segunda b. Naturalmente este ángulo queda sólo determinado salvo un múltiplo de π. Si se consideran tres rectas a, b, c del haz, al girar en sentido directo, primero de a a b, después de b a c y luego de c a a, habremos girado un múltiplo de π. Vale por tanto, la siguiente relación (análoga a la llamada relación de CHASLES)

[4] $$(ab) + (bc) + (ca) = n\pi.$$

Por la misma razón, si dadas dos rectas b, c se gira primero de b a c y luego de c a b, se habrá girado todo un múltiplo de π, o sea,

$$(bc) + (cb) = m\pi$$

es decir

[5] $$(cb) = m\pi - (bc).$$

Apliquemos [4] al caso de ser c la recta origen o. Será

[6] $$(ab) + (bo) + (oa) = n\pi.$$

Según [5] es $(bo) = m\pi - (ob)$ y por tanto de [6] se deduce

[7] $$(ab) = (ob) - (oa) + k\pi$$

siendo k el número entero, positivo o negativo, $n - m$. Esta fórmula nos da el ángulo de dos rectas en función de sus abscisas angulares.

EJERCICIO. Dadas las abscisas angulares (oa), (ob) de dos rectas a, b, hallar las abscisas de las rectas bisectrices del par a, b.

Solución: Si c es una recta bisectriz, debe ser $(ac) = (cb)$ o sea, según [7],

$$(oc) - (oa) = (ob) - (oc) + k\pi$$

de donde

$$(oc) = \tfrac{1}{2}\,[(oa) + (ob) + k\pi]$$

Al dividir por 2 un múltiplo de π, el cociente puede ser, o bien otro múltiplo de π, o bien $\pi/2$ más un múltiplo de π, de manera que resultan dos bisectrices cuyas abscisas angulares respectivas son

$$(oc) = \tfrac{1}{2}\,[(oa) + (ob)] + k\pi\,, \quad (oc') = \tfrac{1}{2}\,[(oa) + (ob)] + \frac{\pi}{2} + k\pi$$

que corresponden a las llamadas bisectrices interior y exterior del ángulo de las dos rectas a, b.

3. **Haces de rayos o de rectas orientadas.** — Se llama *haz de rayos*, al conjunto de las semirrectas del plano que tienen un mismo origen fijo O, llamado centro del haz. Cada semirrecta se llama también un *rayo del haz*.

Las abscisas angulares de los rayos de un haz se definen exactamente igual que en el caso de los haces de rectas, con sólo tener en cuenta que las abscisas α y $\alpha + \pi$ que antes correspondían a la misma recta, ahora corresponden a dos rayos distintos, llamados *rayos opuestos*. Para que correspondan a un mismo rayo, las abscisas deben diferir en un múltiplo, positivo o negativo, de 2π.

Las relaciones [5], [6] y [7] del número anterior valen igualmente con sólo sustituir los múltiplos de π por múltiplos de 2π. Es decir, se tiene ahora

$$(cb) = 2k\pi - (bc)$$

[8]

$$(ab) = (ob) - (oa) + 2k\pi$$

donde k es un entero positivo o negativo.

En vez de hablar de semirrectas de origen O, es equivalente hablar de *rectas orientadas* que pasan por O. En efecto, a cada semirrecta o rayo corresponde la recta orientada que lo contiene con la orientación definida por ser la semirrecta la parte positiva de la recta. Recíprocamente, a toda recta orientada, corresponde su semirrecta positiva. Por consiguiente: *existe correspondencia biunívoca entre haces de rayos y haces de rectas orientadas.*

§ 3. Razones simples y cuaternas armónicas

1. **Abscisas homogéneas y punto impropio.** — La matemática propende a la sencillez mediante la ampliación de sus conceptos, que permite incluir casos diversos en un enunciado general exento de excepciones. La relación perspectiva entre un haz de rectas y su sección por una recta r tiene una excepción: al rayo paralelo no corresponde ningún punto en r y para evitar esta excepción se ideó el *punto impropio* o *punto del infinito* de la recta.

Parecería natural, considerando la recta como ampliación de un segmento por ambos extremos, admitir dos puntos impropios, uno de abscisa $+\infty$, y otro $-\infty$; pero en la geometría euclidiana hay una sola recta del haz que es paralela a r; y para conservar la correspondencia biunívoca entre serie y haz, es preciso completar la serie de puntos propios con *un solo punto impropio,* al cual le hacemos corresponder la única recta no secante, es decir, paralela a r.

El punto impropio es, pues, común a todas las rectas paralelas y se prefiere esta frase "punto común" en lugar de "dirección común" para poder enunciar sin excepciones: *Dos rectas cualesquiera del plano tienen un punto común y sólo uno.*

El lector que haya leído alguna geometría proyectiva sintética, es decir, desarrollada sin auxilio del álgebra, ha podido admirar la sencillez y generalidad de sus teoremas, gracias a la introducción de elementos impropios; pero ésta viene a romper el isomorfismo que en (§ 1) habíamos introducido entre la serie de puntos y el campo de los números reales. ¿Qué abscisa atribuir al punto impropio? Se pensará que el símbolo ∞, pero ∞ no es un número, ni obedece a las leyes de los números; y si bien se usa frecuentemente como *símbolo* para designar un punto que carece de abscisa (por ej., en el número [3] de este § 3) , no es abscisa propiamente tal, pues la única operación aritmética que admite es el paso al límite.

Cabría evitar el infinito, como se hace en Análisis, adoptando como abscisa $1/x$ en lugar de x (coordenada plückeriana), pero entonces aparece el infinito en el origen. Se resolvió el problema introduciendo para representar cada punto un par de números (x, t) o cualquier otro par proporcional a él (no nulos los dos) considerándolos equivalentes, y cuya razón x/t es la abscisa ordinaria o *absoluta.* Así, por ejemplo, el punto de abscisa -2 estará representado por cualquier par $(-2t, t)$ con la condición $t \neq 0$; y el par $(1, 0)$ o cualquier otro proporcional $(a, 0)$ siendo $a \neq 0$, representa el punto impropio.

Se establece así la siguiente definición:

Se llaman abscisas homogéneas de un punto propio cuya abscisa ordinaria sea x, *a cualquier par de números cuya razón sea* x. *Las abscisas homogéneas del punto impropio son* (a, 0) *siendo* a *cualquier número distinto de cero.*

Recíprocamente, dos números cualesquiera (a, b) *dados en un cierto orden, pueden considerarse como abscisas homogéneas de un punto cuya abscisa ordinaria sea* a/b *si* $b \neq 0$. *Si* $b = 0$, $a \neq 0$, *el punto correspondiente es el impropio de la recta. Al par* $a = 0$, $b = 0$, *no corresponde ningún punto.*

Las abscisas homogéneas de un punto de abscisa x serán, por tanto, cualquier par de la forma (xt, t) ; en general se toma

$t = 1$ de manera que basta poner $(x, 1)$ para tener las abscisas homogéneas del punto x, si éste es propio.

EJERCICIOS: 1. Hallar las abscisas homogéneas de los puntos A(0), B(—1), C(2). Solución: A(0, 1), B(—1, 1), C(2, 1).

2. Hallar las abscisas ordinarias de los puntos cuyas abscisas homogéneas son A(—3, 2), B(1, —4), C(2, 0). Solución: A(—3/2), B(—1/4), C no tiene abscisa ordinaria, pues es el punto impropio o del infinito de la recta.

3. Hallar la distancia entre los puntos cuyas abscisas homogéneas son A(—2, 1), B(3, 2). Solución: hay que pasar a abscisas ordinarias y luego restar, o sea, $AB = 3/2 - (-2) = 7/2$.

2. **Razón simple de tres puntos.** — DEF. 1. Dados tres puntos A, B, C sobre una recta, se llama *razón simple* de la terna A, B, C y se representa por (ABC), al cociente de vectores:

$$[1] \qquad (ABC) = \frac{AC}{BC}.$$

La razón simple depende del orden en que se consideren los tres puntos; así, se tiene

$$[2] \qquad (BCA) = \frac{BA}{CA}, \qquad (CAB) = \frac{CB}{AB}.$$

En función de las abscisas a, b, c de los tres puntos A, B, C, la razón simple se expresa según § 1, Teor. 2:

$$[3] \qquad (ABC) = \frac{c - a}{c - b}.$$

Consideremos dos puntos fijos y distintos A, B y un punto variable X. Supongamos que A sea anterior a B, o sea, $a < b$. En la razón simple

$$[4] \qquad \varrho = (ABX) = \frac{AX}{BX} = \frac{x - a}{x - b}$$

se observa que si X es *interior* al segmento AB, el numerador $x - a$ es positivo y el denominador $BX = x - b$ es negativo, con lo cual ϱ resulta *negativo*. En cambio, si X es *exterior* al segmento AB, numerador y denominador son del mismo signo y por tanto ϱ es *positivo*. En consecuencia: *la razón simple (ABX) entre dos puntos fijos A, B y un punto variable X es positiva si X es exterior al segmento AB y es negativa si es interior.*

El interés geométrico de la razón simple radica en que se conserva en toda semejanza, como salta a la vista, en las figu-

ras que representan una proyección central sobre rectas paralelas y una proyección paralela sobre rectas oblicuas.

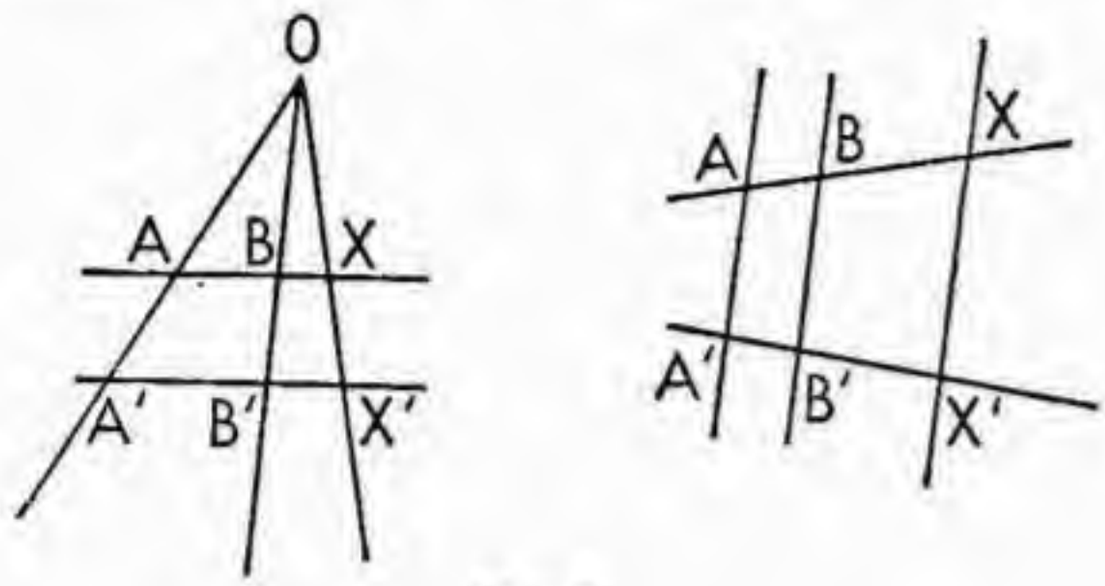

Fig. 2.

3. **Las razones simples como abscisas.** — Analicemos un poco más la variación de la razón simple [4]. Ella tiene un valor bien determinado para todo punto X distinto de B. Recíprocamente, dado un valor ϱ de la razón simple (ABX), queda determinada la abscisa x del punto X, siempre que sea $\varrho \neq 1$, puesto que de [4] se deduce.

$$[5] \qquad x = \frac{\varrho b - a}{\varrho - 1} = \frac{a - \varrho b}{1 - \varrho}.$$

Vemos pues que entre los valores de ϱ y los puntos X hay una correspondencia biunívoca si se exceptúan el punto B por un lado y el valor $\varrho = 1$ por el otro. Al punto $B(x = b)$ no corresponde ningún número, pero le asignaremos el símbolo ∞, porque ϱ tiende a $+\infty$ o bien a $-\infty$ según que X tienda a B por el exterior del segmento AB o por el interior del mismo (puesto que ya hemos visto que en el primer caso ϱ es positivo y en el segundo negativo). Análogamente al valor $\varrho = 1$ no corresponde ningún punto, pero al tender $\varrho \to 1$ resulta para las abscisas $x \to -\infty$, o bien $x \to +\infty$ según las dos maneras, creciendo o decreciendo, con que puede tender ϱ al número 1. Esta doble falta de biunivocidad se salva con la introducción del punto impropio, o sea admitiendo que las abscisas $\pm\infty$ corresponden a un mismo punto Q de la recta (punto del infinito de la misma) y que el símbolo $\varrho = \infty$ representa un número real, que es la razón simple para el punto B.

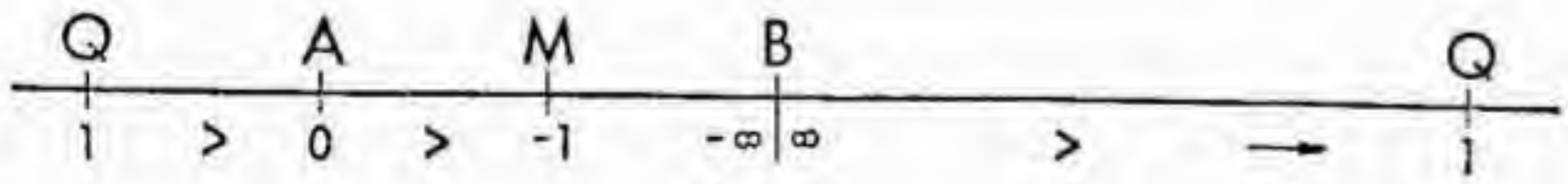

Fig. 3.

Lograda con este doble convenio la correspondencia biunívoca entre puntos y razones ϱ, salta a la vista (fig. 3) que es

ordenada decreciente, escribiendo las expresiones [5] o bien [4] de la siguiente manera:

$$[6] \qquad x = b + \frac{b-a}{\varrho - 1}, \quad \varrho = 1 + \frac{b-a}{x-b}.$$

La continuidad tiene el punto excepcional B y el valor excepcional 1, pero ambas se salvan con esta definición:

Entorno del punto impropio es todo par de semirrectas: X *ant* P, X *post* Q. *Entorno del número* ∞ *es el conjunto* $x < p$, $x > q$. Así resulta que se corresponden los entornos de B y de ∞ y los entornos del punto Z_∞ y del número 1.

Con estos convenios resulta: *la correspondencia entre los puntos y sus abscisas* ϱ *es biunívoca y bicontinua sin excepción.*

Estas propiedades justifican el nombre de *abscisa* que hemos dado al número ϱ correspondiente a cada punto X, pues obedece a la propiedad esencial de las abscisas de distancias, o sea: correspondencia *biunívoca* y *ordenada* con los puntos y por consecuencia la *continuidad* directa e inversa.

Construcciones geométricas. — La fórmula [5] resuelve analíticamente el problema de hallar el punto X cuya razón de distancia AX/BX a dos puntos fijos A, B, tiene el valor dado ϱ.

El mismo problema se resuelve geométricamente de manera simple (fig. 4). Basta trazar por los puntos A y B dos rectas paralelas cualesquiera y tomar sobre ellas los segmentos $AH = \varrho$, $BE = 1$, en el mismo

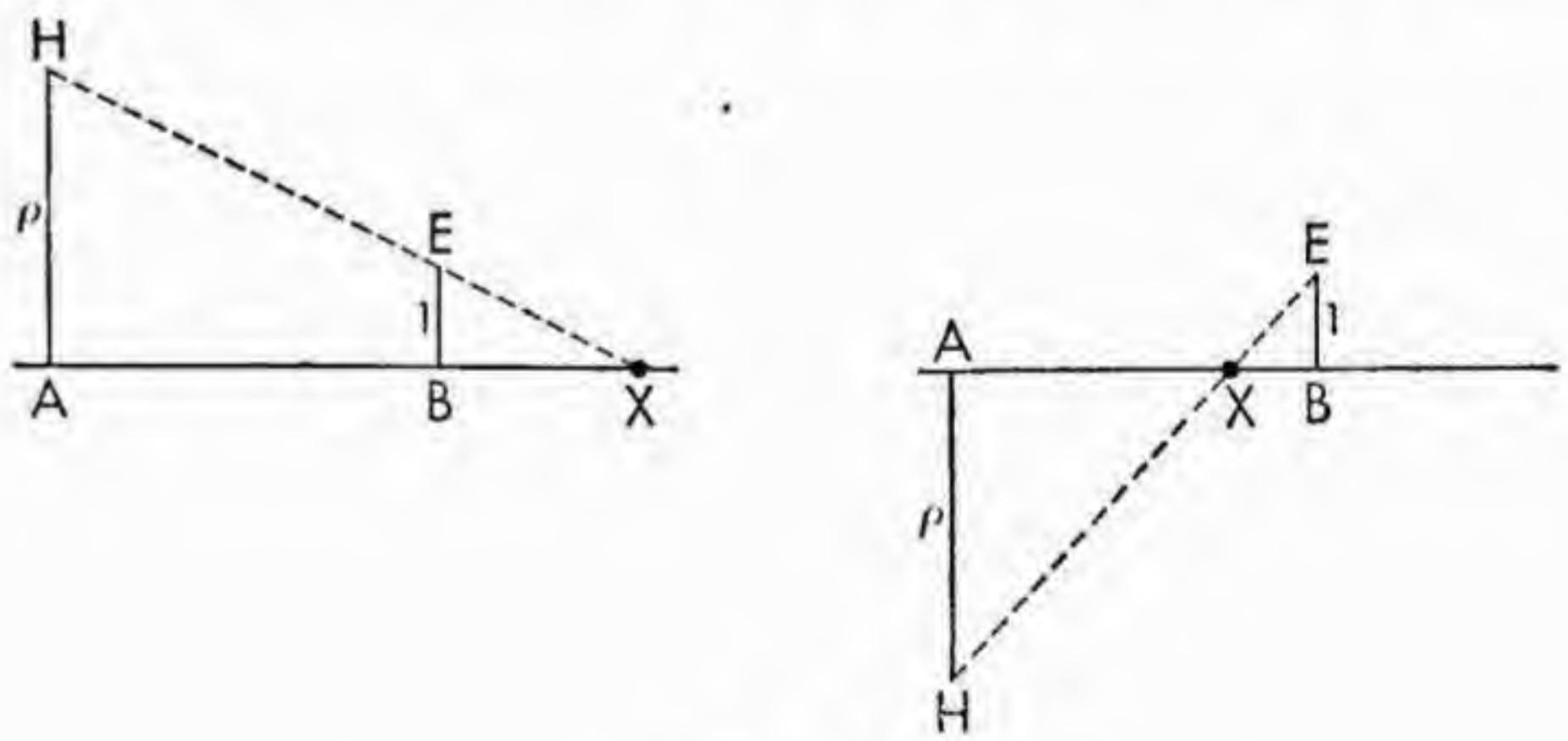

Fig. 4.

sentido si ϱ es positivo y en sentido contrario si es negativo. En ambos casos la recta HE cortará a la dada en el punto X buscado.

En efecto, por semejanza de triángulos se tiene, en valor absoluto, en los dos casos $AX/BX = AH/BE = \varrho$. En cuanto al signo, la construcción está de acuerdo con lo dicho, de que si X es exterior al segmento AB, ϱ es positivo, y si X es interior al segmento AB, ϱ es negativo.

Observemos que si $\varrho = 1$, la recta HE resulta paralela a la recta AB y por tanto X es el punto del infinito o punto impropio de la recta,

como hemos visto analíticamente. En cambio, si $\varrho = -1$, X resulta ser el punto medio del segmento AB.

Los dos puntos X, Y, cuyas razones simples respecto del par AB son números opuestos ϱ y $-\varrho$ se llaman *armónicamente separados* por AB. En particular, el punto impropio Q de la recta y el punto M medio de AB están armónicamente separados por A, B.

EJERCICIOS: 1. Siendo X el punto medio del segmento AB, hallar el valor de $\varrho = (ABX)$ y el de la abscisa x de X.

Solución. Es $AX = XB = -BX$ y por tanto, según [4], $\varrho = -1$. De aquí, [5] da $x = \frac{1}{2}(a + b)$.

2. Hallar la abscisa del punto X interior al segmento AB y que lo divide en dos partes según la razón 3/5.

Solución. Siendo X interior al segmento AB, será $\varrho = -3/5$. Por tanto, según [5], si a, b, son las abscisas de A, B será $x = \frac{1}{8}(3b + 5a)$.

En general, si un punto X divide internamente al segmento AB según la razón m/n, es $x = (mb + na)/(n + m)$ y si lo divide según la misma razón externamente, o sea siendo exterior a AB, es $x = (mb - na)/(m - n)$.

4. **Cuaternas armónicas.** — DEF. 2. Se dice que el par CD está *armónicamente separado* por el AB, cuando son opuestas las razones en que C y D dividen al par AB. Es decir, $(ABC) = -(ABD)$, o sea

$$[7] \qquad \frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}.$$

Está justificado decir que los pares se "separan" pues, siendo las dos razones AC/BC y AD/BD de signos opuestos, según el número anterior, de los dos puntos C, D, uno es interior y otro exterior al segmento AB.

Obsérvese que la relación [7] subsiste si se permutan los dos primeros elementos AB o los dos segundos CD. Es decir, la propiedad de separarse armónicamente depende de los dos pares AB y CD independientemente del orden de los puntos en cada par. Tampoco depende del orden de los dos pares, pues si se cumple [7] también será

$$\frac{CA}{DA} = -\frac{CB}{DB}.$$

es decir, también el par AB separa armónicamente al CD.

También se dice que los dos elementos de cada par son *conjugados armónicos* respecto del otro par. Así se dice, por ejemplo, que A es conjugado armónico de B respecto del par CD y análogamente que C es el conjugado armónico del D respecto de AB.

Resolvamos ahora el problema siguiente: *Dadas las abscisas* a, b, c *de tres puntos* A, B, C, *hallar la abscisa del punto* X *conjugado armónico del* C *respecto del par* AB.

Representando las abscisas de cada punto con la misma letra minúscula, debe ser, según Def. 2,

$$[8] \qquad \frac{x-a}{x-b} = -\frac{c-a}{c-b}$$

de donde se deduce

$$[9] \qquad x = \frac{(c-b)a + (c-a)b}{(c-a) + (c-b)}.$$

Esta expresión se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{c-x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c-a} + \frac{1}{c-b}\right)$$

y si se toma C como origen de coordenadas, o sea $c = 0$, resulta

$$[10] \qquad \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

que nos dice que, en este caso, x es la *media armónica* entre a y b [1].

5. **Propiedades de las cuaternas armónicas.** — a) *El producto de las distancias del punto medio de un segmento a dos puntos conjugados armónicos respecto de los extremos del mismo, es igual al cuadrado de la mitad del segmento.*

En efecto, tomando el punto medio del segmento como origen de coordenadas, las abscisas de sus extremos serán, por ejemplo, a y $-a$. Si c, d son dos puntos conjugados armónicos respecto de estos extremos, según [9] donde se haga $a = a$, $b = -a$, $c = c$, $x = d$, resulta $d = a^2/c$, de donde

$$[11] \qquad a^2 = cd$$

como se quería demostrar.

Recíprocamente, si se cumple [11], los pares de puntos a, $-a$ y c, d forman una cuaterna armónica. Basta, en efecto, comprobar que se cumple la relación [8] con $x = -a$.

Puesto que a^2 es siempre positivo, de [11] se deduce que d y c deben ser del mismo signo; por tanto:

b) *Los puntos de un par de conjugados armónicos respecto de los extremos de un segmento, están los dos de un mismo lado respecto del punto medio del segmento.*

Otra consecuencia de [11] es

c) *Dos pares de puntos conjugados armónicos de un mismo par no se separan entre sí.*

En efecto, si c_1, d_1 son el segundo par, deberá ser $cd = c_1 d_1$.

Si c y c_1 son de distinto signo, y por tanto d, d_1 también, los pares

[1] Recuérdese de la aritmética, que un número x se llama la media armónica entre otros dos a, b precisamente cuando se cumple la relación [10].

mencionados no se separan por estar a distinto lado del punto medio del segmento determinado por el par dado. Si c y c_1 son del mismo signo (supongamos positivo) y es, por ejemplo, $c < c_1 < d$, de la igualdad $c\,d = c_1\,d_1$ se deduce $c < cd/d_1 < d$ y por consiguiente $d_1 < d$, $d_1 > c$ y por tanto d_1 es también interior al segmento $c\,d$.

También es cierto el recíproco:

d) *Dados dos pares de puntos* a, b *y* c, d, *que no se separan entre sí, existe siempre un par de puntos conjugados armónicos respecto de ambos* (fig. 5).

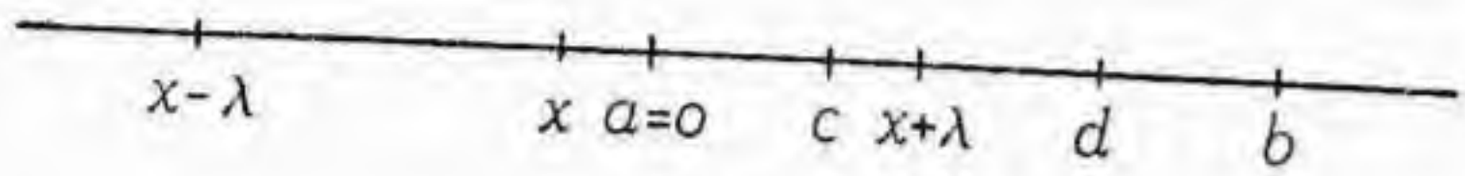

Fig. 5.

Supongamos $a < c < d < b$ y, para simplificar, tomemos el origen de coordenadas coincidente con el punto a, con lo cual será $a = 0$. Si x es el punto medio del par de puntos buscado, las abscisas de estos puntos serán de la forma $x + \lambda$, $x - \lambda$. Según [11] deben verificarse las igualdades $\lambda^2 = xa \,.\, xb = xc \,.\, xd$, o sea,

[12] $$\lambda^2 = x(x - b) = (x - c)(x - d)$$

de donde

[13] $$x = \frac{c\,d}{d + c - b}$$

Con este valor x, la primera igualdad [12] da

$$\lambda^2 = \frac{d\,c\,(b - c)\,(b - d)}{(d + c - b)}$$

Por haber supuesto $b > d > c > a$, el segundo miembro es siempre positivo y por tanto resulta λ real. Con el valor de λ así encontrado y el valor de x dado por [13], se tiene el par de puntos $x + \lambda$, $x - \lambda$ que, por cumplirse [11] y según el recíproco de a), separa armónicamente a los dos pares a, b y c, d.

EJERCICIOS: 1. El conjugado armónico del punto medio de un segmento respecto de los extremos del mismo, es el punto del infinito de la recta.

2. Recuérdese de geometría elemental, que las bisectrices interior y exterior de un ángulo de un triángulo, cortan al lado opuesto en dos puntos conjugados armónicos respecto de los vértices del mismo.

6. Construcción geométrica de expresiones algebraicas. — El teorema de Thales permite construir cuartas proporcionales con regla y escuadra, sin necesidad de compás (usando la regla como transportador de segmentos); por reiteración cabe construir así expresiones del tipo:

[14] $$\frac{A^\alpha \,.\, B^\beta \ldots L^\lambda}{M^\mu \,.\, N^\nu \ldots P^\pi} \quad (\alpha + \beta + \ldots + \lambda = \mu + \nu + \ldots + \pi + 1)$$

como se indica en los Ejercicios.

Usando además el compás se construyen medias geométricas $\sqrt{AB}$, $\sqrt{A^2 - B^2}$; y mediante el teorema de Pitágoras

esta expresión y la $\sqrt{A^2+B^2}$. Por reiteración se construyen los segmentos

$$\sqrt{A^2 \pm B^2 \pm \ldots \pm L^2} \quad \text{ó bien} \quad \sqrt{A'A'' \pm B'B'' \pm \ldots \pm L'L''}.$$

Para el primero basta aplicar la construcción pitagórica; y para el segundo basta ir calculando la media proporcional de cada dos factores A'A'', B'B'', ..., lo que equivale a transformar rectángulos en cuadrados equivalentes.

Obsérvase en todas estas expresiones construídas por Euclides, cuyo tipo más general se reduce al [14], que todas son de 1er. grado, es decir, representan segmentos. Una expresión de 2º grado como

$$AB \quad , \quad P\sqrt{QR} \quad , \quad \sqrt{AB(C^2+D^2)}, \ \ldots$$

representa un *área* y su forma típica es AB; y finalmente (aquí termina el alcance del método) ABC y sus equivalentes representan *volúmenes*.

La idea nueva de Descartes es la de construir expresiones de grado cualquiera, entero o fraccionario, liberándose de la estricta limitación $n = 1, 2, 3$, gracias al sencillo artificio de la introducción de un segmento unidad, U, que permite representar cualquier expresión, homogénea o no, por un solo segmento.

Ejemplos:

1) $A^2 = \dfrac{A^2}{U}$,

2) $ABC = \dfrac{ABC}{U^2}$,

3) $\dfrac{A}{BC} = \dfrac{AU^2}{BC}$

4) $\sqrt{A}\,.\,B = \dfrac{\sqrt{AU}}{U}\,.\,B$

5) $\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}-1} = \dfrac{U\sqrt{AU}}{\sqrt{BU}-U}$

6) $4 + \sqrt{A} - B^2 = 4U - \sqrt{AU} - \dfrac{B^2}{U}$

Salta a la vista que por complicada que sea la expresión racional o irracional, se transforma en segmento mediante la construcción de medias y cuartas proporcionales, gracias al artificio de la introducción del segmento U. Pero también es obvio, que el resultado depende de ese segmento elegido, excepto en el caso de homogeneidad de grado cero, entonces la expresión representa un número abstracto y éste mismo representa el segmento construído, si se mide con la unidad elegida U.

En resumen: pese al valor de esta generalización de Descartes, las construcciones de segmentos, áreas y volúmenes tienen importancia excepcional por su significado intrínseco, independiente de toda unidad arbitraria.

EJERCICIOS

1. *Construcciones con regla y escuadra.*

Dados arbitrariamente los segmentos A, B, C, D, ..., construir con regla y escuadra (sin compás, usando la regla como transportador de segmentos) las expresiones

a) $\frac{AB}{C}$ b) $\frac{ABC}{DE}$ c) $\frac{A^2B}{EF}$ d) $\frac{A^mB^n}{C^p}$ $(m+n=p+1)$

2. *Construir con regla y compás.*

a) $\sqrt{\frac{A(B^2+C^2)}{n}}$ b) $\sqrt{\frac{A^2-B^2}{D}}\,C$

c) $\frac{\sqrt{(A^2+B^2)C}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$ d) $\frac{A\sqrt{B^2-CD}}{\sqrt{PQ}}$

3. *Construcción de expresiones de grado cualquiera.*

a) $A+\sqrt{B-\sqrt{C}}$

b) $A-\frac{1}{B-\frac{1}{C}}$ c) $\sqrt[n]{A}-\sqrt[m]{B}$

En los ejemplos resueltos en el texto anterior se ve el camino para la resolución de éstos y otros problemas.

§ 4. COMPLEMENTOS SOBRE LA GEOMETRÍA DE LA RECTA

1. **Vectores sobre un eje y traslaciones.** — En geometría métrica se determina un segmento enunciando en cualquier orden sus puntos extremos; y se escribe $PQ = QP$, porque hay un movimiento del plano sobre sí mismo, que saca la recta de su posición para llevarla sobre sí misma después de girar, permutando los puntos P y Q; pero si consideramos la recta como un espacio autónomo, los únicos movimientos sobre sí misma se llaman *traslaciones* y cada una está definida dando un solo punto A (origen) y su transformado A′ (extremo); todos los demás segmentos análogos quedan así determinados y se consideran iguales, escribiendo $AA' = BB' = CC' = \ldots$; mientras que los $A'A = B'B = C'C = \ldots$, son desiguales de aquéllos y se llaman sus *inversos*, así como la traslación que definen se llama *inversa* de la anterior.

Un segmento PQ representante de la traslación que transforma P en Q se llama *vector* de *origen* P y *extremo* Q. Todo vector AB cuyo extremo B es el homólogo del origen A en la misma traslación, se llama *igual* al PQ. Esta relación tiene evidentemente las propiedades *idéntica*, *recíproca* y *transitiva*, características de la igualdad abstracta[1] y el vector, es decir, el ente abstracto que define esta igualdad, equivale a la traslación.

Veamos ahora que los vectores de una recta quedan clasificados en

[1] Sobre la igualdad abstracta y la generación de magnitudes por abstracción, véase REY PASTOR, *Curso Cíclico*, vol. I, Cap. I. En Cap. II estudiaremos ampliamente los vectores de E_2, E_3, ..., considerando cada segmento ordenado como representante concreto del *vector abstracto*, definido por la operación lógica llamada *abstracción* de la familia de vectores iguales; de igual modo que cada objeto blanco es un representante concreto de la *blancura*, que es concepto abstracto.

dos clases, unos positivos y otros negativos, si ordenamos la recta, asignándole dos sentidos.

Recordemos (§ 1, Def. 1), que elegido en la recta r un punto O, llamado *origen;* y otro punto U, llamado *unidad*, queda determinada la semirrecta *positiva*: es la de origen O, que contiene U Si PQ es un segmento de r, es decir, la intersección de una semirrecta de origen P y una de origen Q, hay una de ellas acorde con la semirrecta positiva; si es la de origen P, diremos que el *vector* PQ es *positivo;* si la semirrecta positiva es la de origen Q, diremos que el vector QP es positivo, y *negativo* el PQ.

Son equivalentes las locuciones: PQ es *positivo;* el sentido PQ es *positivo;* la semirrecta P + (positiva de origen P) contiene a Q. También se expresa la misma relación diciendo: P es *anterior* a Q, siendo legítimo el uso de esta palabra, que indica orden, porque verifica la propiedad esencial de toda *ordenación*: "Si P es anterior a Q, y Q anterior a R, es P anterior a R"[1].

Una recta r provista de origen O y punto unidad U es, pues, un *conjunto ordenado;* y brevemente se llamará *eje.*

NOTA. Suele definirse el vector como "segmento dirigido" o como "segmento de extremos ordenados", es decir, hay un primero, llamado *origen*, reservando el nombre de *extremo* para el otro. Pero esta ordenación de extremos implica la ordenación de *todos* sus puntos, es decir, en todo vector AB, entre dos cualquiera PQ de sus puntos queda establecida la ordenación acorde con la de A y B.

2. **Adición y sustracción de vectores.** — Recordemos (§ 1-2) que los vectores PQ = MN se dicen *iguales* cuando los segmentos son *congruentes* (relación que expresaremos |PQ| = |MN| y también por tanto = |NM| y además son *acordes* (del mismo signo o sentido).

La *suma* de dos vectores V + W se define así: a partir de un origen A se construye el vector AB = V; a partir del origen B se construye BC = W. Por definición se toma V + W = AC; o sea AB + BC = AC, que equivale a esta otra, frecuentemente llamada *igualdad de Chasles*:

$$[1] \qquad AB + BC + CA = 0.$$

Si se trata de n vectores consecutivos A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, la suma se define por $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n = A_1A_n$, que equivale a la relación

$$[2] \qquad A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n + A_nA_1 = 0$$

la cual generaliza la anterior [1].

Que la suma así definida es uniforme, asociativa y conmutativa (como la adicion numerica) se puede demostrar geométricamente, pero es preferible esperar el principio básico de la Geometría Analítica, que sustituye a cada vector su medida, y aplicar entonces las leyes aritméticas.

Sin embargo, desde ahora podemos formular un resultado importante. Un conjunto se llama *grupo*[2] cuando en él es siempre posible la adición entre dos elementos cualesquiera; existe un elemento nulo, y también la sustracción es siempre posible. Por tanto: *los vectores de una recta forman grupo.* Es el grupo de las *traslaciones* sobre la recta.

---

[1] Los amantes del rigor lógico justificarán así este enunciado: La semirrecta P + (positiva de P) contiene por definición a Q, luego también a Q +; y como por hipótesis O + contiene a R, también P + contiene a R; luego P es anterior a R. Sobre el concepto de *ordenación* (*total* como es ésta, o bien *parcial*) véase el libro de REY PASTOR, *Elementos de la Teoría de Funciones.*

[2] También se llama *grupo* a todo conjunto donde es siempre posible la *multiplicación* y *división.* Tal, es, por ejemplo, el conjunto de todos los números reales, excluído el cero. Para evitar confusiones, es preciso declarar respecto de qué operación se considera el grupo. (Ejemplo: todos los números reales, incluso el cero, forman grupo *aditivo*, mientras que excluyendo el cero resulta un grupo *multiplicativo*).

3. **Escala de abscisas sobre la recta.** — a) *La escala entera*: En Aritmética suelen ilustrarse las operaciones de adición y sustracción de números enteros, representándolos por puntos de una recta o eje, a partir de un punto O, que se llama origen y representa el número *cero*; adoptando como unidad de medida un segmento arbitrario OU, el cual señala sobre el eje una semirrecta, que llamamos *positiva;* se construye en ella la escala de puntos unidistantes que designamos 1, 2, 3, ..., mientras en la semirrecta opuesta la escala de puntos unidistantes está designada por los números —1, —2, —3, ... El entero x asignado a cada punto X se llama su *abscisa*, y la sucesión de puntos unidistantes con sus abscisas respectivas se llama *escala entera.*

EJEMPLO 1. En la figura 6 se ha adoptado como *positivo*, según costumbre, el sentido de *izquierda a derecha.* Es decir: el segmento PQ es *positivo* porque P está a la izquierda de Q; también son positivos los segmentos MN, NP, OQ, ..., de la figura y negativos los inversos NM, PN, QO.

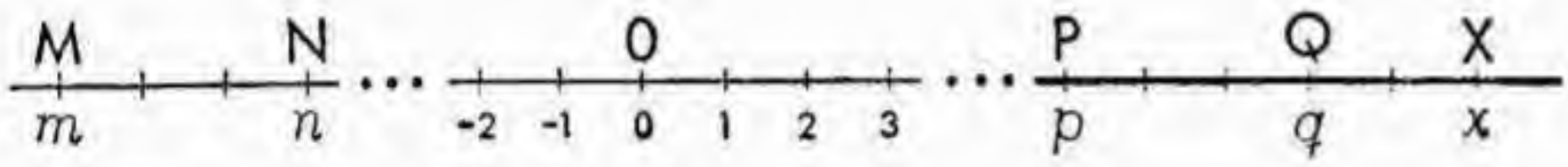

Fig. 6.

EJEMPLO 2. Enumerar todos los segmentos positivos determinados por los seis puntos denominados en la figura con letras mayúsculas. Nótese que esta denominación sigue el mismo orden que en el abecedario; por tanto son positivos los segmentos cuyos extremos están en orden alfabético.

b) *La escala racional:* Si el vector unidad OU se divide en dos iguales, es decir, se adopta como unidad su mitad, la escala de abscisas es:

$$\ldots, -\frac{n}{2}, \ldots, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\ 1, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{n}{2}$$

y análogamente se forman las escalas de amplitudes $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$, cuyos puntos tienen las abscisas $\pm\, n/m$ ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots$; $m = 1, 2, 3, \ldots$). Dos cualesquiera de estas escalas tienen puntos comunes (por ejemplo la escala natural está incluída en todas); pero se obtienen sin repetición todos los puntos de la *escala racional*, formada por los puntos de todas ellas, adoptando todas las abscisas del tipo $\pm\, n/m$, números que son fracciones *irreducibles* si tomamos n y m primos entre sí.

EJEMPLO 3. La cinta métrica usada por sastres y modistas tiene como unidad el centímetro y en algunas $\frac{1}{2}$ cm. Los primeros 10 cm. están divididos en 100 partes, es decir, en mm. En la cinta de agrimensor las abscisas 1, 2, 3, ..., expresan metros; pero están subdivididos en dm. En los aparatos de Física las escalas suelen tener 1 mm. como unidad, usando el nonio para la apreciación de sus fracciones.

c) *La escala real.* — Aunque la escala racional parece agotar los puntos de la recta, se sabe desde Pitágoras que hay puntos sin abscisa racional. En la figura 7 se han señalado dos: la diagonal del cuadrado de lado 1 y la semicircunferencia de radio 1 rectificada son segmentos *inconmensurables* con la unidad, que determinan en el eje sendos puntos sin abscisa racional. Para evitar tales excepciones se idearon símbolos, llamados *números irracionales* definidos por aproximaciones sucesivas, cuya teoría general ya conoce el lector y que en estos ejemplos son:

$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$			$3{,}1 < \pi < 3{,}2$		
1,41	„	1,42	3,14	„	3,15
1,414	„	1,415	3,141	„	3,142

4. Fundamento y esencia de la Geometría analítica. — Dejando de lado la teoría del número irracional, que puede estudiarse en la obra varias veces citada, baste señalar estos hechos capitales, que interesan para nuestro objeto:

1º) Solamente gracias a esta ampliación del campo de los números reales, queda justificado el principio de la medida enunciado en § 1-2.

2º) El fundamental Teorema 2 que expresa la medida de un vector de la recta como diferencia de abscisas, queda generalizado para todo caso. Pues la escala racional de unidad $1/n$ es una escala natural respecto del segmento unidad $OU' = OU/n$, y por tanto subsiste la expresión $q - p$. Pues si las abscisas reducidas a común denominador son

$$p = \frac{p'}{n} \qquad q = \frac{q'}{n}$$

la medida de PQ respecto de la unidad O'U' es el entero $q' - p'$, como se demostró en § 1-3, Teor. 2: luego con la unidad OU resulta $q - p$. Finalmente, por la convergencia, que sirve de fundamento a la introducción del número irracional (fig. 7), se generaliza esta fórmula para abscisas reales cualesquiera.

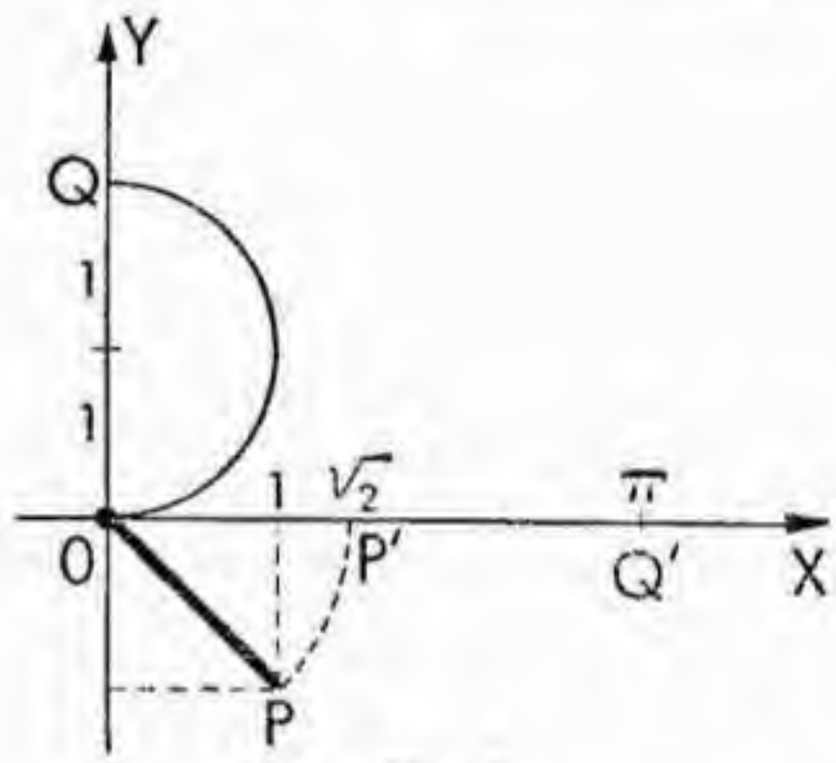

Fig. 7.

3º) Los postulados implícitos en que se ha apoyado la deducción del teorema fundamental de la medida, base de la geometría analítica, son dos:

Postulado de Arquímedes. Cualquiera que sea el segmento OQ, y la unidad OU, existe un número natural m tal que $m \,.\, OU > OQ$.

Por esta razón hemos admitido en § 1-2 la acotación $mU \leqslant AB < (m+1)\,U$ para todo segmento AB, es decir, la *finitud* de los segmentos de la recta (no de la recta entera) quedando así excluído de estas magnitudes lineales el *infinito actual.*

Admitida esta acotación de Arquímedes, se van determinando aproximaciones numéricas sucesivas, es decir, dos sucesiones monótonas convergentes, que definen un número real, medida del segmento. Falta ahora el problema inverso: dado un número real cualquiera, ¿existe en la recta un punto que tenga esta abscisa? Así acontece si se admite, como hizo el propio Pitágoras, rectificando su primitiva teoría, el *Postulado de continuidad de la recta.* Toda sucesión de segmentos, cada uno contenido en el anterior, tiene al menos un punto común a todos.

Es claro que si los segmentos convergen hacia cero, como acontece en las aproximaciones racionales de un número irracional, el punto común a todos los segmentos es único, y éste es precisamente el que corresponde al número real dado, que es su abscisa. La correspondencia biunívoca entre puntos y abscisas, fundamento de la geometría analítica, resulta, así, como sencilla consecuencia de los dos postulados: y al mismo tiempo se deduce la ordenación de la correspondencia y su continuidad en ambos sentidos.

NOTA. Suele destacarse como propiedad esencial de la correspondencia cartesiana entre puntos y números su carácter *biunívoco;* pero desde que Cantor demostró la posibilidad de establecer correspondencias biunívocas entre segmentos, rectas, y dominios de cualquier número de dimensiones, se ha visto que el significado de tales coordinaciones es me-

ramente de aritmética cardinal y carece de valor geométrico; mayor valor que esta correspondencia aritmética tiene la *ordenación*, que sumada a la biunivocidad, implica la *bicontinuidad*: y ambas conjuntamente constituyen la relación importantísima llamada *homeomorfismo*: en ella reside el paralelismo entre Álgebra y Geometría realizado por Descartes. Finalmente, desde el punto de vista algebraico, la conservación de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, que se expresa con la palabra *isomorfismo*, carecería de trascendencia si no fuera por esta concordancia en que reside la íntima fusión realizada por la sencilla idea cartesiana: el isomorfismo coincide con el homeomorfismo.

§ 5. Notas y complementos al Capítulo I

1. **Precursores de la Geometría Analítica.** La idea esencial de la Geometría Analítica no es la representación de los puntos de un espacio mediante conjuntos de números, llamados coordenadas; idea muy antigua, que no resultó fecunda; sino la representación de los lugares geométricos por ecuaciones y el estudio de las figuras susceptibles de tal expresión mediante el algoritmo algebraico, que permite establecer una clasificación según sea el grado *total* de la ecuación (número invariante al cambiar de ejes) creando así innumerables categorías de curvas y superficies, antes insospechadas, con propiedades interesantes para otros capítulos de la Matemática.

Los antiguos egipcios referían los puntos a dos ejes perpendiculares, para la medición de parcelas y la construcción de templos y pirámides. Muy posteriormente, Arquímedes utilizó coordenadas, en el siglo —III, y Apolonio dió una expresión métrica característica de cada cónica, que no es sino su ecuación. La Geografía de Ptolomeo escrita hacia el siglo II es en esencia una tabla de longitudes y latitudes de muchos puntos del mundo conocido, a las que hoy llamamos "coordenadas geográficas".

Otros muchos ejemplos pueden darse; basta aludir a la costumbre observada en ciertos pueblos vascos que señalan (ignórase desde qué época) las bocas de riego de la calle, inscribiendo en la pared más cercana dos números, que son sus coordenadas, para poder encontrarlas con urgencia en tiempo de nieve. Finalmente, los conquistadores españoles nos revelaron en su trazado de ciudades, cuán arraigada estaba en las mentes esa idea, que no había de fructificar hasta el siglo XVII.

La Geometría Analítica no podía nacer hasta que la incipiente Álgebra edificase un algoritmo general; pero logrado esto por Vieta a fines del siglo XVI, el nuevo instrumento permite a Fermat y Descartes el descubrimiento de este nuevo mundo. Y como tantas veces acontece, los dos llegaron por el mismo tiempo, con independencia, porque ya era fatal, para hombres de su categoría; mientras que otros muchos matemáticos que trabajaron en este campo de las relaciones del Álgebra con la Geometría (Schooten, Sluse Girard, Ghetaldi, ...) posteriores a Vieta, no atisbaron el gran tesoro que yacía bajo sus pies.

2. **Creadores de la Geometría Analítica.** Ateniéndonos exclusivamente a los documentos escritos, para huir de las conjeturas, las ideas de Fermat aparecen claramente en su carta a Roberval de 1636; las de Descartes aparecen impresas en su famosa *Geometría*, publicada en Leyden en 1637, como tercer apéndice de su "Discours de la methode", claro indicio del escaso interés que dedicaba a la Matemática pura; disciplina "muy abstracta, que no parece tener ningún uso", en cuyos problemas "acostumbran a entretenerse geómetras y calculadores ociosos".

De la Geometría y el Álgebra dice: "La primera está siempre tan ligada a consideraciones sobre las figuras, que no pueden ejercitar el intelecto, sin cansar mucho la imaginación, y en la otra se está tan sujeto

a ciertas reglas y ciertas letras, que en lugar de ser una ciencia que eduque la mente, se convierte en un arte oscuro y confuso que la turba". Tras este análisis despectivo, se propone (y lo consigue) de la manera más brillante, "tomar lo mejor del Análisis Geométrico y del Álgebra, corrigiendo los defectos del uno por el otro".

Esta síntesis feliz, esta "Matemática universal" se propone "todo aquello que pueda preguntarse acerca del orden y de la medida; no importando que las medidas deban buscarse en números, figuras, astros, sonidos o cualquier otro objeto". Tal es, en efecto, la pauta seguida desde aquella memorable fecha por la Matemática así unificada.

La diversa finalidad de la nueva Geometría —metódica para Descartes, técnica para Fermat— explica su diverso desarrollo. El primero se limita a tomar segmentos paralelos sobre un eje (son las "lineae ordinatae" de los agrimensores romanos) y ni siquiera da la ecuación de la línea recta; en cambio Fermat introduce dos ejes, y desarrolla sistemáticamente la teoría de la recta y de las cónicas. Esta obra famosa "Ad locos planos et solidos isagoge", de fecha de publicación desconocida, parece posterior a la Geometría de Descartes: pero es seguro que las ideas de ambos autores datan de fecha muy anterior al 1636, que es la "fecha cierta" de la nueva ciencia.

El calificativo "analítica" procede de la "Analytica" con que Aristóteles designó la Lógica, y de él se deriva el nombre actual "Análisis matemático" dado al Álgebra, ampliada con el Cálculo infinitesimal. El nombre "coordenadas" de vieja raigambre, como ya queda dicho, fué introducido por Leibniz en 1692.

Estos iniciadores descuidaron la innovación esencial del *sentido* o signo de las magnitudes geométricas, indispensable para lograr el perfecto paralelismo con el Álgebra. La adjudicación del signo $\pm$ a segmentos, ángulos y recintos, acorde con su medida (puesto que la idea de los números negativos, procedente de la India, fué ya introducida en Europa por Leonardo de Pisa desde 1202), es muy tardía y parece debida al alemán Möbius, que la introdujo en su fundamental obra "Der barycentrische Calcül" el año 1827. La igualdad, § 1, [3], tomada de ella, con otras ideas, por Chasles en "Aperçu historique" publicado en 1837, suele llevar el nombre de este recopilador.

Figura descollante en la historia de la Geometría Analítica es el alemán Plücker, que en 1832 amplió su horizonte, considerando como *elementos* del espacio rectas o planos, en lugar de puntos, e introdujo el cómodo uso de anotaciones abreviadas para las ecuaciones, como hemos hecho en el Cap. II.

3. **Los espacios fundamentales.** La idea de Plücker fué sistematizada por Steiner en 1832, clasificando así las formas fundamentales, es decir los tipos de *espacios* que estudia la Geometría, sea analítica o sintética:

I. — *Espacios de una dimensión*: a) Serie de puntos; b) Haz plano de rectas; c) Haz de planos.

II. — *Espacios de dos dimensiones*: a) Plano punteado; b) Plano reglado; c) Radiación de rectas; d) Radiación de planos.

III. — *Espacios de tres dimensiones*: a) Espacio punteado; b) Espacio de planos.

Esta clasificación ha dado la pauta para la composición del presente libro; y debe agregarse al incompleto esquema de Steiner el *espacio reglado*, según Plücker, cuyos elementos son las rectas del espacio intuitivo, que es tridimensional considerado como lugar de puntos, pero *cuadridimensional* como lugar de rectas. (V. Cap. X, § 46-2).

Los autores italianos suelen llamar a los espacios I, II, III, "formas de 1ª, 2ª, 3ª especies"; los españoles, siguiendo a Torroja, que tradujo la nomenclatura de Staudt, las llaman "formas de 1ª, 2ª, 3ª categorías". Preferimos usar la palabra "espacio" ya universal en toda la Matemática, prefiriendo a las inexpresivas palabras (especie, categoría) la de-

nominación del *número de dimensiones*, es decir *número de coordenadas* necesarias para determinar cada elemento.

4. **Geometría Métrica y Geometría Analítica.** Conviene destacar la diferencia esencial entre la Geometría Métrica, que compone los libros V y VI de Euclides, bien conocida desde la enseñanza elemental, y la Geometría Analítica.

La Geometría Métrica tiene todas las ventajas de la geometría griega (visualidad, carácter intrínseco, ingeniosidad) y también sus inconvenientes (falta de generalidad y ausencia de métodos).

La Geometría Analítica, por el contrario, es metódica y sistemática, y al sustituir cada figura por cifras y ecuaciones sometidas a las reglas del Álgebra, mecaniza el razonamiento ahorrando artificios e ingeniosidades, poniendo la investigación geométrica al alcance de todos.

No sin razón se ha parangonado la invención de esta geometría mecánica, con la revolución industrial operada en el mundo por la máquina de vapor. Es claro que al democratizar así la Geometría, antes patrimonio de unos pocos, ésta pierde el encanto de la agudeza y de la sutil elegancia; pero también dentro de la Geometría Analítica tiene cabida el artificio ingenioso y el cálculo breve y elegante, que contrasta con el tedioso formulismo, lento y ciego, en que incurren quienes aprenden el mecanismo metódico, sin captar su esencia y su espíritu.

CAPÍTULO II

GEOMETRÍA DEL PLANO. PUNTOS, RECTAS Y VECTORES

§ 6. COORDENADAS CARTESIANAS Y ECUACIONES ALGEBRAICAS

1. **Sistema de coordenadas cartesianas.** — Así como cada punto de la recta orientada está determinado por su abscisa respecto de un origen O y un vector unitario U, cabe determinar cada punto del plano por un par de números reales x, y, llamadas sus *coordenadas*, si se adopta como sistema de referencia dos vectores cualesquiera U y V, del mismo origen, pero no alineados; es decir: dos ejes X e Y del mismo origen.

DEF. 1. Se llama *sistema de coordenadas cartesianas* en el plano a todo par de ejes de abscisas, X e Y, de origen común O y vectores unitarios cualesquiera U y V.

Coordenadas cartesianas (x, y) de cada punto P (fig. 8) del plano son las abscisas de las dos proyecciones de P, sobre cada eje, paralelamente al otro. La abscisa de la proyección sobre X, paralelamente a Y se llama *abscisa* del punto P y se representa por x; la abscisa de la proyección sobre Y, paralelamente al eje X, se llama *ordenada* del punto P y se designa por y.

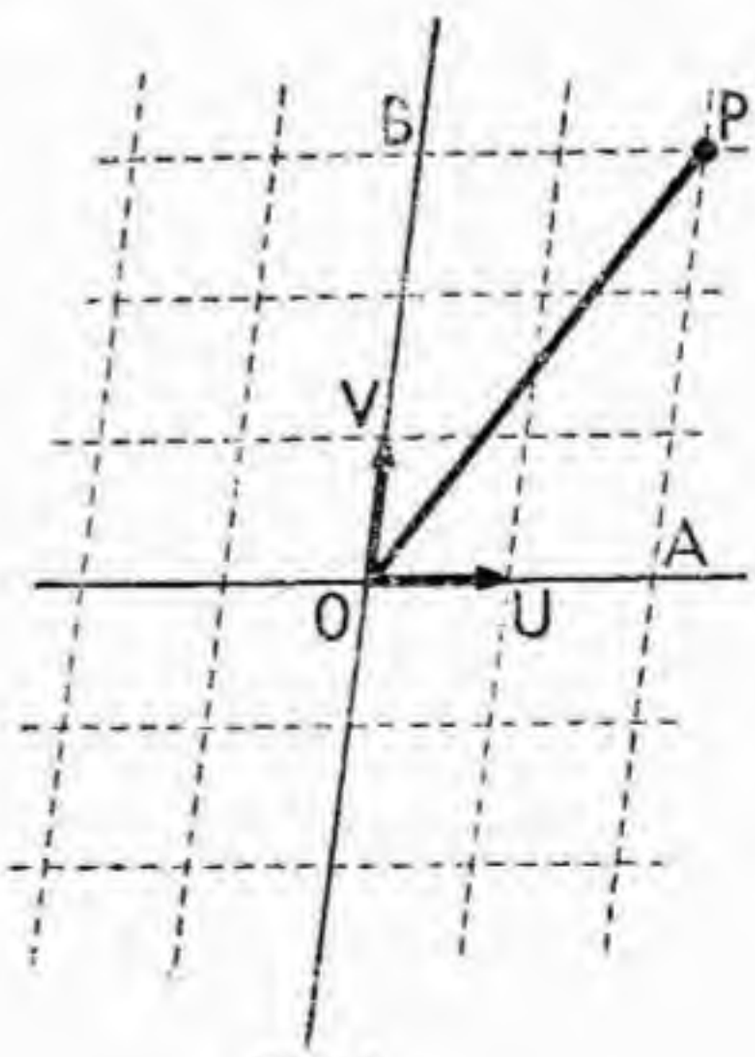

Fig. 8.

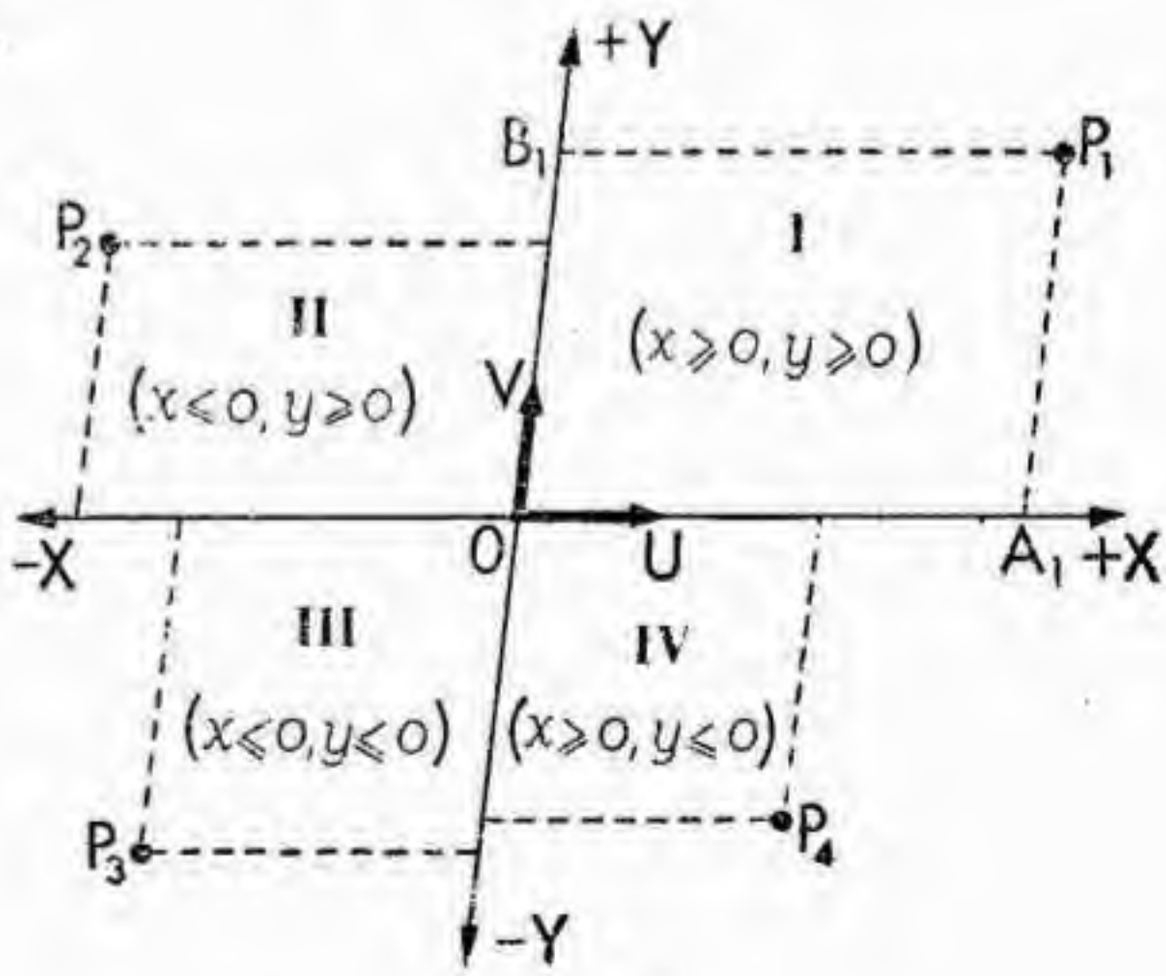

Fig. 9.

Recíprocamente, dados dos números reales cualesquiera x e y, representan un punto en cada eje, según se ha visto en Cap. I, y las paralelas trazadas por ellos a los ejes, se cortan en un punto P. El plano queda engendrado así por dos haces de rectas paralelas al eje Y o al X respectivamente.

Por ser biunívoca, como ya se vió, la correspondencia entre los números reales y los puntos de cada eje, resulta esta propiedad capital, que distingue a las coordenadas cartesianas de otros sistemas.

Cada punto del plano tiene dos coordenadas (x, y), *y a cada par de coordenadas corresponde un punto y sólo uno.* Tal correspondencia entre los puntos del plano y los pares de números reales, se llama *biunívoca.*

Los ejes X e Y dividen al plano en cuatro ángulos o *cuadrantes* caracterizados por los signos de las coordenadas, como se ve en la figura 9.

NOTA. Las coordenadas arriba definidas difieren algo de las introducidas por Descartes, y corresponden más bien a las definidas por Fermat. En su *Géometrie* usa Descartes para determinar cada punto, su distancia a un eje, medida en dirección prefijada (oblicua o normal) y el segmento que la proyección determina con un punto fijado en ese eje.

Es éste el método que suele seguirse en la práctica, muy especialmente usando direcciones perpendiculares, y omitiendo el origen cuando queda lejano de la figura representada. Así, para representar la variación de una magnitud en el tiempo (por ej., producción anual de carbón) la gráfica cartesiana es una cierta curva. El papel cuadriculado ahorra el trazado de rectas paralelas. Los dos ejes son innecesarios.

2. **Ecuaciones y lugares geométricos.** — Hemos demostrado en Cap. I la biunivocidad de la correspondencia entre los puntos del plano y las coordenadas cartesianas, propiedad que no tienen otros sistemas coordenados [1], que oportunamente introduciremos. Dar un par de números es, por tanto, fijar un punto en el plano. ¿Qué significado geométrico tendría una ecuación $f(x, y) = 0$, donde $f(x, y)$ es un polinomio? Analicemos los tipos más sencillos:

a) *Ejes coordenados.* La ecuación $y = 0$ impone al punto (x, y) la condición de tener nula la y, pudiendo ser cualquiera la x; es decir, satisfacen esa condición todos los puntos del eje x; *ellos y sólo ellos.* Diremos, entonces, que este conjunto o *lugar geométrico tiene la ecuación* $y = 0$.

Recuérdese que se llama *lugar geométrico* al *conjunto* de todos los elementos que cumplan una o varias condiciones prefijadas; es decir, pertenecen al lugar "*todos* los elementos que cumplen tales condiciones y *sólo* ellos".

[1] Ejemplos: Polares del plano, esféricas y cilíndricas del espacio; proyectivas (absolutas), plückerianas (absolutas) del plano y del espacio.

Análogamente, la condición $x = 0$ caracteriza a los puntos del eje Y; pues *todos* ellos y *sólo* ellos tienen nula la coordenada x. Tenemos, en suma, las dos ecuaciones más sencillas y su significación geométrica:

[1] $y = 0$, ecuación del eje X; $x = 0$, ecuación del eje Y.

b) *Rectas paralelas a los ejes.* Si los puntos A′, B′ tienen igual abscisa c, cualesquiera que sean sus ordenadas, es decir, si se deducen de dos puntos cualesquiera A, B del eje Y por dos vectores iguales AA′ = BB′, el cuadrilátero AA′B′B que tiene dos lados opuestos iguales y paralelos, es un paralelogramo[1]; luego la recta A′B′ es paralela a la AB; es decir al *eje* Y; también lo es la B′C′ si es CC′ = c; luego, por el postulado de Euclides, los tres puntos A′B′C′ (y todos los de abscisa $x = c$) están en una recta paralela al eje Y.

Recíprocamente: si A′B′ || AB, como los segmentos de paralelas interceptadas entre paralelas son iguales y de igual sentido, los puntos A′ y B′ tienen igual abscisa, y también por tanto todos los de dicha paralela.

Cumplidas así las dos condiciones del lugar geométrico, llegamos a los dos tipos de ecuaciones, que comprenden a las [1] como casos particulares, si convenimos en considerar cada recta como paralela a sí misma:

[2] $x = \text{const}$; representa una recta paralela al eje Y;
$y = \text{const}$; representa una recta paralela al eje X.

c) *Bisectrices de los ejes.* Por igualdad de triángulos demuéstrese que sus ecuaciones son:

[3] $y = x$, bisectriz de cuadrantes I y III;
$y = -x$, bisectriz de cuadrantes II y IV.

d) *Ecuaciones de primer grado.* Veremos en el próximo § 8 que toda recta está expresada por una ecuación de primer *grado total* respecto de x e y, es decir, del tipo $ax + by + c = 0$, mientras que la ecuación de primer grado respecto de *cada* variable x, y, es decir, del tipo $axy + bx + cy + d = 0$ representa una curva llamada *hipérbola*, como veremos en Cap. IV; esta ecuación de grado *total* 2, lo mismo que las que contienen términos x^2 e y^2, se llaman de 2º grado.

e) *Ecuaciones algebraicas en general.* La Geometría analítica estudia las ecuaciones algebraicas, es decir, del tipo P = 0, siendo P un polinomio de cualquier grado. En Geometría plana tales ecuaciones algebraicas son del tipo $P(x, y) = 0$, y en el espacio tridimensional $P(x, y, z) = 0$.

Tales ecuaciones, con más de una incógnita, se llaman *in-*

[1] Véase cualquier texto de Geometría elemental. Por ejemplo: *Biblioteca Didáctica de Matemáticas elementales de Rey Pastor - Geometría II.*

determinadas en Álgebra, porque admiten infinitas soluciones, reales o imaginarias; y son precisamente estas ecuaciones *indeterminadas* las que estudia la geometría analítica. Son éstas y sólo éstas; pues toda ecuación $P(x) = 0$ con una sola incógnita x (por ejemplo $x^2 - x = 0$, que tiene solamente dos soluciones $x = 0$, $x = 1$), la cual representaría en el espacio E_1 un número *finito* de puntos, en cambio es indeterminada en E_2, es decir, en el plano; pues al no figurar la y, ésta puede recibir valores arbitrarios. En el ejemplo $x^2 - x = 0$, las soluciones son:

$x = 0$, y arbitrario (eje Y);
$x = 1$, y arbitrario (paralela al eje Y).

3. **Ecuaciones reducibles e irreducibles.** — La ecuación del ejemplo anterior se llama *reducible* porque el polinomio es producto de dos; y toda ecuación algebraica de una variable es reducible; pues por el teorema fundamental de Álgebra[1] todo polinomio $P(x) = 0$ de grado n se descompone en n factores $(x - x_1)$, $(x - x_2)$, ..., $(x - x_n)$, reales o imaginarios, distintos o confundidos; luego la ecuación $P(x) = 0$ representa en el plano las rectas paralelas al eje Y:

$$x = x_1, \; x = x_2, \; \ldots, \; x = x_n.$$

Es claro que *a lo sumo* habrá n rectas; pero convencionalmente, diremos que los pares (x_i, y) de abscisa imaginaria fija y ordenada arbitraria representan una "recta imaginaria paralela al eje Y"; y si además convenimos en contar cada raíz de la ecuación tantas veces como indique su orden de multiplicidad, logramos un enunciado sencillo y general:

Si $P(x)$, $P(y)$, *son polinomios de grado* n, *la ecuación* $P(x) = 0$ *representa* n *rectas paralelas al eje Y; y la* $P(y) = 0$ *representa* n *rectas paralelas al eje X; rectas que pueden ser reales o imaginarias, distintas o confundidas.*

Pasando ahora al caso general, más importante, la ecuación algebraica $P(x, y) = 0$ se llama *reducible*, cuando el polinomio P es producto de dos polinomios, que a su vez pueden ser o no reducibles. Es decir: $P(x, y) = P_1(x, y) \cdot P_2(x, y)$; y como un producto es nulo sólo cuando se anula alguno de los factores, resulta:

El lugar geométrico que representa la ecuación $P(x, y) = 0$ *se compone de los lugares representados por las ecuaciones* $P_1(x, y) = 0$, $P_2(x, y) = 0$.

La novedad importantísima es la existencia de ecuaciones irreducibles cuando hay más de una variable (v. Nota 1).

---

[1] Véase, por ej., REY PASTOR, PI CALLEJA, TREJO, *Análisis Matemático*, Vol. 1, Editorial Kapelusz, Bs. As., 1952, pág. 239.

Dejando un estudio más amplio para capítulos posteriores, analice el lector, como ejercicio, los ejemplos siguientes de ecuaciones reducibles, dibujando las gráficas respectivas (fig. 10):

$xy = 0$ ejes coordenados).
$x^2 = y^2$ (bisectrices $x + y = 0$, $x - y = 0$).
$x^2 + xy = 0$ (rectas $x = 0$, $x + y = 0$).

Ejercicios: Demostrar que son irreducibles las ecuaciones:

1) $y = ax^2$;
2) $xy = a$;
3) $x^2 + y^2 = a$;
4) $x^2 - y^2 = a$;
5) $xy + ax + by = c$.

¿Qué valor debe tener c para que esta ecuación sea reducible? Efectúese la descomposición en dos factores.

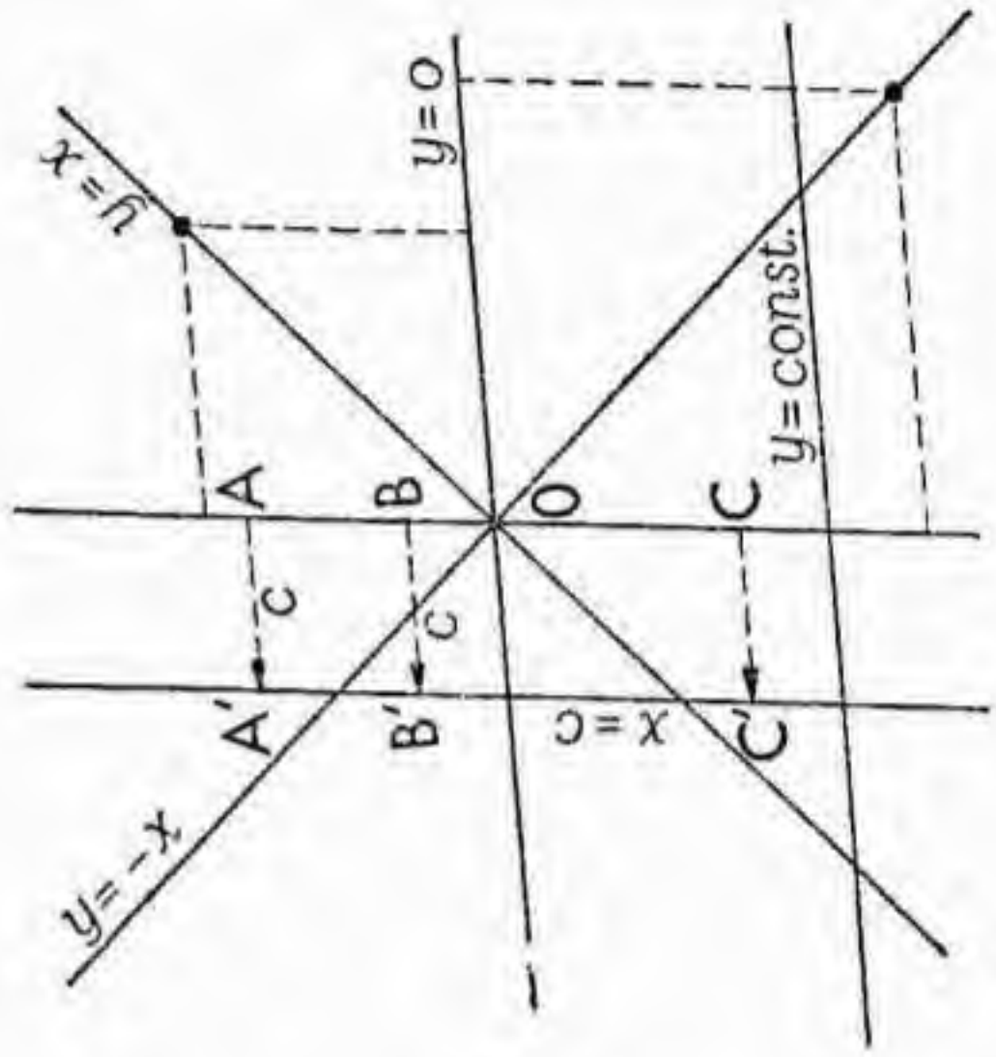

Fig. 10.

NOTAS: 1. El hecho de existir ecuaciones de dos o más variables que son *irreducibles* (mientras que todas las de una variable se descomponen en factores de primer grado), es el fundamento de la geometría analítica del espacio E_2 y del E_3; pues permite expresar importantes tipos de *curvas* y *superficies* por una sola ecuación. Si el teorema fundamental del Álgebra hubiera conservado validez para más de una variable, descomponiéndose todo polinomio en factores lineales, la geometría analítica no habría pasado de las rectas y planos.

2. Los autores suelen considerar solamente los lugares definidos por ecuaciones (ahora veremos que también interesan las inecuaciones) y suelen llamar *curva*, con excesiva amplitud, al lugar definido por una ecuación $f(x, y) = 0$.

En el campo real es preciso imponer serias restricciones a la función, y el lector debe esperar los recursos del Cálculo diferencial, donde tampoco se llega a solución completa. En cambio es satisfactoria, en el campo complejo, la teoría de las curvas algebraicas definidas por polinomios.

EJEMPLOS: La ecuación $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 0$, solamente se satisface por el punto $x = 1$, $y = 2$; y la ecuación $(x-1)^2 + (y-2)^2 + 1 = 0$ no admite ningún punto.

Veremos, sin embargo, más adelante (Cap. III) que es legítimo usar la palabra *curva* una vez introducidos "puntos imaginarios" cualquiera que sea la ecuación $P(x, y) = 0$; bien entendido que las *rectas* quedan incluídas entre las *curvas*, que mejor sería llamar *líneas* algebraicas.

4. Inecuaciones y lugares bidimensionales. — Ya hemos advertido, que si bien los textos usuales prescinden de ellos[1] también hay lugares

[1] Con excepción meritoria, fueron estudiados ampliamente por el malogrado V. Fraile en 1940. (*Revista de la Unión Matemática Argentina*).

geométricos que llamaremos *bidimensionales*, definidos por inecuaciones.

Veamos los ejemplos más sencillos:

a) Semieje $+X$; expresión $x \geqslant 0$, $y = 0$
" $-X$ " $x \leqslant 0$, $y = 0$
" $+Y$ " $x = 0$, $y \geqslant 0$
" $-Y$ " $x = 0$, $y \leqslant 0$

b) Semiplano $x \geqslant 0$ (cuadrantes I + IV)
" $x \leqslant 0$ (" II + III)
" $y \geqslant 0$ (" I + II)
" $y \leqslant 0$ (" III + IV)

c) Cuadrante I ; expresión $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$
Análogamente los II, III, IV.

d) Dibújense los semiplanos de inecuaciones:

$$y \geqslant x \ , \quad y \leqslant x \ , \quad y \geqslant -x \ , \quad y \leqslant -x$$

NOTA 1. Aunque la exigüidad de los conocimientos expuestos hasta aquí nos impide mayores esclarecimientos, conviene decir algo más sobre las inecuaciones, cuyo uso es frecuente en diversas teorías matemáticas, y que son omitidas en los textos de geometría analítica.

Si la ecuación $f(x, y) = 0$ representa una curva que divide al plano en dos regiones, cada una de éstas está representada por una inecuación: $f(x, y) > 0$, $f(x, y) < 0$. En efecto, no siendo nula $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0), si es $f(x_0, y_0) > 0$, en todo punto de la misma región o recinto es también $f(x, y) > 0$: pues si fuera $f(x_1, y_1) < 0$, uniendo ambos puntos por un segmento o quebrada de segmentos, situada dentro de la misma región, al pasar de P_0 a P_1 recorriendo esa línea, debería ser $f(x, y) = 0$ en algún punto intermedio de la misma, por el teorema de Bolzano (Elementos de la Teoría de funciones, § 8). El plano queda, pues, dividido en dos recintos y una curva, representados así:

$$f(x, y) > 0, \qquad f(x, y) < 0, \qquad f(x, y) = 0$$

Ejemplos sencillos son los semiplanos considerados en este parágrafo. Repáselos el lector, escribiendo cuál es la inecuación de cada uno; y aunque sea anticipando algunos conocimientos de capítulos posteriores (ya sabidos del Bachillerato), escríbanse las inecuaciones de los semiplanos que contienen el origen, definidos por las rectas $x - y = 1$, $2x + 3y - 5 = 0$.

Cuando el lector haya estudiado las primeras líneas del Cap. III que trata de la circunferencia, verá que la ecuación de la circunferencia de centro O y radio r, en coordenadas cartesianas ortogonales, es $x^2 + y^2 = r^2$. Escríbase la inecuación que representa el círculo y la que define el recinto exterior.

NOTA 2. Hemos definido el *lugar geométrico* como formado por "*todos* los elementos geométricos que cumplen ciertas condiciones y sólo ellos".

La palabra *conjunto* está caracterizada también por esta misma frase entre comillas; pero sus elementos pueden ser entes matemáticos cualesquiera, y por ello es concepto más general. Todo *lugar* es un *conjunto*; pero hay conjuntos que no son lugares; tales por ejemplo: el conjunto de los números pares, el conjunto de los cuadrados perfectos mayores que 100, el conjunto de los números complejos, etc.

La teoría general de los conjuntos, debida a Jorge Cantor, es basica del moderno Análisis matemático.

EJERCICIOS

1. — Ordenar por cuadrantes los puntos cuyas coordenadas cartesianas son:

A) $(-1, \frac{3}{4})$; B) $(0, \frac{1}{2})$; C) $(-\frac{1}{4}, 0{,}05)$;
D) $(12, -1, 5)$; E) $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$.

2. — Representación gráfica de las ecuaciones:

a) $x^2 = xy$; b) $x^2 - xy = 0$; c) $x^2 - xy = x$;
d) $2x^3 = x^2 + x$; e) $y^2 - 4y = 0$; f) $xy^2 - xy = 0$.

3. — Representación geométrica de las inecuaciones:

a) $x^2 - x > 0$; b) $y^2 - xy < 0$; c) $xy < x^2 - x$.

4. — Demostrar que son irreducibles las ecuaciones:

a) $x^2 - ax + y^2 = 1$; b) $xy + ax + by + c = 0$,

a no ser que a, b, c, cumplan cierta condición.

§ 7. VECTORES EN EL PLANO Y CAMBIO DE COORDENADAS CARTESIANAS

1. Vectores en el plano. — DEFINICIÓN 1. Los segmentos de extremos ordenados que tienen igual longitud, dirección y sentido, se llaman *vectores libres* iguales, y uno cualquiera de ellos (por ejemplo el OP de origen O), se puede tomar como representante de la familia.

Los vectores pertenecientes a la misma recta han sido estudiados en (§ 1); si son distintas las rectas a que pertenecen los vectores AB y CD, *es condición necesaria y suficiente para la igualdad* AB = CD *que el cuadrilátero* ABCD *sea paralelogramo.*

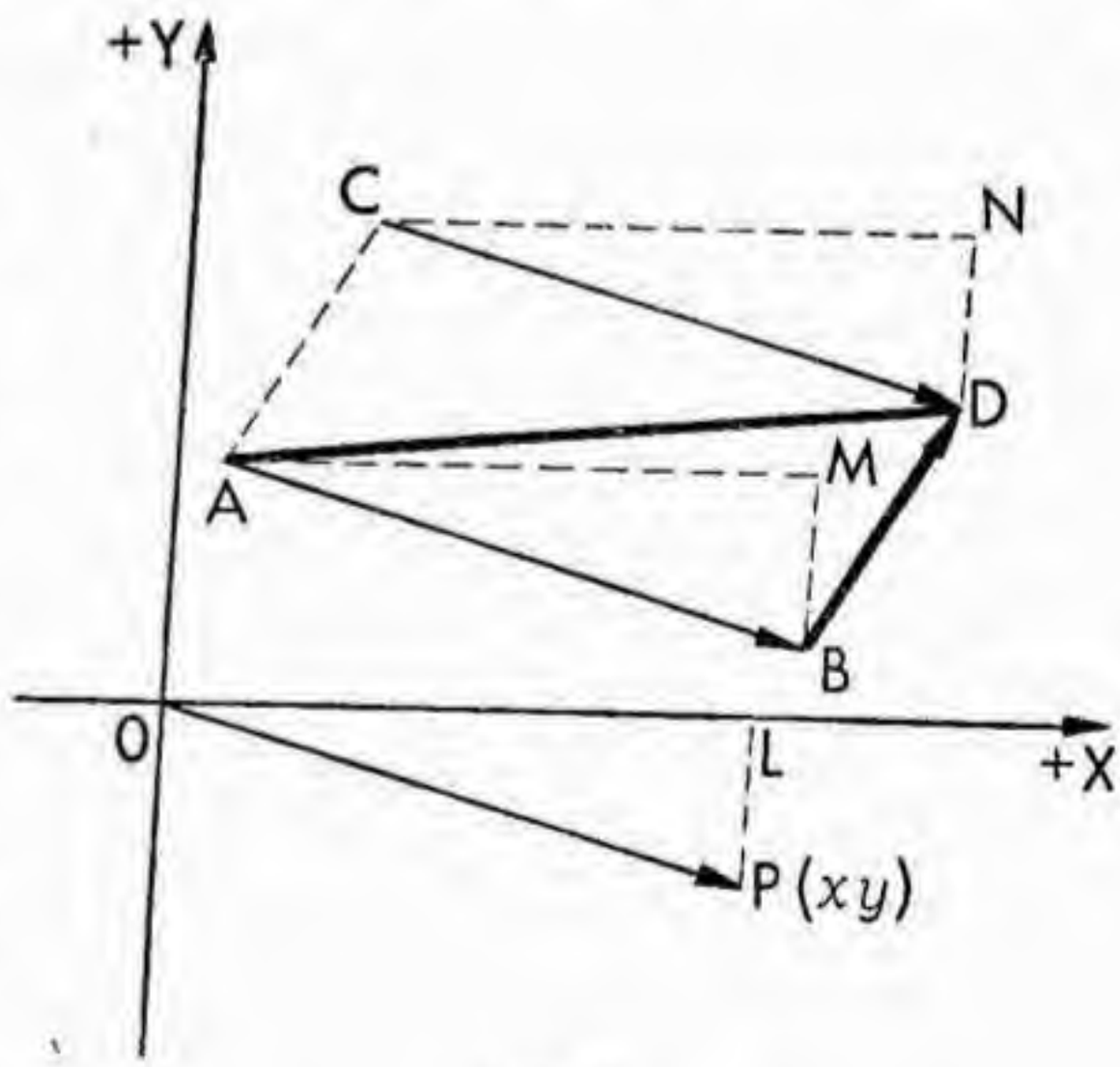

Fig. 11.

DEF. 2. Dados dos vectores AB y BD (fig. 11), tales que el extremo B del primero es origen del segundo (vectores llamados contiguos), se llama *suma* al vector AD, cuyo origen es el del primero, y su extremo el del segundo.

Se escribe AB + BD = AD, y los dos sumandos se llaman componentes del vector suma.

Especial interés tiene la descomposición de todo vector en sus componentes paralelas a los ejes coordenados. Si son x, y,

las coordenadas del punto P, éstas, según la Def. (§ 6-1), fig. 8, son las medidas de los vectores OA, y OB en que OP se descompone en la dirección de los ejes, descomposición que es única. Resulta, pues: *componentes iguales sobre los ejes dan el mismo vector* OP.

Consideremos ahora, en general, dos vectores AB = CD, ..., iguales al OP de origen O. Trazando por el origen A la paralela al eje X, y por B la paralela al eje Y, como indica la figura, se forma un triángulo ABM igual al OPL, por tener iguales los lados AB = OP, y los lados respectivamente paralelos; luego son iguales las componentes AM = OL y MB = LP. Lo mismo puede decirse para CD y sus componentes CN y ND. Resumen: *vectores iguales tienen componentes iguales respecto de direcciones iguales.*

Recíprocamente, de las igualdades AM = OL y MB = LP resulta AB = OP. Es decir, por el primer teorema de igualdad de triángulos, *componentes iguales dan vectores iguales.*

2. Sumas generales de vectores y sus proyecciones. — La definición de suma de vectores contiguos que hemos dado (Def. 2), se caracteriza así (fig. 12).

Si los vectores W_1 y W_2 no son contiguos, se parte de un origen cualquiera A_0, y se transporta $A_0A_1 = W_1$; a partir

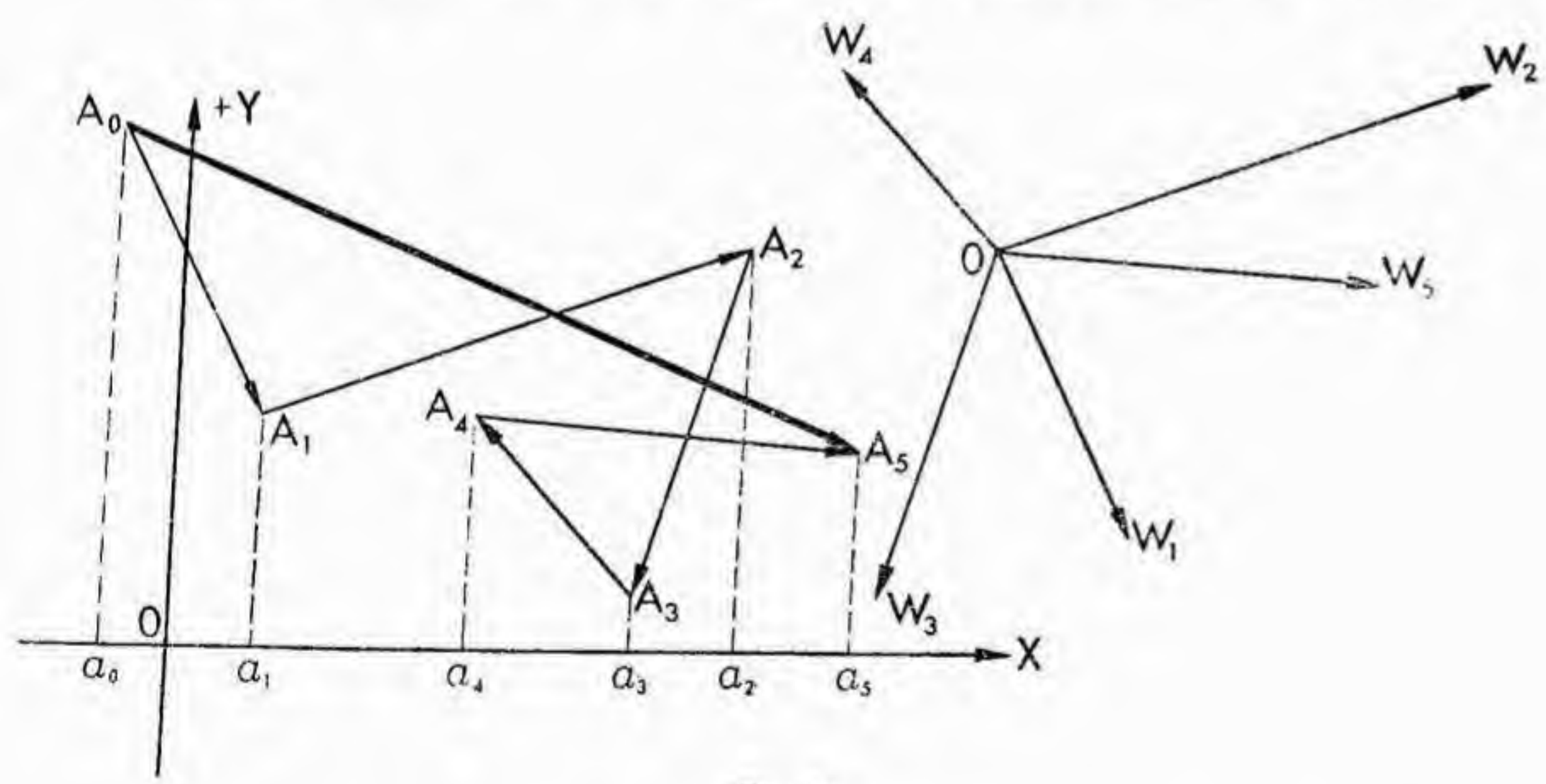

Fig. 12.

de A_1 se lleva $A_1A_2 = W_2$, y si hay más sumandos se prosigue con $A_2A_3 = W_3$, ..., si el último es $A_{n-1}A_n = W_n$, la suma es $W = A_0A_n$, cuyo origen es el del primero y su extremo el del último. Escribiremos

[1] $$W = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$$

Proyectando la poligonal $A_0 A_1 \ldots A_n$ sobre una recta r, si son $a_0 a_1, \ldots, a_n$, las abscisas de las proyecciones de los vértices $A'_0 A'_1, \ldots, A'_n$, se verifica según § 4-2,

[2] $$A'_0 A'_n = A'_0 A'_1 + A'_1 A'_2 + \ldots A'_{n-1} A'_n$$

y por teor. (§ 1-2) la medida de $A'_0 A'_n$ es

[3] $$\text{med. } A'_0 A'_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0$$

La igualdad genérica [2] se expresa:

La proyección de la suma de vectores sobre un eje es la suma de las proyecciones de los vectores sumandos. O bien: *la componente sobre un eje, de la suma de vectores, es la suma de las componentes de éstos.*

La igualdad aritmética [3] puede enunciarse así: *cada coordenada de un vector suma de varios, es la suma de las coordenadas de éstos, respecto del mismo eje.*

Las propiedades *uniforme, asociativa* y *conmutativa* de la suma de los números reales se verifica, por tanto, en la suma de vectores, lo cual puede realizarse en orden arbitrario, con resultado único.

En lugar de considerar el plano puntual (lugar de puntos P) es ventajoso estudiar el plano vectorial, conjunto de todos los vectores OP de origen O y extremo variable P. Si las coordenadas de P son (x, y), las proyecciones de OP son dos vectores OX y OY llamados *componentes* de OP, porque se verifica la suma o composición

[4] $$OP = OX + OY = xU + yV$$

Las componentes $OX = xU$, $OY = yV$ son, pues, *vectores*, mientras que las coordenadas x, y del punto P, o del vector OP son *números* reales, cuyos signos indican los semiejes en que están X e Y.

Poligonal cerrada. Es obvio que en este caso, siendo coincidentes los vértices A_n y A_0, resulta

[5] $$A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n = 0$$

es decir: *cada vector es opuesto a la suma de los demás.* Tal sucede, por ejemplo, con la fuerza opuesta a la resultante de otras dos.

La figura del paralelogramo de fuerzas (según Stevin) equivale a la figura del triángulo.

3. **Cambio de ejes coordenados.** — Distinguiremos primero dos casos particulares y luego el caso general.

1. *Traslación de ejes.* Si los ejes XY se trasladan paralelamente hasta el nuevo origen $O'(a, b)$ los vectores OP y O'P (fig. 13) están ligados por la relación

[6] $$OP = OO' + O'P$$

luego sus proyecciones sobre los ejes XY dan estas relaciones:

[7] $x = x' + a \qquad y = y' + b$

[8] $x' = x - a \qquad y' = y - b$

Estas fórmulas [8] dan las nuevas coordenadas, conocidas las antiguas. En cambio, dada una ecuación $f(x, y) = 0$, referida a los ejes antiguos, deberán sustituirse x e y por las expresiones [7] para obtener la nueva ecuación en las nuevas coordenadas.

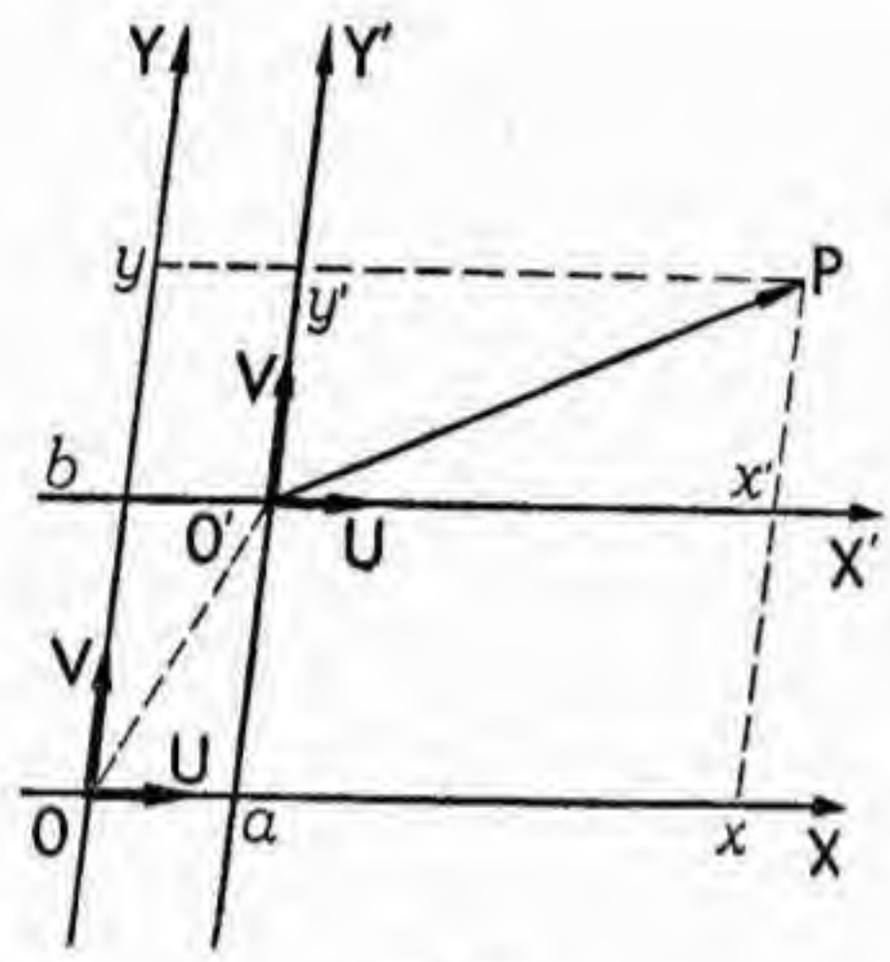

Fig. 13.

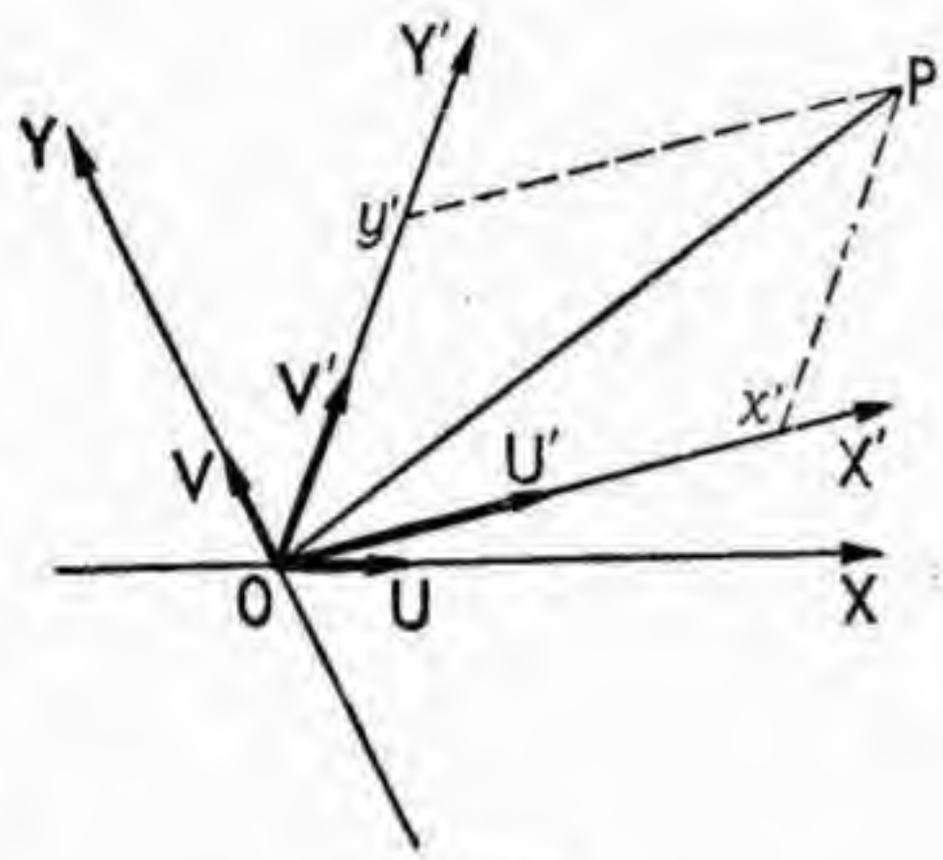

Fig. 14.

2. *Cambio de ejes con el mismo origen.* Si las coordenadas de P respecto del par UV son x, y, y se adopta un nuevo par básico (fig. 14)

[9] $U' = \alpha U + \beta V \qquad V' = \gamma U + \delta V$

las dos descomposiciones del vector OP, referido a uno u otro sistema son

$$OP = x'U' + y'V' = (x'\alpha + y'\gamma)U + (x'\beta + y'\delta)V$$

de donde resultan las fórmulas de transformación

[10] $x = x'\alpha + y'\gamma \qquad y = x'\beta + y'\delta$

que deberán ponerse en cada ecuación $f(x, y) = 0$, para obtener la nueva ecuación.

Cuando se deseen las expresiones inversas, basta despejar x' y', en el sistema de ecuaciones [10].

3. *Caso general.* Finalmente, si los nuevos vectores básicos de componentes $U'(\alpha, \beta)$, $V'(\gamma, \delta)$ tienen como nuevo origen el punto $O'(a, b)$ deberán sumarse estas componentes de la traslación a las fórmulas [10] y resultan

[11] $x = x'\alpha + y'\gamma + a \qquad y = x'\beta + y'\delta + b$

que resuelven el caso más general de cambio de ejes cartesianos en el plano.

4. **Baricentros de masas.** — Dados dos puntos $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ de masas m_1 y m_2 respectivamente (fig. 15), la ley fundamental de equilibro debida a Arquímedes expresa que la masa $(m_1 + m_2)$ es equivalente a la *resultante* de ambas (es decir, tiene como momento respecto de cualquier eje la suma de los momentos de ambas) si se coloca en el punto G, que divide al segmento A_1A_2 en razón inversa a las masas, es decir

$$\frac{|GA_1|}{|GA_2|} = \frac{m_2}{m_1}$$

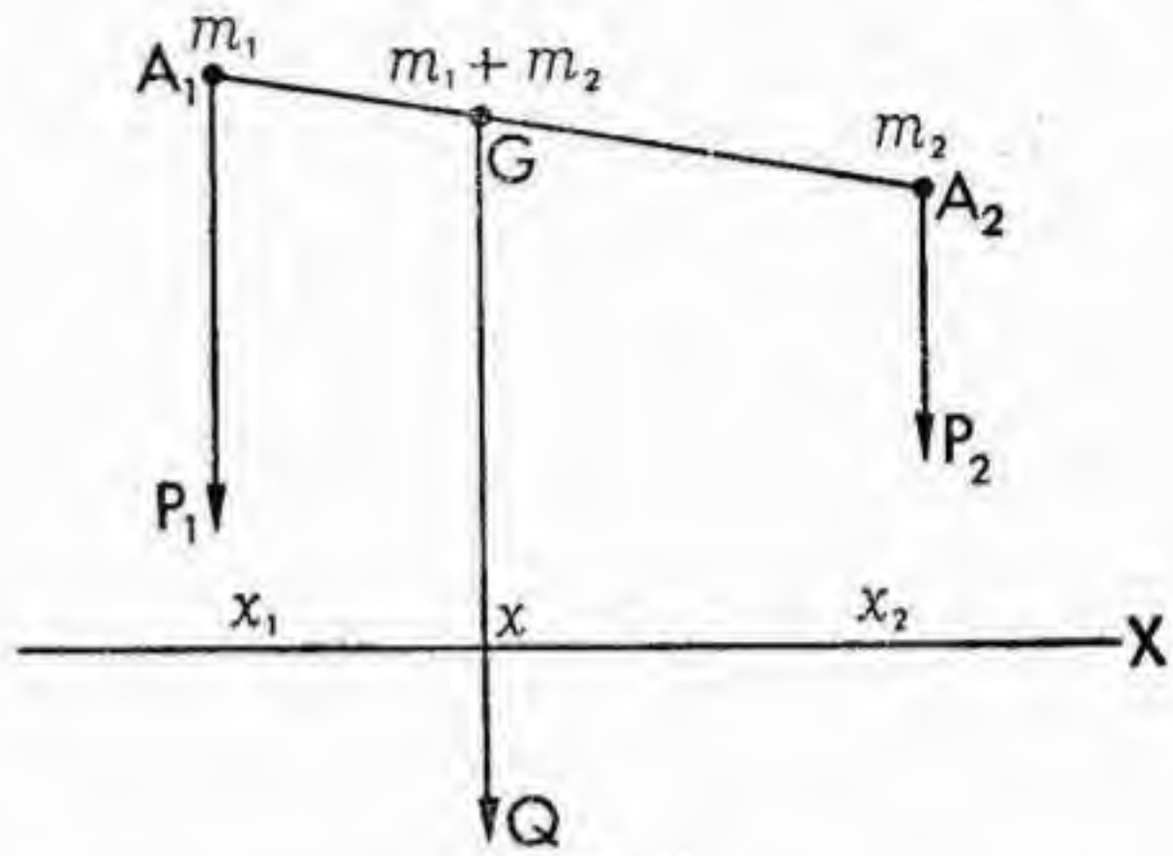

Fig. 15.

Proyectando sobre el eje x se verificará, por el teorema de Thales:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m_2}{m_1}$$

de donde se despejan las coordenadas x, y de G, que designaremos así:

$$[12] \qquad x_{12} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}\ ; \quad y_{12} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}$$

En particular, si $m_1 = m_2$ resulta el punto *medio* de A_1A_2, que por esto se llama *baricentro* del par de puntos, y cuyas coordenadas, como ya se vió en el corolario del (§ 1, 3, Teor. 2), son:

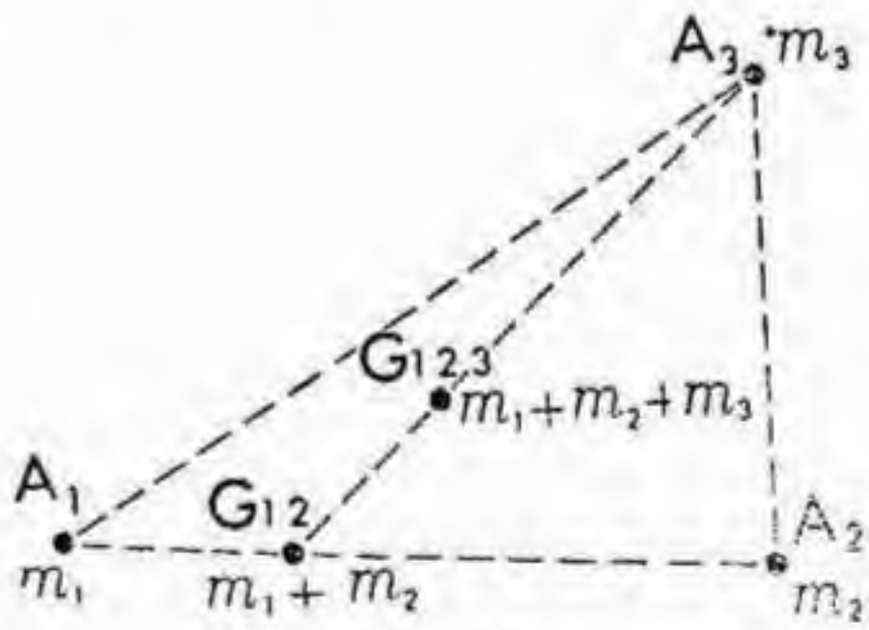

Fig. 16.

$$[13] \qquad x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Consideremos ahora las masas m_1, m_2, m_3 situadas en los puntos $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ (fig. 16). Según lo demostrado, el baricentro del par de masas $m_1 + m_2$ sobre el punto G_{12} y m_3 en el punto A_3, está determinado por las ecuaciones

$$x[(m_1 + m_2) + m_3] = (m_1 - m_2)x_{12} + m_3x_3$$
$$y[(m_1 - m_2) + m_3] = (m_1 - m_2)y_{12} + m_3y_3$$

luego el baricentro de las tres masas m_1, m_2, m_3 tiene las coordenadas

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}\ ;$$

dedúzcase la fórmula general para n masas.

En particular: se llama brevemente *baricentro* de los n puntos A_1, A_2, A_3, ..., A_n, o *centro de distancias medias*, al baricentro de n masas iguales colocadas en los n puntos; y sus coordenadas son los promedios de las coordenadas:

$$[14] \qquad x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}; \quad y = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}.$$

EJERCICIOS

1. El baricentro de tres puntos no alineados está situado en las tres medianas, quedando así demostrado el teorema conocido de Geometría métrica, según el cual las tres medianas de un triángulo concurren en un punto.

2. El baricentro de tres masas colocadas en los vértices, proporcionales a las longitudes de los lados opuestos, es el *incentro* (intersección de las tres bisectrices internas).

3. Demostrar que el baricentro del *perímetro* de un triángulo es el punto de concurrencia de las bisectrices del triángulo formado por los puntos medios de los tres lados.

4. Demostrar que el baricentro de la *superficie* del triángulo coincide con el de los tres vértices.

5. Dado el cuadrivértice de vértices

$$A_1(x_1, y_1), \quad A_2(x_2, y_2), \quad A_3(x_3, y_3), \quad A_4(x_4, y_4),$$

si M es el punto medio de A_1A_3 y N el punto medio de A_2A_4, demostrar que el punto medio de MN es el baricentro del cuadrivértice.

6. Los puntos medios de los pares de vértices del cuadrilátero $A_1A_2A_3A_4$ forman un paralelogramo cuyo centro es el baricentro G del cuadrivértice.

7. Probar analíticamente que las rectas que unen los puntos medios M, N, P, Q, de los lados adyacentes de un cuadrilátero cualquiera, forman un paralelogramo.

8. Sabiendo que las coordenadas de los vértices de un triángulo son A(—4, 8); B(3, —6), hallar las coordenadas del tercer vértice C, conociendo además las coordenadas del centro de gravedad G(2, 6).

NOTAS

Flechas y vectores: Dos puntos A, B determinan una dirección, es decir una recta; y así por ejemplo dice el topógrafo que dos jalones están en la dirección meridiana, o determinan la dirección meridiana; pero si A se fija como *origen*, al moverse B sobre la recta engendra una semirrecta de origen A, que también llamaremos *rumbo*. Así diremos en el ejemplo anterior que el par ordenado de jalones AB señala el rumbo S; y en sentido opuesto del rumbo N; en otra posición señalará por ejemplo el rumbo NW si forman ángulo de medio cuadrante hacia W con el rumbo N.

DEF. 1. El segmento determinado por dos puntos dados en un cierto orden AB para fijar un rumbo, es decir, una dirección y un sentido de ella, se llama *flecha*. Dos flechas AB y A'B' se dicen iguales cuando las rectas AB y A'B' son paralelas (en particular coincidentes) y los dos sentidos son acordes, cualquiera que sean las longitudes de los segmentos.

Ejemplos: 1. Las saetas de un reloj son flechas; cada una señala en cada momento un rumbo en la circunferencia de las horas, de los minutos o de los segundos.

2. En todo plano topográfico es indispensable la colocación de una flecha que señale un rumbo geográfico, pues de él se deducirán todos los demás. Suele adoptarse el Norte o el Sud, y esa flecha indicatriz se dibuja con *longitud arbitraria*, evocando el significado de esta palabra vulgar, de modo que el extremo B sea la punta de la flecha.

Fijar un rumbo en un plano o mapa se llama *orientarlo*, porque en la geografía medieval se adoptaba como rumbo capital el Oriente, donde se ubicaba el paraíso. Este desacuerdo con la costumbre actual aparece también en otros aspectos de lenguaje vulgar. Así decimos que van en *dirección opuesta* quienes caminan hacia el Norte y hacia el Sud, mientras que un geómetra dirá que van en "la misma dirección" pero "con rumbos o sentidos opuestos".

Mientras el concepto de flecha es independiente de la longitud del segmento, suele definirse el vector como "segmento de dirección, sentido y longitud determinada", pero el agregado de estas tres cualidades no constituye una definición, pues hay tres tipos diversos de vectores que las tienen. La esencia de todo ente abstracto, que constituye su definición, reside en el tipo de igualdad que es base de la abstracción [1].

DEF. 2. El ente abstracto definido por una familia de segmentos dirigidos, se llama:

Flecha, si hay igualdad de *rumbo* (dirección y sentido).
Vector libre, „ „ „ „ *rumbo y longitud*.
Vector axial, „ „ „ „ *recta base, rumbo y longitud*.

Finalmente, dado un solo segmento dirigido AB, se llamará *vector fijo*.

Los vectores iguales se llaman también *equipolentes*, siguiendo a Bellavitis. Si los vectores son axiales, deben ser segmentos iguales y acordes de una misma recta; si son libres deben ser lados opuestos de un paralelogramo.

Ejemplos: 1. Las saetas de reloj, las indicatrices usadas para arrumbar planos, las brújulas, son flechas y no vectores.

2. Un vector libre AA′ y cualquiera de sus iguales, definen una traslación del plano o del espacio sobre sí mismo; cada figura ABCD ... y su homóloga A′B′C′D′ son iguales y sus segmentos homólogos son iguales y paralelos.

3. Dos caballos que, mediante un cable, tiran de una masa inerte, en un punto A, con igual potencia ejercen fuerzas representadas por vectores axiales iguales sobre la recta del cable. Pero si la tracción la ejercen dos puntos no alineados con la masa, los dos vectores que representan las dos fuerzas, son desiguales. Su diferencia se llama "par de fuerzas o de vectores".

§ 8. PROBLEMAS LINEALES EN EL PLANO

1. **Diversos tipos de ecuación de la recta.** — a) *Ecuación vectorial.* Dados en el plano dos puntos $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ (fig. 17), tales que la recta P_0P_1 no sea paralela a ninguno de los ejes, es decir, $x_0 \neq x_1$, $y_0 \neq y_1$, cada punto $P(x, y)$ de esta recta está determinado por la razón

$$p = \frac{P_0P}{P_0P_1} \tag{1}$$

[1] Sobre el concepto de igualdad abstracta, véase REY PASTOR, *Curso Cíclico*, Vol. I.

medida de P_0P con la unidad P_0P_1; y como esta razón se conserva al proyectar sobre cada eje, resulta la igualdad

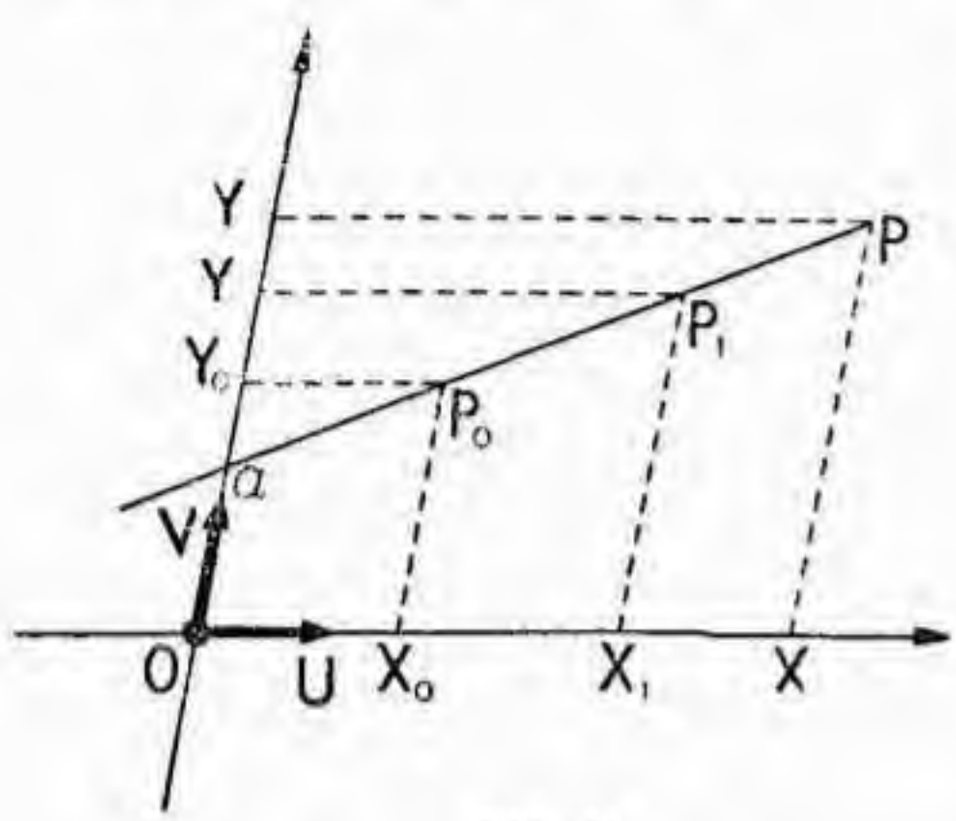

Fig. 17.

$$[2] \qquad \frac{X_0X}{X_0X_1} = \frac{Y_0Y}{Y_0Y_1} = p$$

es decir:

$$[3] \qquad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = p$$

Todo punto P de la recta P_0P_1 satisface, pues, a esta ecuación.

Recíprocamente, si el par (x, y) la satisface, siendo p el valor de las dos fracciones, el punto P de la recta, definido por el vector $P_0P = p \,.\, P_0P_1$ tiene coordenadas dadas por [1], es decir, las propuestas. Por tanto: La ecuación de la recta determinada por los puntos $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$ es [3].

Sin usar coordenadas, la ecuación vectorial de la recta a que satisface el punto variable P es

[4] $P_0P = p \,.\, P_0P_1$ o bien $OP = OP_0 + pW$ (Ecuación vectorial), siendo W un vector fijo y p un parámetro real variable.

b) *Ecuación explícita.* Despejando en [3] resulta:

$$[5] \qquad y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

que también puede escribirse así:

[6] $y = mx + a$ (Ecuación explícita)

donde es

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad a = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x_0 = \frac{y_0x_1 - y_1x_0}{x_1 - x_0}$$

El número m se llama *coeficiente angular* de la recta, y es igual al *incremento de ordenadas dividido por el incremento de abscisas.*

El número a se llama *ordenada en el origen,* porque es el valor de y correspondiente al $x = 0$.

Las rectas que pasan por O tienen ecuaciones del tipo $y = mx$, con ordenada nula en O; y al incrementar ésta, conservando m, sufren igual incremento todas las ordenadas, resultando una recta paralela, por las propiedades del paralelogramo.

Resumen: *la condición de paralelismo de las rectas* $y = mx + a$, $y = m'x + a'$ *es la igualdad de los coeficientes angulares*: $m = m'$.

c) *Ecuación general.*

La ecuación explícita [5] excluye las rectas paralelas al eje y, cuyas ecuaciones son del tipo $x = \text{const.}$: pero todas las rectas del plano, sin excepción, quedan incluídas en esta ecuación general:

[7] $$Ax + By = C \qquad \text{(Ecuación general)}$$

Si es $B \neq 0$, se puede despejar y, resultando una ecuación explícita de tipo [6] (rectas no paralelas al eje y); y si es $B = 0$, resulta del tipo $x = \text{const.}$, es decir, rectas paralelas al eje Y.

Si es $C = 0$ tenemos el haz de *todas* las rectas que pasan por O, mientras que las ecuaciones $y = mx$, $x = ny$, excluyen los $x = 0$, $y = 0$, respectivamente.

d) *Ecuación Segmentaria.*

Si es $C \neq 0$, podemos dividir por C, y la ecuación puede escribirse así (fig. 18):

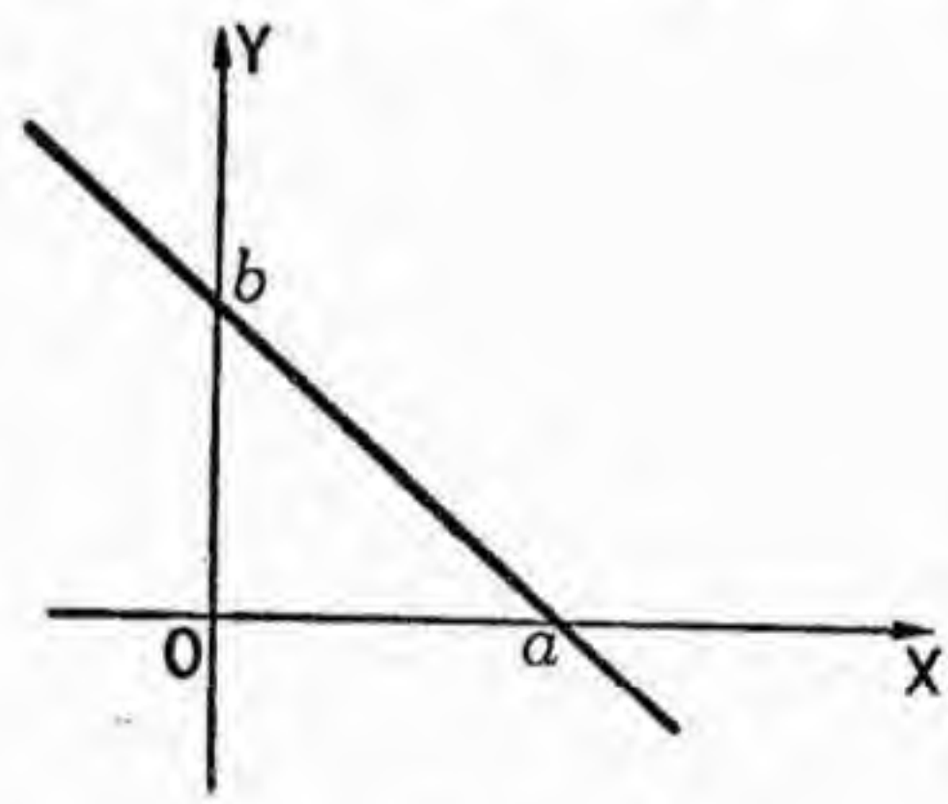

Fig. 18.

[8] $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \text{(Ecuación segmentaria)}$$

donde a y b son las medidas de los segmentos que la recta intercepta en cada eje, con su signo correspondiente, pues haciendo

$$y = 0\ , \quad \text{resulta} \quad x = a$$
$$x = 0\ , \quad \text{resulta} \quad y = b$$

Esta ecuación [8] llamada *segmentaria, representa todas las rectas que no pasan por el origen, quedando excluídas todas las* $y = mx$ *que pasan por* O.

2. **Paralelismo y coincidencia de rectas.** — El coeficiente angular de la recta [7] respecto del eje X es $m = -A/B$; y respecto de Y es $n = -B/A$. Como A o B no son nulos, resulta:

Condición necesaria y suficiente de paralelismo de dos rectas

[9] $$Ax + By = C \quad , \quad A'x + B'y = C'$$

es la proporcionalidad de los coeficientes de x, y, *que por esta razón se llaman directores.*

Tal proporcionalidad se escribe así:

[10] $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B}$ y significa $A' = kA$, $B' = kB$, inclusive si $A = 0$, en cuyo caso es $A' = 0$; o bien si $B = 0$, pues entonces es también $B' = 0$. Con este convenio se elude toda peligrosa consideración sobre denominadores nulos y valores infinitos.

Caso especial de paralelismo es la coincidencia, con el convenio ya adoptado en (§ 6-2, *b*), *la condición necesaria y suficiente de coincidencia de dos rectas es la proporcionalidad de sus tres coeficientes*:

[11] $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$ es decir: $A' = kA$, $B' = kB$, $C' = kC$

Tal condición es *suficiente;* pues las dos ecuaciones tienen entonces las mismas soluciones. Recíprocamente: si dos ecuaciones de primer grado [9] representan la misma recta, además de la proporcionalidad [10] entre los A y B, se verifica la de los coeficientes C, *necesaria* para que tengan el mismo punto de intersección con los ejes.

Ejemplos: 1. Rectas paralelas:

$x - \frac{1}{2}y = 2$, $y = 2x + 1$, $y - 3 = 2(x - 1)$

2. Ecuaciones equivalentes a las anteriores:

$2x = y - 1$, $2x = y + 4$, $x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 0$

Aparéense las que representan la misma recta.

NOTA. Con el convenio adoptado en [11], si uno o dos de los coeficientes A, B, C son nulos, también lo son sus homólogos. Si se prefiere eludir la escritura de fracciones (que en verdad no lo son) puede adoptarse la vieja notación de Euclides:

$$A : B : C = A' : B' : C'$$

3. **Puntos alineados.** — Si los puntos $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ están en una recta, deben satisfacer a una ecuación [7], es decir, deben existir valores no todos nulos, A, B, C, tales que

$$Ax_0 + By_0 = C \quad , \quad Ax_1 + By_1 = C \quad , \quad Ax_2 + By_2 = C$$

y la condición necesaria y suficiente para ello, es la anulación

[12] $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, o bien $\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = 0$

Si (x, y) es un punto genérico de la recta, determinada por (x_1, y_1), (x_2, y_2), la ecuación de esta recta es:

[13] $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, o bien $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix} = 0$

Salta a la vista que esta última es equivalente a la [5]; y que la primera es del tipo [7] con coeficientes que aparecen al desarrollar por la primera fila el determinante:

$$[14] \qquad (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y = y_1x_2 - x_1y_2.$$

4. **Intersección de rectas. Haces.** — Si éstas vieren dadas por las ecuaciones

$$[15] \qquad Ax + By = C, \qquad A'x + B'y = C',$$

como su punto de intersección (x, y) debe satisfacer a las dos ecuaciones, su determinación se reduce al problema algebraico de resolver las dos ecuaciones [15].

Caso 1. Si $AB' - BA' \neq 0$, es decir, si las rectas no son paralelas, la regla de Crámer da la solución única:

$$[16] \qquad x = \frac{CB' - BC'}{AB' - BA'} \qquad y = \frac{AC' - CA'}{AB' - BA'}$$

que determina el punto de intersección.

Caso 2. Si $AB' = BA'$, es decir, A y B proporcionales a A' y B' esta igualdad de coeficientes directores indica su paralelismo; y en particular, si también son proporcionales C y C', es decir, $AC' = CA'$; $CB' = BC'$, las dos rectas son coincidentes.

En el primer caso, la inexistencia de intersección está acusada por las fórmulas [16] por tener numeradores no nulos y denominador cero. En el caso de coincidencia, viene también expresada en forma de indeterminación $\frac{0}{0}$.

Condición necesaria y suficiente para que tres rectas de ecuaciones

$$[17] \qquad \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3 &= 0 \end{aligned}$$

sean concurrentes es que haya solución de dos ecuaciones y satisfagan a la otra, y esta compatibilidad del sistema está caracterizada por la condición *necesaria*:

$$[18] \qquad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

¿Será suficiente? La anulación del determinante implica que alguna fila es combinación lineal de otras, es decir, una recta pasa por la intersección de las otras dos, si existe, o bien es paralela a ambas, si éstas lo son, en cuyo caso diremos que forman *haz impropio*. Por tanto, si generalizamos el concepto

de *haz*, incluyendo en él los haces impropios, formados por rectas paralelas, resulta esta conclusión general:

Condición necesaria y suficiente para que tres rectas formen haz, propio o impropio, es la anulación del determinante [18] *de los coeficientes.*

5. **Ecuación simbólica del haz.** — Designando por una letra un trinomio lineal, y dadas dos rectas $P = 0$, $Q = 0$, al variar los números reales λ, μ, resultan infinitas ecuaciones $\lambda P + \mu Q = 0$, que se satisfacen por la solución común a ambas, si la hay, resultando infinitos rayos del haz determinado por ambas rectas, o bien, si son paralelas, es decir, proporcionales sus coeficientes directores, también lo son los de $\lambda P + \mu Q$; luego resultan infinitas rectas paralelas.

Que en ambos casos se obtiene así *todo* el haz determinado por las rectas $P = 0$, $Q = 0$, es consecuencia de este problema:

Recta concurrente con dos, que pasa por un punto (x_0, y_0) no situado en ambas. Sustituyendo, la ecuación $\lambda P(x_0, y_0) + \mu Q(x_0, y_0) = 0$, determina la razón finita λ/μ o bien μ/λ y se tiene una recta y sólo una, que resuelve el problema. Análogamente, si se pide la recta paralela a otra.

NOTA. En la práctica suele adoptarse un solo parámetro, escribiendo la ecuación del haz en la forma $P = \lambda Q$, a sabiendas de que así queda excluída en esta expresión la recta $Q = 0$; omisión que no interesa, cuando se trata de encontrar una tercera recta que cumpla ciertas condiciones. El caso singular en que la solución sea precisamente la recta $Q = 0$, vendrá acusado por la solución $\lambda = \infty$.

Ejemplos: Recta concurrente con las

$$3x - y = 1 \qquad\qquad 2x + 3y = 1$$

y que cumpla alguna de estas condiciones:

1) Pasa por el origen.

(Basta eliminar la constante, es decir, restar de la 2ª el duplo de la 1ª y resulta

$$4x = 5y).$$

2) Es paralela al eje x.

(Sumando a la 2ª el triple de la 1ª, se elimina y, resultando

$$11x = \frac{5}{2}\Big).$$

3) Es paralela a la recta $3x - 5y = 8$.

(Despejando en $\frac{3\lambda - 2}{3} = \frac{-\lambda - 3}{-5}$ resulta $\lambda = \frac{19}{12}\Big)$:

luego la solución es

$$3x - 5y = -\frac{5}{22}.$$

6. **Coordenadas homogéneas.** — El artificio (§ 3-1) introducido en la geometría de la recta, de sustituir la abscisa por los pares (x, t) tales que $\frac{x}{t}$ sea igual a dicha abscisa, con objeto

de ampliar la escala numérica con los pares $(x, 0)$, que decimos representar el *punto impropio*, alcanza en la Geometría plana mayor importancia, como ya se adivina ahora, y más adelante se verá más ampliamente.

DEF. 1. *Coordenadas homogéneas* $(x_1 x_2 x_0)$ de un punto propio del plano con coordenadas cartesianas (x, y), son tres números cualesquiera (con $x_0 \neq 0$) proporcionales a la terna $(x, y, 1)$, es decir tales que

$$\frac{x_1}{x_0} = x\,, \qquad \frac{x_2}{x_0} = y\,.$$

Las ternas $(a, b, 0)$ representan los puntos *impropios* o direcciones del plano, estando determinada cada dirección por la razón b/a (que es el coeficiente angular de la misma respecto del eje x), o bien por la a/b, respecto del eje y; pudiendo ser nulo a o bien b, pero no ambos a la vez.

Así, por ejemplo, son impropios los puntos $(1, 2, 0)$, $(1, -1, 0)$; el primero es el de la recta $y = 2x$, y el segundo el de la bisectriz $y = -x$, y de todas sus paralelas.

Cuando no haya peligro de confusión con las x, y absolutas, representaremos por x, y, t, las coordenadas homogéneas.

La ecuación homogénea de la recta será, pues,

$$\text{[19]} \qquad Ax + By + Ct = 0$$

y en particular representa

$Ax + By = 0$	las rectas por el origen O;
$Ax + Ct = 0$	las rectas paralelas al eje Y;
$By + Ct = 0$	las rectas paralelas al eje X.

La ecuación $t = 0$ representa el conjunto de todos los puntos impropios y tiene propiedades de recta, por ser de primer grado y tener un solo punto en cada recta [19] propia. Diremos, pues, que la recta impropia tiene la ecuación $t = 0$.

EJERCICIOS

1. — Recta que pasa por el punto $(1/4, -1/2)$ y es paralela a la recta determinada por los puntos $(-2, 1/4)$ y $(1/2, 3)$.

2. — Rectas paralelas a la bisectriz $x = y$, que pasan por los puntos $(3, 1/4)$ y $(-1/2, 2)$.

3. — Ecuación de la recta determinada por los dos puntos anteriores, en sus formas vectorial, general y segmentaria.

4. — Se desea hallar la ecuación de una recta que interceptando sobre el eje x un segmento de longitud igual a 7 unidades, pase además por el punto de abscisa $x = 4$, perteneciente a la recta dada por: $5x + 3y = 30$.

5. — Probar analíticamente que las perpendiculares bajadas desde dos vértices cualquiera, de un triángulo, sobre la mediana bajada del tercer vértice, son iguales.

6. — Probar analíticamente que las rectas trazadas desde un vértice A de un paralelogramo a los puntos M, N, medios de los lados opuestos, dividen a una de las diagonales en tres partes iguales.

§ 9. COORDENADAS ORTOGONALES Y POLARES

1. Sistemas ortogonales o rectangulares. — Mientras en los problemas *proyectivos* (incidencia de elementos) y en los *afines* (paralelismo) la solución es sencilla, cualquiera que sea el ángulo de los ejes, en cambio conviene elegirlos perpendiculares y con unidades iguales para todos los problemas *métricos* (distancias, ángulos, áreas), que trataremos en § 10.

DEFINICIÓN 1. Llamamos *sistema ortogonal (o perpendicular) al definido por dos vectores* U, V, *perpendiculares y de igual longitud.*

Es costumbre adoptar sobre el encerado en dirección horizontal y hacia la derecha el semieje $+X$, y vertical hacia arriba el $+Y$; queda así definido un sentido de rotación "$+X$ hacia $+Y$" que se llama *positivo*, y es opuesto al de rotación de las saetas de un reloj corriente colgado sobre el encerado.

También se acostumbra a medir la ordenada y, no sobre el eje Y, sino en la paralela trazada por $P(x, y)$, desde la intersección con el eje X hacia el punto P. Así en la figura 19, las

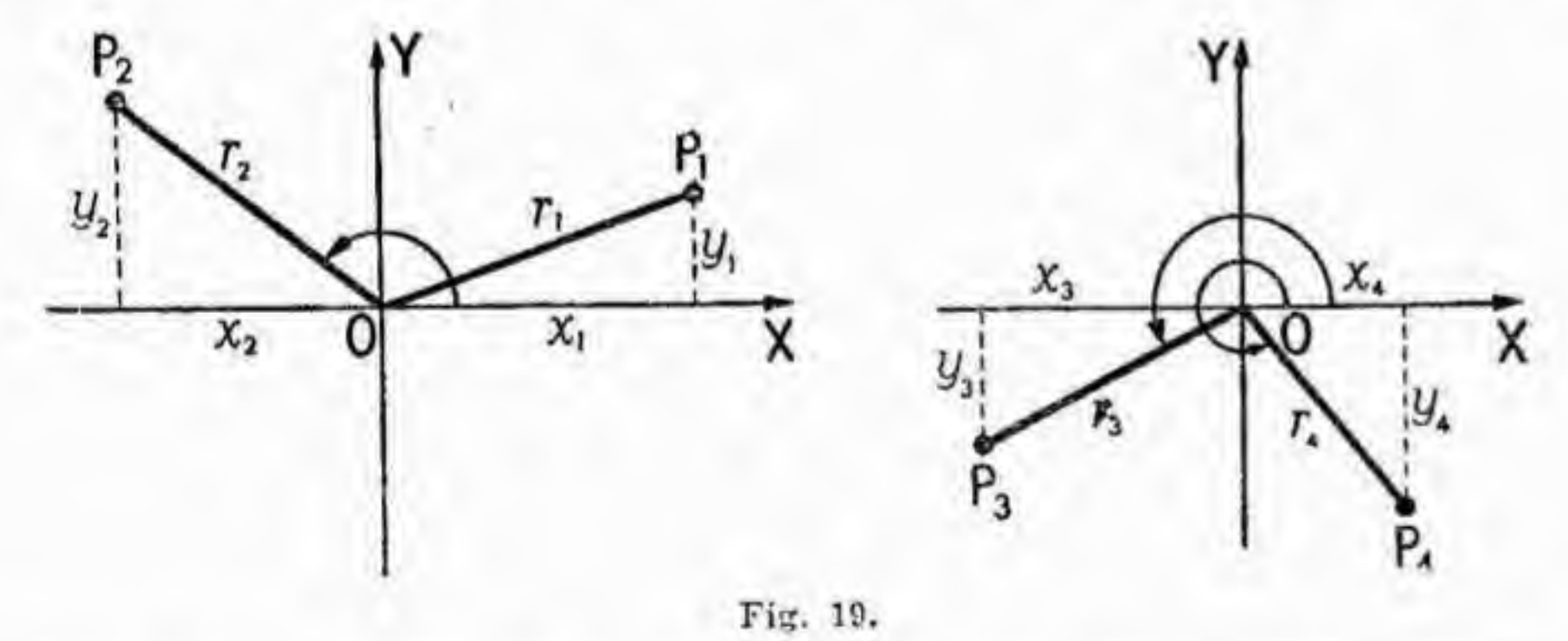

Fig. 19.

ordenadas y_1 de P_1 (1er. cuadrante) e y_2 de P_2 (2º cuadrante) son *positivas*, mientras que la y_3 e y_4 en el 3º y 4º cuadrantes son *negativas*.

Para medir la inclinación del vector OP se adopta el ángulo de rayo extremo OP, cuyo rayo origen es el $+X$, con el sentido positivo ya indicado, es decir, el del ángulo $(+X, +Y)$; pero si OP está en el cuadrante 3º ó 4º, para evitar ángulos cóncavos (mayores que un llano) suele medirse la inclinación por el ángulo de sentido contrario, al que se asignará signo —.

La diferencia entre ambas medidas positivas y negativas

de cada ángulo es, por tanto, 360°, es decir 4R, o bien 2π, en medida radial.

Además de estas dos medidas que llamaremos *fundamentales*, bien determinadas, cabe agregar un ángulo de una o de varias vueltas sin alterar el origen (+X) ni el rayo extremo OP del ángulo. Así, pues, si φ es una medida, se deducen infinitas por la fórmula $\varphi \pm 2n\pi$, donde están incluídas las dos fundamentales.

Las medidas fundamentales de los ángulos de inclinación φ, o *argumentos* de los vectores en los diversos cuadrantes, oscilan así:

		Medidas en Grados	*Medidas en Rectos*	*Medida radial*
Cuadrante	I: φ entre	0° y 90°	0 y R	0 y $\frac{\pi}{2}$
„	II: „	90° y 180°	R y 2R	y π $\frac{\pi}{2}$
„	III: „	180° y 270°	2R y 3R	π y 3 $\frac{\pi}{2}$
	(o bien „	—90° y —180°)	(—R y —2R)	(—$\frac{\pi}{2}$ y —π)
„	IV: φ „	270° y 360°	3R y 4R	(3 $\frac{\pi}{2}$ y 2π)
	(o bien „	—90° y 0°)	(—R y 0)	(— $\frac{\pi}{2}$ y 0)

2. **Funciones circulares.** — En el triángulo rectángulo que forma el segmento OP (fig. 20) (cuya longitud absoluta llamaremos r) con los dos catetos de longitudes x, y, la razón de

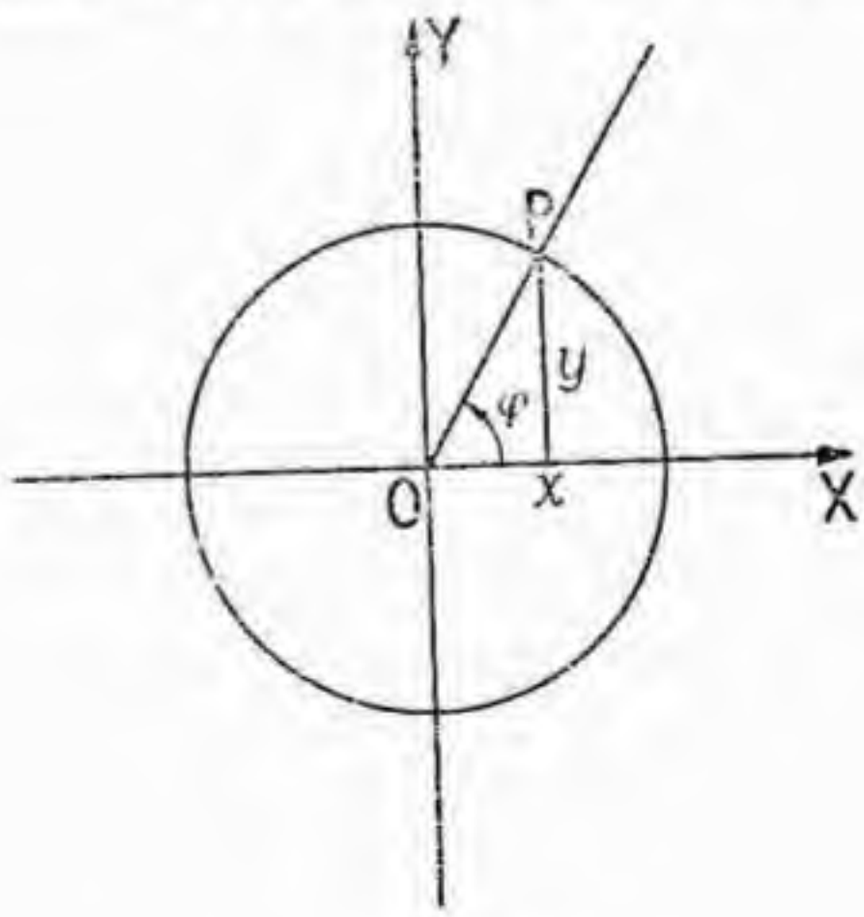

Fig. 20.

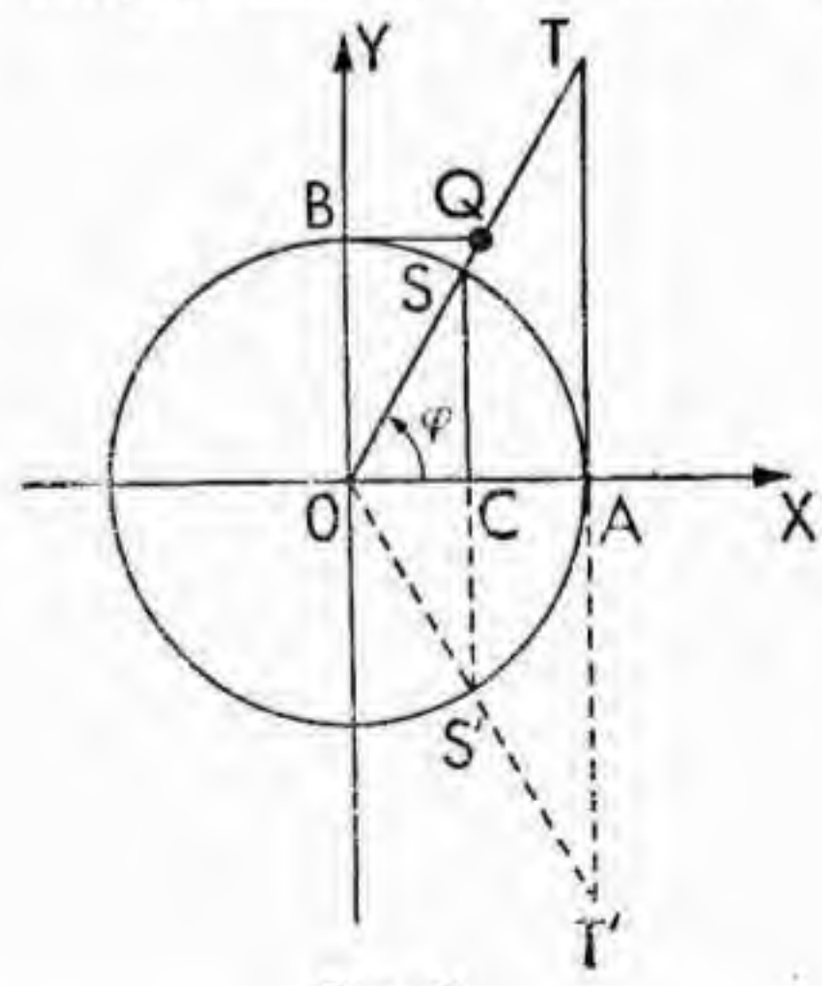

Fig. 21.

dos cualquiera de los tres lados determina la forma del triángulo, y por tanto el ángulo φ; estas razones, con el signo que les corresponda por los signos de x, y (pues $r > 0$ en todo caso),

se llaman *funciones goniométricas*, porque sirven para calcular el ángulo φ; o bien *circulares*, porque al variar φ conservándose r fijo, describe P una circunferencia, y a cada punto de ella corresponde un valor bien determinado de cada función goniométrica (fig. 21).

DEF. 2. Las tres funciones circulares más importantes se definen así:

[1] $$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\text{ordenada}}{\text{radio}} = \frac{y}{r} \qquad (\textit{seno} \text{ de } \varphi)$$

[2] $$\cos\varphi = \frac{\text{abscisa}}{\text{radio}} = \frac{x}{r} \qquad (\textit{coseno} \text{ de } \varphi)$$

[3] $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{y}{x} \qquad (\textit{tangente} \text{ de } \varphi)$$

Aunque de menor interés, se usan a veces estas otras:

[4] $$\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{r}{x} \qquad (\textit{secante} \text{ de } \varphi)$$

[5] $$\operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\operatorname{sen}} = \frac{r}{y} \qquad (\textit{cosecante} \text{ de } \varphi)$$

[6] $$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{x}{y} \qquad (\textit{cotangente} \text{ de } \varphi)$$

que sólo mencionaremos rara vez, en lugar secundario.

Funciones pares e impares. — De la definición resulta que al cambiar φ por $-\varphi$ no varía $\cos\varphi$ (y por tanto $\sec\varphi$); son funciones *pares* el *coseno* y su recíproca la *secante*.

Por el contrario, al cambiar φ por $-\varphi$ cambia de signo la ordenada y, luego también $\operatorname{sen}\varphi$ (y su recíproca $\operatorname{cosec}\varphi$), así como también $\operatorname{tg}\varphi$ y $\operatorname{ctg}\varphi$. Es decir, son funciones *impares* el *seno* (con su recíproca la *cosecante*), la *tangente* (y su recíproca la *cotangente*).

Resultan así estas fórmulas importantes:

Pares: $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$.

Impares: $\operatorname{sen}(-\varphi) = -\operatorname{sen}\varphi$, $\operatorname{tg}(-\varphi) = -\operatorname{tg}\varphi$.

Representación por segmentos. Si se adopta r como unidad de longitud, las razones circulares están representadas por los segmentos siguientes deducidos de cada punto de la circunferencia $r = 1$:

$$\operatorname{sen}\varphi = CS; \quad \cos\varphi = OC; \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{CS}{OC} = \frac{AT}{OA} = AT$$

Ejercicios: Demostrar, análogamente, estas representaciones:

$$\sec\varphi = \frac{OS}{OC} = \frac{OT}{OA} = OT$$

$$\operatorname{cosec}\varphi = \frac{OS}{CS} = \frac{OQ}{OB} = OQ$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{OA}{AT} = \frac{BQ}{OB} = BQ$$

3. **Relaciones fundamentales entre las funciones circulares.** — Del teorema de Pitágoras resulta

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{de donde} \quad \cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi = 1$$

abreviando así la escritura correcta:

[7] $$(\cos\varphi)^2 + (\operatorname{sen}\varphi)^2 = 1.$$

Dada una de las funciones, se deduce la otra:

[8] $$\operatorname{sen}\varphi = \pm\sqrt{1 - \cos^2\varphi}, \quad \cos\varphi = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\varphi}$$

quedando indeterminado el signo; pues una sola de las funciones no determina el ángulo; y según sea el cuadrante donde está el vector, así será el signo.

De las definiciones resulta inmediatamente:

[9] $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} \qquad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$$

Inversamente, dada $\operatorname{tg}\varphi$, se deducen $\operatorname{sen}^2\varphi$, $\cos^2\varphi$, poniendo denominador $\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, para lograr homogeneidad, y dividiendo por $\cos^2\varphi$, resulta:

[10] $$\operatorname{sen}^2\varphi = \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi} = \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}$$

[11] $$\cos^2\varphi = \frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}$$

Extrayendo la raíz cuadrada queda indeterminado el signo $\pm$.

Ángulos complementarios. Permutando los ejes X, Y, se permutan abscisa y ordenada; por otra parte el ángulo YOP es complementario del XOP; luego, refiriéndonos por ahora a los ángulos del primer cuadrante, llegamos a esta conclusión, que más adelante será generalizada para todos los ángulos de todos los cuadrantes:

El seno de un ángulo es el coseno del complementario. La tangente de un ángulo es la cotangente del complementario.

4. **Funciones circulares de ángulos notables.** — Los valores de las funciones circulares para cada ángulo (de grado en grado o de minuto en minuto) han sido calculados y tabulados. Se encuentran en la mayoría de las genéricamente llamadas "tablas de logaritmos". En general los valores de estas funciones son números irracionales que carecen de expresión simple. Para ciertos ángulos, sin embargo, su valor puede expresarse en forma racional o mediante un número reducido de raíces cuadradas. Por ejemplo, para los ángulos de la tabla siguiente de frecuente uso:

Ángulo	*Seno*	*Coseno*	*Tangente*
$0°$	0	1	0
$\pi/10 = 18°$	$\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1-2\sqrt{5}/5}$
$\pi/6 = 30°$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/5 = 36°$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$\pi/4 = 45°$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3 = 60°$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
$2\pi/5 = 72°$	$\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\pi/2 = 90°$	1	0	∞

5. **Funciones circulares inversas.** — A cada semirrecta corresponden infinitos ángulos que tienen este extremo y como origen $+X$; pero todos tienen el mismo seno, el mismo coseno, etc.; es decir: las funciones circulares son funciones *uniformes* de la semirrecta adoptada como extremo. En cambio, dado el seno de φ, no solamente hay *infinitos* ángulos φ, sino *dos* semirrectas; y lo mismo sucede si se da $\cos\varphi$, o bien $\operatorname{tg}\varphi$ (fig. 22).

En las figuras salta a la vista la construcción de los dos rayos que deja indeterminados cada función circular, y los infinitos ángulos que les corresponden.

ángulos	*rayos*
$\varphi_1 + 2n\pi$	OP_1
$\pi - \varphi_1 + 2n\pi$	OP_2
$\varphi_1 + 2n\pi$	OP_1
$-\varphi_1 + 2n\pi$	OP_2
$\varphi_1 + 2n\pi$	OP_1
$\varphi_1 + \pi + 2n\pi$	OP_2

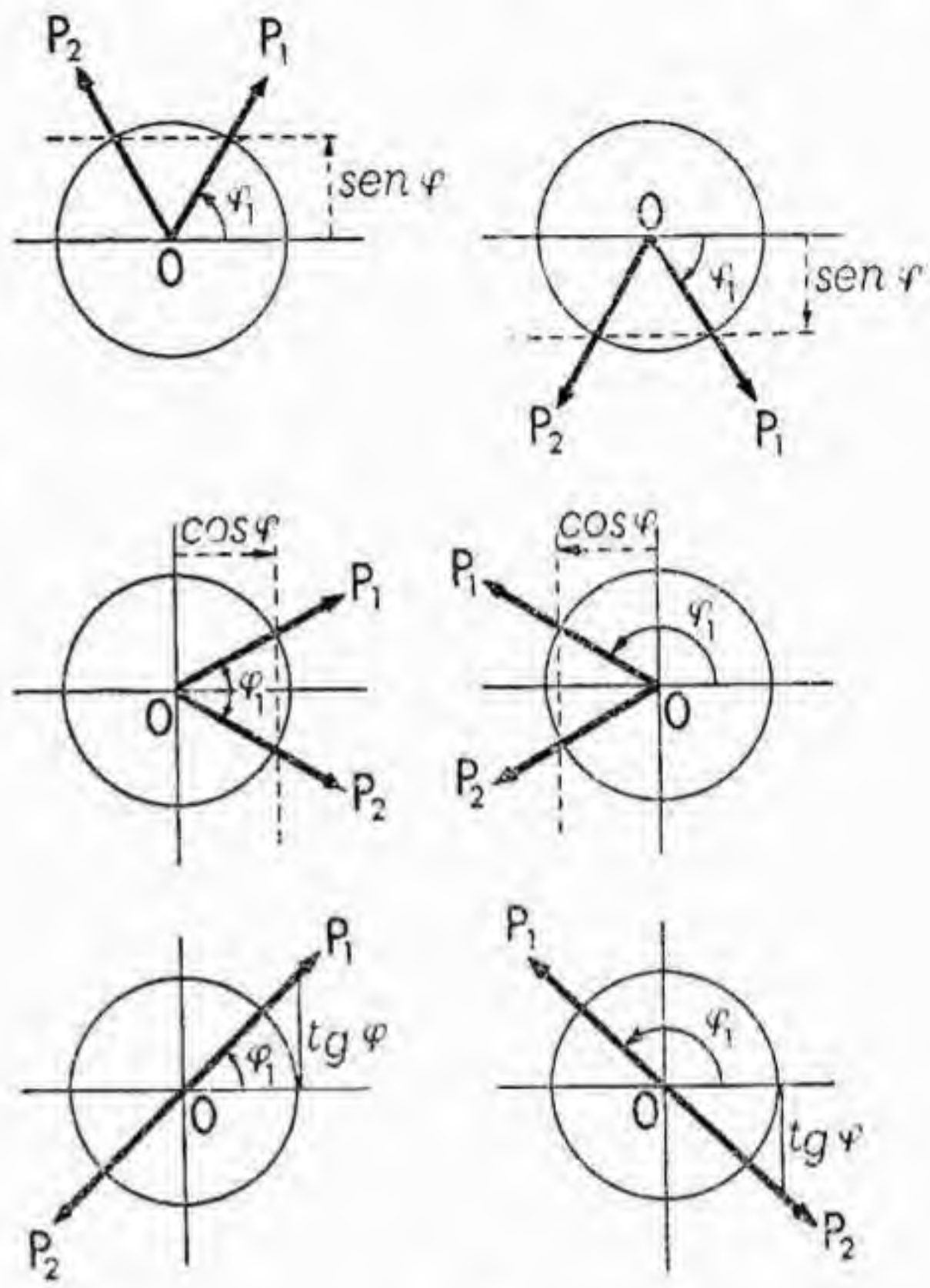

Fig. 22.

Ejercicios: Expresar los *infinitos ángulos* y los *dos rayos* que corresponden a cada cotangente, secante o cosecante (sale el mismo cuadro invertido).

Los infinitos ángulos que corresponden a un *seno* son los valores de la función inversa de la $y = \operatorname{sen} \varphi$, función inversa que significa: *arco cuyo seno es* y; en abreviatura se escribe $\varphi = \operatorname{arc\,sen} y$.

Análogamente, $\varphi = \arccos x$ se lee: *arco cuyo coseno es* x; y para cada valor de x no superior a 1 en valor absoluto, tiene infinitos valores, dados en la tabla anterior.

Lo mismo acontece con la función *arco tangente* t (brevemente arc tg t) definida para todo valor de t y análogamente con todas las demás.

Insistamos: en todo caso hay *infinitos* ángulos, pero solamente *dos* rayos que corresponden al valor dado.

Ejercicios: Simplificar las funciones:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} -1)$;

2) $\operatorname{sen}(\arccos 1/2)$

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sen} -1/2\right)$

4) $\pi - \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg} \varphi)$

5) Expresar las funciones inversas de los senos, cosenos y tangentes dados en la tabla (4).

6. **Coordenadas polares.** — Las coordenadas cartesianas (x, y) del punto P determinan el vector OP, y por tanto el radio r y la inclinación φ (fig. 23); pero también cabe determinar el vector OP dando r y φ, números que se llaman *coordenadas polares* y permiten deducir x, y.

DEF. 3. *Coordenadas polares* del punto P, o del vector OP, son las medidas de la *inclinación* φ y del *radio* r.

El número r puede ser cualquiera, no negativo, y el φ cualquier número real, según el convenio (§ 9-1) de medición de ángulos; pero suelen adoptarse como fundamentales el ángulo situado en el intervalo $0 \leqslant \varphi < 2\pi$; o bien en el $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. La indeterminación del ángulo para cada rayo extremo admite una sucesión de medidas $\varphi \pm 2n\pi$ para cada vector OP; pero al vector nulo OO, caracterizado por el radio $r = 0$, se le puede atribuir como argumento φ cualquier valor real.

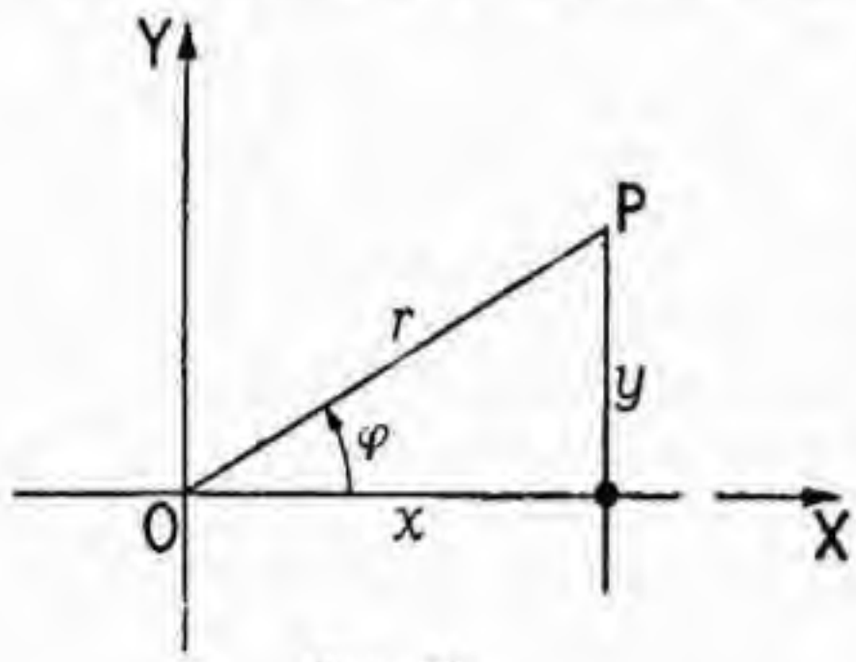

Fig. 23.

Escribiremos las coordenadas polares así: (φ, r), expresando φ en grados o en medida radial (número abstracto), y r en una medida de longitud cualquiera. Esta medida esencial suele llamarse *radio polar*, y el ángulo φ se llama *argumento* o *anomalía*, o más sencillamente, *ángulo*.

Bastan ejemplos muy sencillos para ver que la restricción $r \geqslant 0$ mutila la representación de importantes curvas (como sucedería si impusiéramos en el sistema cartesiano la condición $y \geqslant 0$). Al final damos un ejemplo expresivo, que basta para justificar la siguiente ampliación de Def. 3, para adoptar en lo sucesivo la siguiente:

DEF. 4. En las coordenadas polares admitiremos *radios negativos*, entendiendo que el par $(\varphi, -r)$ representa el mismo punto que el par $(\varphi \pm \pi, r)$.

Son equivalentes los pares (φ, r), (φ', r') si es:

$$r' = r, \qquad \varphi' - \varphi = 2n\pi,$$

o bien

$$r' = -r, \qquad \varphi' - \varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

Ejemplos: Dividiendo la circunferencia de centro O y radio 1 por los diámetros de inclinación (fig. 24)

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \qquad \varphi' = -\frac{\pi}{4},$$

las coordenadas de los cuatro puntos de división A, B, C, D, son:

A) $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) = \left(-3\frac{\pi}{4}, -1\right)$

B) $3\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) = \left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$

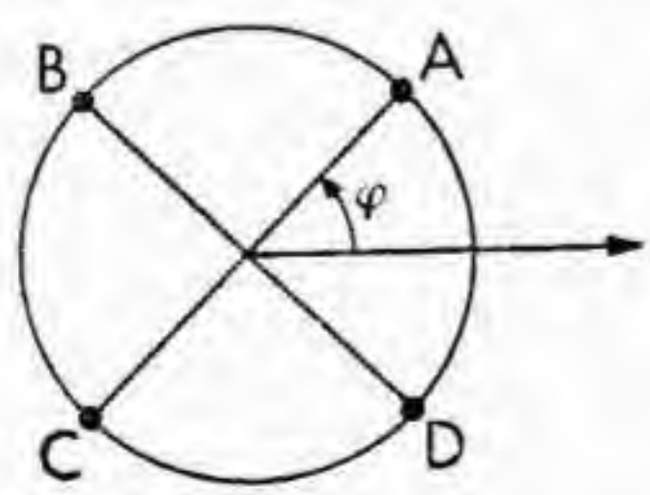

Fig. 24.

C) $\left(-3\,\frac{\pi}{4}\,,\ 1\right) = \left(\frac{\pi}{4}\,,\ -1\right)$

D) $\left(-\,\frac{\pi}{4}\,,\ 1\right) = \left(3\,\frac{\pi}{4}\,,\ -1\right)$

Ejercicio: Dividida la circunsferencia en 6 partes iguales a partir del punto 1, expresar de diversos modos, con el radio $+1$ y -1, las coordenadas polares de los seis puntos de división.

NOTA: La correspondencia biunívoca existente entre los puntos del plano y las coordenadas cartesianas, según vimos en § 6, correspondencia que además es bicontinua, deja de verificarse en las coordenadas polares; pues si bien cada par determina un punto sin ambigüedad, en cambio, cada punto tiene diversos pares de coordenadas. A coordenadas próximas corresponden puntos próximos, pero dos puntos tan próximos como se quiera pueden tener coordenadas muy distantes. Es decir: la correspondencia *punto = función de las coordenadas*, es uniforme y *continua*; pero no la correspondencia: *coordenadas = funciones del punto.*

Ejemplos: Adoptado el intervalo $(0°, 360°)$ para los ángulos, son muy próximos los puntos $(1°, r)$ $(359°, r)$, a pesar de tener argumentos muy distintos; pero se logra la continuidad, adoptando el intervalo $(-180°, +180°)$, pues los dos puntos tienen entonces las coordenadas $(\pm 1°, r)$. O bien, conservando el intervalo $(0°, 360°)$ cabe adoptar las coordenadas $(181°, -r)$, $(179°, -r)$ y se recupera la continuidad.

7. Cambio a coordenadas cartesianas y viceversa. — Si se toma positivo el radio, es decir, $r > 0$. la definición del seno y coseno de la inclinación φ expresa

$$[12] \qquad x = r\,.\,\cos\varphi \qquad\qquad y = r\,.\,\operatorname{sen}\varphi$$

fórmulas que permiten calcular las coordenadas cartesianas ortogonales (x, y) de un punto dado por las polares (φ, r).

Recíprocamente, dadas las coordenadas ortogonales (x, y) se deducen las polares:

$$[13] \qquad \operatorname{tg}\varphi = y/x\,, \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{y}{r}\,, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

pero no queda determinado por su tangente, ni tampoco el rayo, pues hay dos con la misma tangente. Para zanjar la duda deberá atenderse a una de las fórmulas [1] ó [2], pues sabido el signo del seno o del coseno se ve cuál de las dos semirrectas corresponde al vector (x, y). Por esta razón, hemos puesto en [13] dos funciones circulares para determinar el rayo, y lo mismo se podría cambiar una de ellas por el coseno.

Ejercicios: Indicar los pares de funciones circulares, que pueden usarse para determinar el rayo, entre las seis que han sido definidas (fórmulas [1], ..., [6]).

8. **Rotación de ejes rectangulares y rotación del plano.** — Si el par básico U, V de vectores unitarios rectangulares se hace girar el ángulo α (fig. 25), los nuevos vectores son

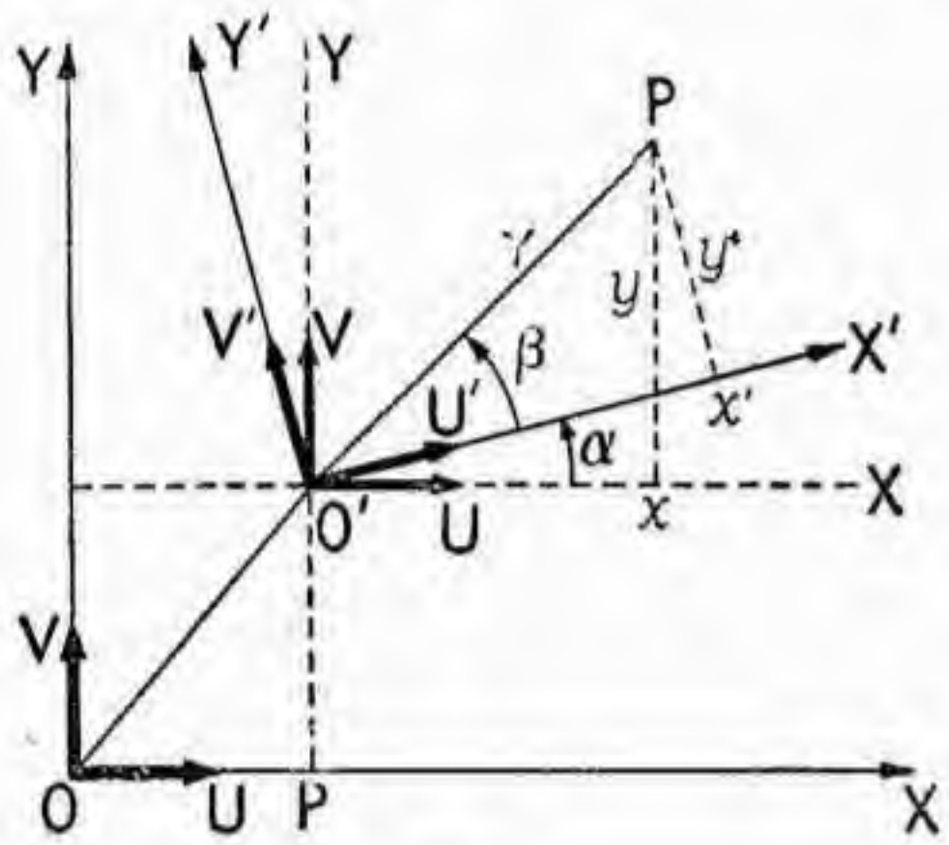

Fig. 25.

$$U'(\cos\alpha \ , \ \operatorname{sen}\alpha)$$
$$V'(-\operatorname{sen}\alpha \ , \ \cos\alpha)$$

y las fórmulas § 7, [10], teniendo en cuenta que los coeficientes α, β, γ, δ valen ahora, respectivamente, $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$, $-\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, se reducen a éstas

$$[14] \quad \begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha \\ y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

de las que se despejan las nuevas coordenadas

$$[15] \quad \begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha \\ y' = -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Además del problema de cambios de ejes, estas fórmulas fundamentales resuelven otras cuestiones importantes, como son las siguientes: teoremas de adición y sustracción de ángulos; cálculo del ángulo de dos rectas; rotación del plano sobre sí mismo, etc.

Sin aplicar la fórmula general § 7, [10], si suponemos conocidas las fórmulas elementales de adición y sustracción de funciones goniométricas que veremos en el número que sigue, las fórmulas fundamentales [14], [15] del cambio de ejes se pueden obtener directamente de la manera siguiente:

En el nuevo par U', V' las coordenadas del punto $P'(x', y')$ son

$$x' = r\cos(\varphi - \alpha) \quad , \quad y' = r\operatorname{sen}(\varphi - \alpha)$$

donde φ es el ángulo que forma OP con el eje X.

Desarrollando y teniendo en cuenta [12] resulta

$$x' = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha \quad , \quad y' = -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha$$

que son las ecuaciones [15] del cambio de ejes. De ellas se pueden despejar x, y obteniendo las [14].

9. **Fórmulas goniométricas de adición y sustracción.** — Si en el plano $x'y'$ que ha girado el ángulo α respecto del xy es OP un vector de argumento β respecto del eje X', y su módulo es 1, las coordenadas de P son por definición

$$x' = \cos\beta \qquad y' = \operatorname{sen}\beta$$
$$x = \cos(\alpha+\beta) \qquad y = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)$$

luego las fórmulas [14] expresan

$$[16] \quad \begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \,.\, \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos\beta + \cos\alpha \,.\, \operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

y poniendo $-\beta$ en lugar de β, teniendo en cuenta las relaciones (§ 9-2) de paridad, resulta

$$[17] \qquad \begin{cases} \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \,.\, \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \,.\, \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos\beta - \cos\alpha \,.\, \operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

Por división resulta

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos\beta \pm \cos\alpha \,.\, \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha \,.\, \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \,.\, \operatorname{sen}\beta}$$

y dividiendo numerador y denominador por $\cos\alpha$, $\cos\beta$

$$[18] \qquad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta}$$

Ejercicio: Dedúzcanse análogamente por división inversa, las fórmulas menos importantes

$$[19] \qquad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \,.\, \operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}$$

10. **Fórmulas de los senos y del coseno.** — Sea la altura h, exterior o interior al ángulo B, sus expresiones en los dos triángulos rectángulos en que es cateto, son:

$$h = a \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} A$$

fórmula entre números *positivos*, válida en todos los casos, que expresa la proporcionalidad entre dos lados y los senos de los

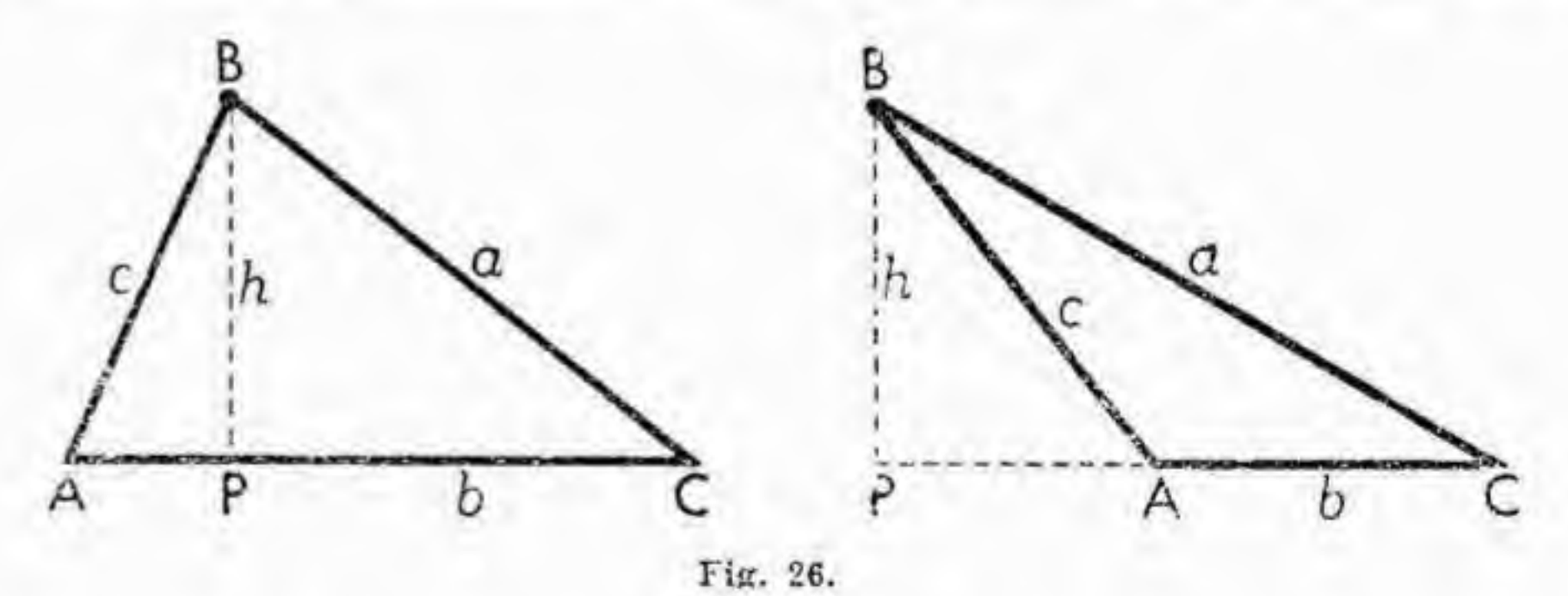

Fig. 26.

ángulos opuestos. Luego aplicada a los tres vértices y sus ángulos opuestos resulta la fundamental

Fórmula de los senos:

$$[20] \qquad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Dibújese la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y se verá que esas tres razones son iguales a 2R, diámetro de dicha circunferencia circunscrita.

Además de esta "fórmula de los senos" resulta como segunda fórmula fundamental la que expresa un lado en función de los otros dos y del ángulo que forman. Basta, en efecto, aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo BPC, cualquiera que sea el ángulo A; y teniendo en cuenta que $AP = c \cos A$, resulta

$$a^2 = h^2 + (b - c \cos A)^2 = h^2 + b^2 - 2bc \cos A + (c \cos A)^2$$

pero teniendo en cuenta que la suma de cuadrados extremos es c^2, resulta la fundamental

Fórmula del coseno:

[21] $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

11. **Notas y complementos.** — 1. *Otras aplicaciones de la fórmula del coseno.* — Dados en coordenadas polares los vectores

$$OP_1\ (\varphi_1, r_1), \qquad OP_2\ (\varphi_2, r_2),$$

la distancia $P_1 P_2$ se calcula así:

[22] $$P_1 P_2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)$$

2. *Abscisas tangentes en los haces de rectas.* — Sea O el centro de un haz de rectas y o la recta origen (fig. 27). Tomemos sobre o un segmento OU igual a la unidad y cortemos el haz por una recta perpendicular a o por el punto U. Cada recta a cortará a esta perpendicular en un punto A tal que $UA = tg(oa)$. Esta distancia $UA = x_A$ se llama *abscisa tangente* de la recta a. Recíprocamente, a cada valor de x comprendido entre $+\infty$ y $-\infty$ corresponderá la recta que forma con o un ángulo cuya tangente trigonométrica es igual a x.

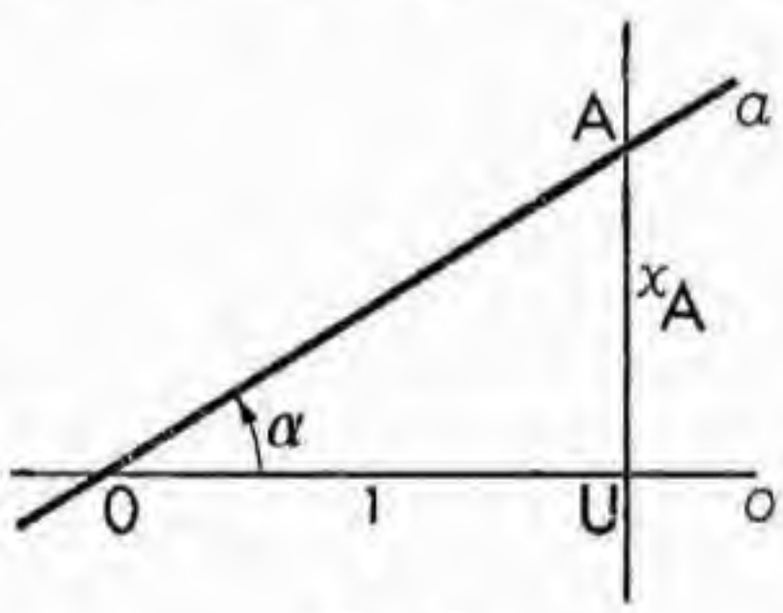

Fig. 27.

La correspondencia es biunívoca si se conviene en que a las abscisas tangentes $\pm\infty$ corresponde la misma recta, a la cual, por definición, es la recta *paralela* a la UA por el centro O.

Veamos cómo se expresa el ángulo de dos rectas mediante sus abscisas tangentes. Sean a, b dos rectas y x_A, x_B sus abscisas tangentes. Apliquemos la fórmula trigonométrica [18] al caso de ser α, β las abscisas angulares de las rectas a, b, respectivamente, y por tanto $\beta - \alpha + k\pi$ el ángulo entre las mismas. Será

[23] $$tg\,(ab) = tg\,(\beta - \alpha) = \frac{x_B - x_A}{1 + x_A x_B}$$

Esta fórmula es muy importante. De ella se deduce, por ejemplo, que la condición necesaria y suficiente para que dos rectas de un haz sean perpendiculares, es que entre sus abscisas tangentes exista la relación $x_A x_B + 1 = 0$.

3. *Sobre la definición de las coordenadas polares.* — Si se construye la gráfica de la curva definida por la ecuación

$$\rho = 1/2 + \cos \varphi \quad \text{(caracol de Pascal)}$$

adoptando la Def. 3, resulta una curva cerrada con punto anguloso, dibujada en la figura 28 en trazo grueso lleno, que no es una curva alge-

braica, ni siquiera analítica, es decir, no es representable por ninguna ecuación en coordenadas (x, y). La ecuación cartesiana resulta por la sustitución [12] con elevación al cuadrado, y es:

$$4(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$$

Esta curva de 4º grado, llamada *caracol de Pascal*, contiene, además del arco precitado, todo un lazo interior (dibujado en trazos), que llega hasta el punto (1/2, 0), lazo que quedaría suprimido adoptando la Def. 3, pero con la Def. 4 obtenemos la curva completa.

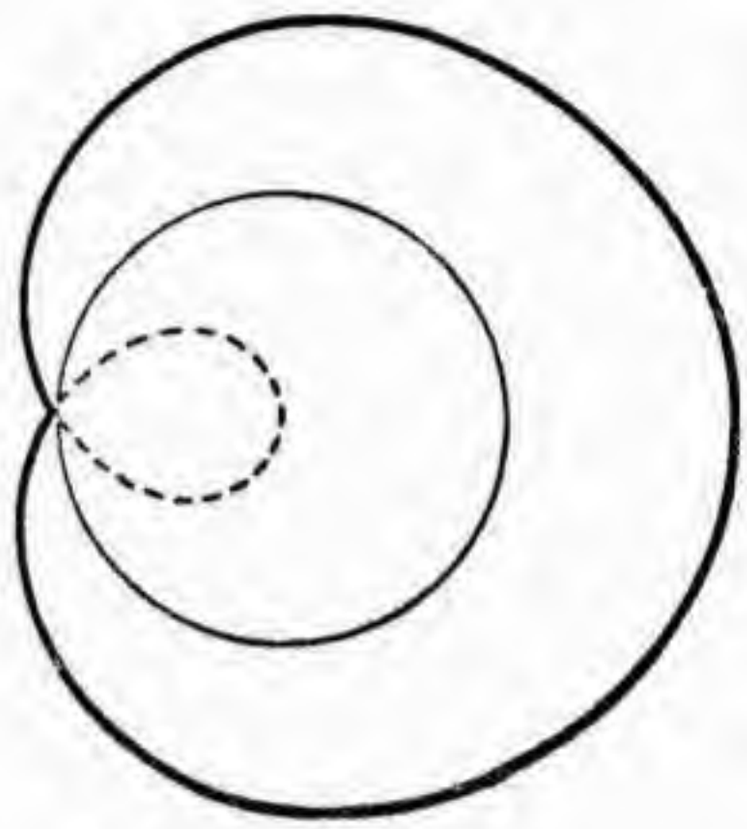

Fig. 28.

EJERCICIOS:

1. — Simplificar las expresiones goniométricas:

a) cos (arc sen 1/2);
b) sen (arc tg 5);
c) tg (arc sen 1/4);
d) sen arc tg a — arc tg b);
e) tg (arc sen a — arc sen b).

2. — Deducir los desarrollos de las funciones sen $3a$, sen $4a$, ..., sen ma.

3. — Simplificar las expresiones:

$$\cos a + \cos 2a + \cos 3a + \ldots + \cos na$$
$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 2a + \operatorname{sen} 3a + \ldots + \operatorname{sen} ma$$

(Multiplíquense término a término por (sen $1/2a$) transformando cada producto en suma o diferencia).

4. — Dibujar las curvas dadas por las siguientes ecuaciones polares:

$$\varrho = 3\cos\varphi \quad , \quad \varrho = \operatorname{sen} 3\varphi \quad , \quad \varrho = \sqrt{\cos\varphi} \quad , \quad \varrho = 3\varphi .$$

5. — Obtener la ecuación polar de cualquier recta. Ídem, de una circunferencia adoptando sobre ella el polo de coordenadas; ídem, un punto interior.

§ 10. PROBLEMAS MÉTRICOS. DISTANCIAS, ÁNGULOS, ÁREAS

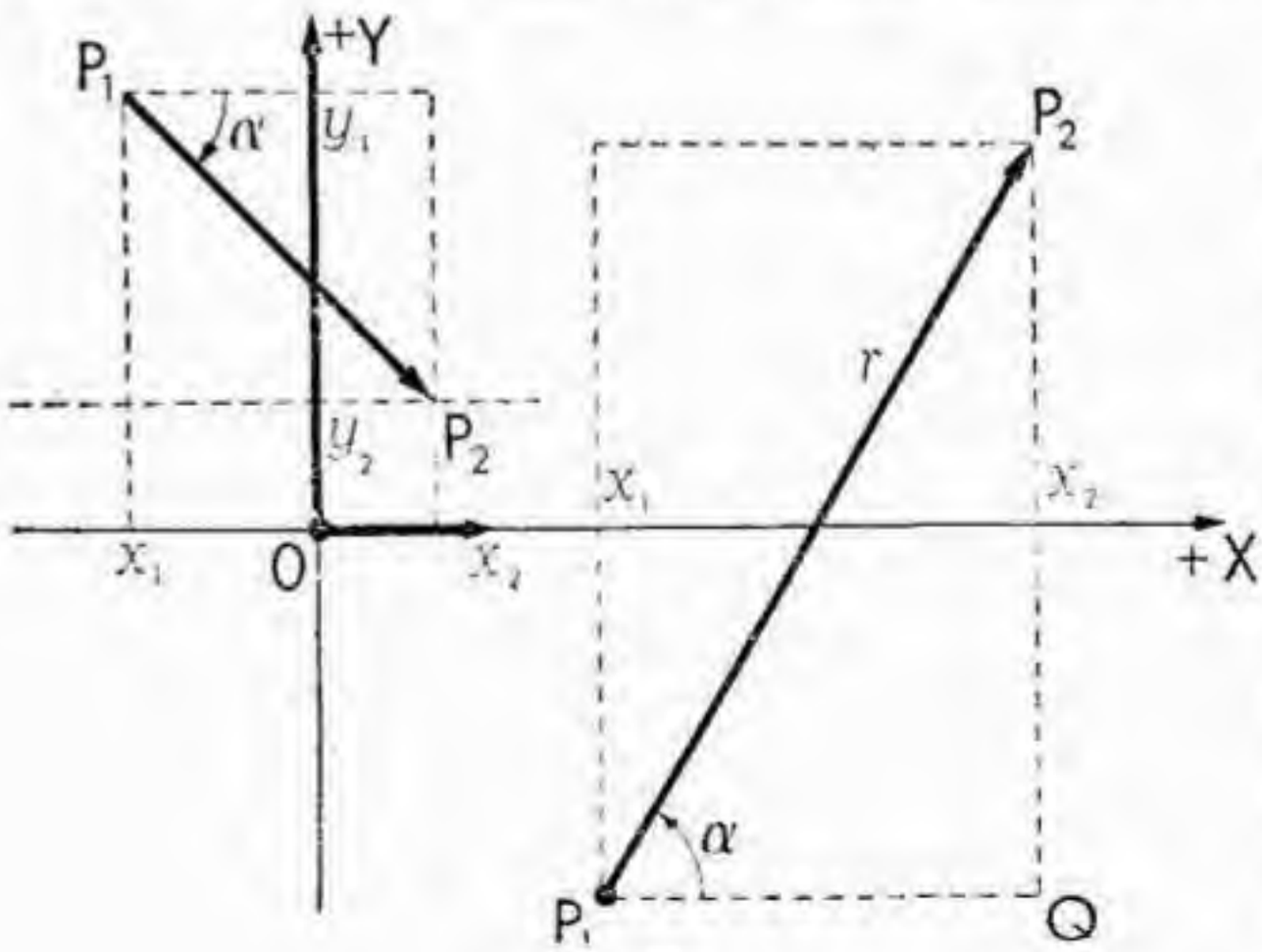

Fig. 29.

1. Distancia entre dos puntos. — El segmento de extremos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ (fig. 29), forma un triángulo rectángulo de hipotenusa P_1P_2 con las paralelas a los ejes trazadas por los dos puntos. Más precisamente, el vector P_1P_2 tiene componentes de medidas

$x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$; luego, llamando α a su argumento y r a la distancia P_1P_2, es

[1] $$x_2 - x_1 = r \,.\, \cos\alpha\,, \qquad y_2 - y_1 = r \,.\, \operatorname{sen}\alpha$$

de donde se despeja

[2] $$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Mientras en [1] las componentes son dirigidas, es decir, tienen signo $\pm$, esta raíz es siempre *positiva*, cualquiera que sea la dirección del vector.

2. **Pendientes y ángulos de rectas.** — En coordenadas rectangulares tienen significado goniométrico el coeficiente angular m y los coeficientes directores A y B de la recta

$$Ax + By = 0, \quad \text{o sea,} \quad y = mx \qquad \left(m = -\frac{A}{B}\right)$$

En efecto, el coeficiente angular $m = y/x$ es, según la definición (§ 9, [13]), la *tangente* de la *inclinación* sobre el eje X. El nombre *pendiente* dado al coeficiente angular m, está justificado. Cuando se dice que un camino tiene la pendiente 5 %, expresamos que por cada 100 unidades horizontales asciende 5 unidades, es decir, el cociente de las ordenadas por las abscisas corresponidentes es 5/100.

El significado goniométrico de los coeficientes A y B es, por tanto, $-A/B = \operatorname{tg}\varphi$; pero es preferible referirnos a la recta perpendicular y no a la recta misma, como veremos en el párrafo siguiente.

Tanto si pasan o no por el origen las rectas de coeficientes angulares m y m', llamando φ y φ' sus argumentos o inclinaciones respecto del semieje $+X$, son m y m' sus *pendientes*, es decir:

$$m = \operatorname{tg}\varphi \quad , \quad m' = \operatorname{tg}\varphi'$$

de donde, según § 9 [18], resulta:

[3] $$\operatorname{tg}(\varphi - \varphi') = \frac{m - m'}{1 + m\,m'}$$

La *condición de paralelismo*, ya sabida, es $m = m'$ y la *condición de perpendicularidad* es $m\,m' = -1$.

Si las rectas están dadas por las ecuaciones generales $Ax + By + C = 0$, $A'x + B'y + C' = 0$, es $m = -A/B$, $m' = -A'/B'$ y por tanto *la condición de paralelismo* se puede escribir, como ya vimos en § 8-2,

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \quad \text{o bien} \quad AB' - BA' = 0$$

y la *condición de perpendicularidad* se escribe

$$AA' + BB' = 0$$

EJEMPLOS Y EJERCICIOS: 1. Comprobar que son paralelas los pares de rectas siguientes:

$$3x - y - 1 = 0 \quad , \quad 6x - 2y + 5 = 0;$$
$$2x - 10y - 5 = 0 \quad , \quad x - 5y + 4 = 0;$$
$$y = 3x \quad , \quad y - 3x + 4 = 0.$$

2. Probar que son perpendiculares los pares de rectas:

$$x - y + 1 = 0 \quad , \quad x + y - 3 = 0;$$
$$3x - y + 1 = 0 \quad , \quad x + 3y + 4 = 0;$$
$$y = 2x - 1 \quad , \quad 2y = -x + 3.$$

3. Trazar la recta que pasa por el punto (1, —2) y es perpendicular a la recta $2x - y + 1 = 0$. Solución: toda recta perpendicular a esta última tiene el coeficiente angular $m' = -1/2$ y por tanto su ecuación es de la forma $y = (-1/2)x + n$; para hallar n basta escribir que esta ecuación se satisface para (1, —2), ó sea, $-2 = -1/2 + n$, de donde $n = -3/2$ y la recta pedida es $y = (-1/2)x - 3/2$, o sea, $2y + x + 3 = 0$.

3. **Ecuación normal de la recta.** — Si p es la distancia del origen a una recta y α la inclinación de OP sobre el eje +X (fig. 30), la ecuación segmentaria (§ 8, [8])

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

sustituyendo $a = \dfrac{p}{\cos\alpha}$, $b = \dfrac{p}{\operatorname{sen}\alpha}$, se transforma en la ecuación siguiente, que suele llamarse normal:

[4] $$x \,.\, \cos\alpha + y \,.\, \operatorname{sen}\alpha = p.$$

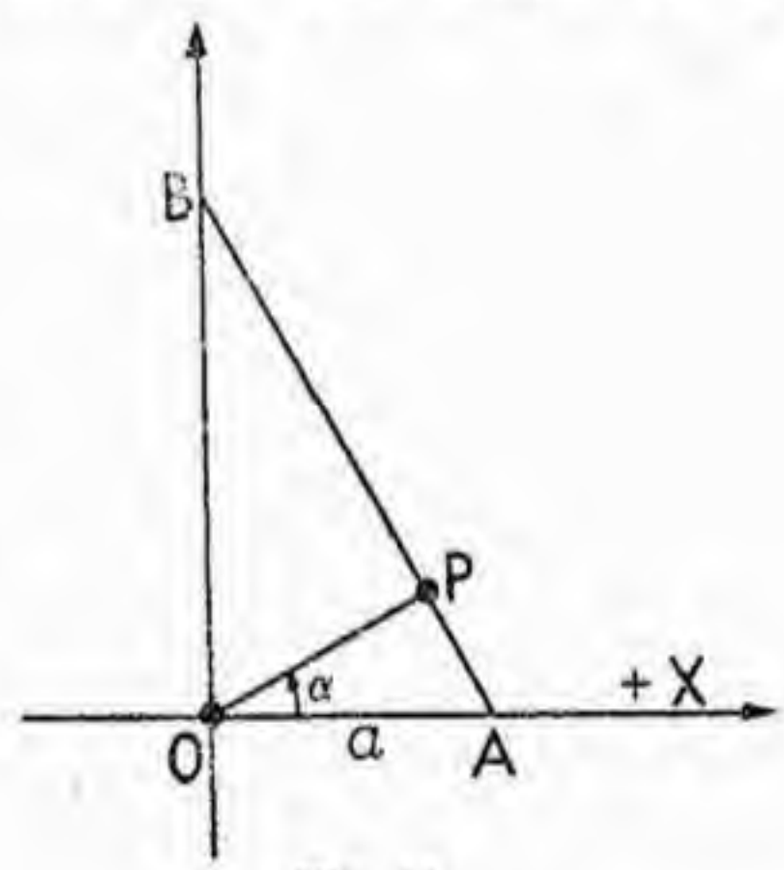

Fig. 30.

La dirección de la recta está determinada por la de su vector normal de origen O y longitud p, cuyos ángulos con los semiejes tienen como cosenos los coeficientes A y B de x e y, que hemos llamado (§ 8-2) *coeficientes directores* de la recta, y que ahora se llamarán *cosenos directores*.

Dada la ecuación $Ax + By = C$, será:

$$\frac{A}{\cos\alpha} = \frac{B}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{C}{p}$$

Como por la proporcionalidad o igualdad de razones, el valor común de las tres es $\sqrt{A^2 + B^2}$, basta dividir los coeficientes A, B y C por $\sqrt{A^2 + B^2}$ para obtener la ecuación normal $A'x + B'y = C'$, cuyos coeficientes tienen los siguientes significados goniométricos

$$A' = \cos\alpha, \quad B' = \operatorname{sen}\alpha, \quad C' = p$$

En resumen:

Dada la ecuación general de una recta $Ax + By + C = 0$, *su ecuación normal es*

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

y en ella el término independiente es igual, en valor absoluto, a la distancia de la recta al origen de coordenadas.

Ejemplos: Dadas las ecuaciones

$$3x - 4y = 1, \qquad 4x - y + 3 = 0$$

se normalizan dividiéndolas por 5 y por $\sqrt{17}$, respectivamente, resultando así las ecuaciones normales:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y = \frac{1}{5}, \quad -\frac{4}{\sqrt{17}}x + \frac{1}{\sqrt{17}}y = \frac{3}{\sqrt{17}}$$

Para la primera recta resultan los valores $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{4}{5}$ que determinan la inclinación $\alpha = 53°8'$ y la distancia desde el origen es $p = \frac{1}{5}$.

Para la segunda recta resulta $\cos\alpha = -\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$, que dan la inclinación (más brevemente deducida de la pendiente $m = 4$) $\alpha = 75°58'$, la distancia resulta $p = 0{,}73$.

4. **Distancia de punto a recta y distancia entre paralelas.** — Puesto que en la ecuación normal el término constante es la distancia desde el origen a la recta, para calcular la distancia a ella desde un punto cualquiera $P_0(x_0, y_0)$ basta trasladar a éste el origen de coordenadas.

Según § 7, [7], si la ecuación de la recta es $Ax + By + C = 0$, en el nuevo sistema de origen (x_0, y_0) su ecuación será $A(x' + x_0) + B(y' + y_0) + C = 0$, cuyo término independiente es $Ax_0 + By_0 + C$. El término independiente de la ecuación normalizada será este mismo número dividido por $\sqrt{A^2 + B^2}$. Por tanto, considerando sólo valores absolutos por simplicidad, se tiene:

Dada una recta por su ecuación general $Ax + By + C = 0$ *y un punto* $P(x_0, y_0)$, *el valor absoluto de la distancia del punto a la recta está dado por*

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

EJEMPLOS: 1. Para hallar la distancia entre las rectas paralelas $2x - y + 1 = 0$, $4x - 2y + 3 = 0$, se deben primero normalizar, dividiendo la primera por $\sqrt{5}$ y la segunda por $\sqrt{20}$. La distancia será entonces igual a la diferencia entre los términos independientes, o sea, $1/\sqrt{5} - 3/\sqrt{20}$.

2. La distancia del punto $P(0, -1)$ a la recta $3x - 4y + 4 = 0$ vale $8/5$.

3. Para hallar la distancia del punto $P(-1, 3)$ a la recta $y = 3x - 1$, hay que escribir ésta en la forma $3x - y - 1 = 0$, resultando en valor absoluto $d = 7/\sqrt{10}$.

Dadas dos rectas paralelas (fig. 31), si normalizamos sus ecuaciones según se ha explicado en el párrafo anterior, es decir, con signo positivo de p, sean las dos ecuaciones así normalizadas:

$$x \,.\, \cos\alpha + y \,.\, \operatorname{sen}\alpha = p \;, \quad x \,.\, \cos\alpha + y \,.\, \operatorname{sen}\alpha = p'$$

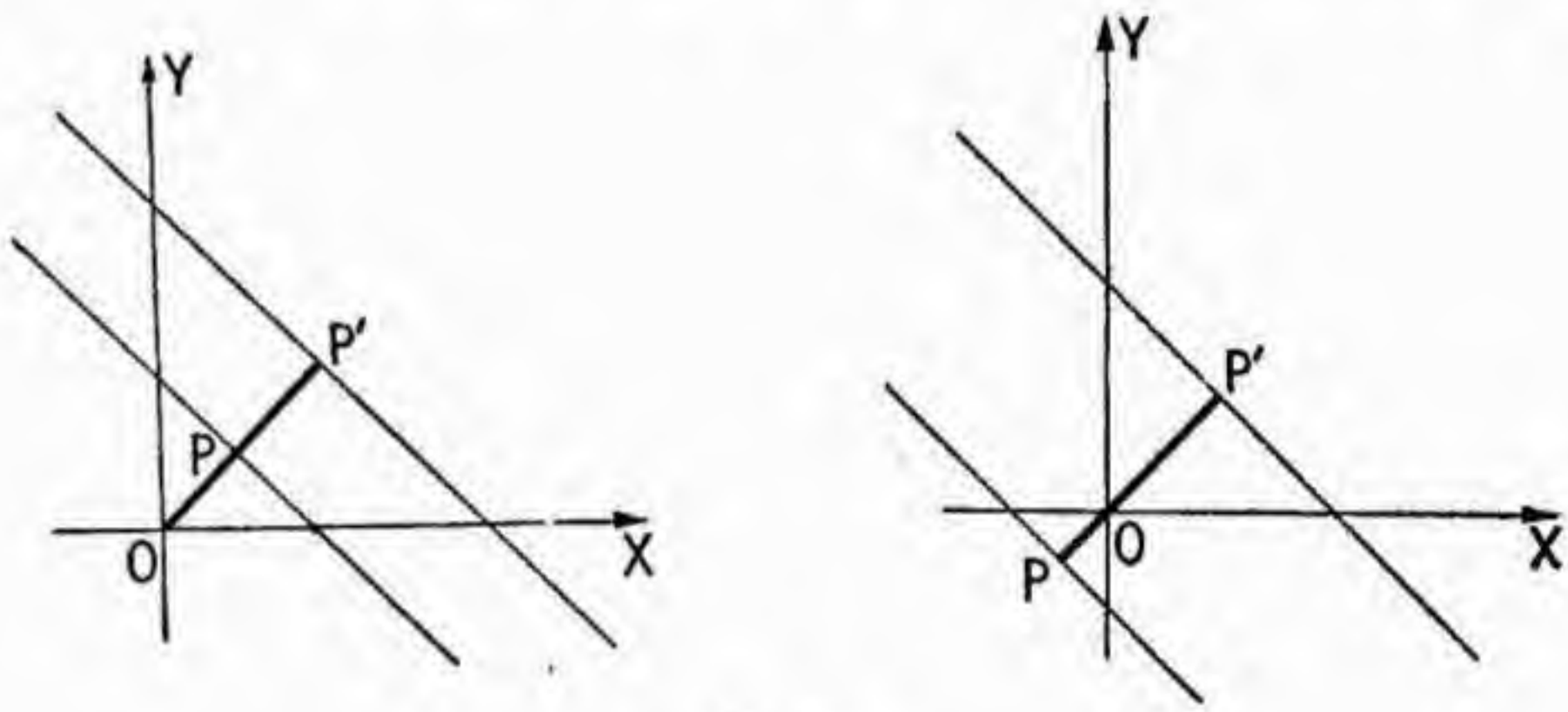

Fig. 31.

siendo los mismos los coeficientes directores de las rectas, la distancia entre ellas será $p' - p$. Si, por el contrario, son opuestos los vectores p y p', resultarán positivos los segundos miembros, pero opuestos los cosenos directores; unificando éstos, cambiando los signos de ambos miembros de una de las ecuaciones. resultará $p' < 0$ y la distancia seguirá expresada por la fórmula $p' - p$, que en este caso es la *suma* de valores absolutos de las distancias desde O a las dos rectas.

Resumen: *Dadas dos rectas paralelas, y normalizadas sus ecuaciones de modo que sus primeros miembros sean iguales, la distancia entre ambas rectas es la diferencia de términos constantes.*

NOTA. Por no ser necesario para ulteriores capítulos, dejamos de lado el estudio del signo de la distancia, en relación con la ordenación adoptada sobre la recta, tema que está minuciosamente tratado en la Geometría Analítica de Fano y Terracini.

5. **Bisectrices de un ángulo.** — Dadas dos rectas por sus ecuaciones normales $P = 0$ y $Q = 0$, las ecuaciones $P = Q$, $P = -Q$ representan el lugar de todos los puntos equidistantes de ambas, es decir, las dos bisectrices del ángulo que forman. Estas fórmulas son aplicables al caso de dos rectas pa-

ralelas $p + C = 0$, $p + D = 0$ (p expresión lineal y C, D constantes), pues la recta $p + C = -(p + D)$, es decir, $2p + C + D = 0$ es la mediatriz. La otra ecuación, obtenida igualando ambas, es la recta impropia.

Ejemplos: 1. Dadas las rectas $3x - 4y = 10$, $4x + 3y = 15$, sus ecuaciones normalizadas son

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y = 2; \quad \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y = 3.$$

Sumando y restando resultan las ecuaciones de las dos bisectrices:

$$7x - y = 25; \qquad x + 7y = 5$$

2. Si las dos rectas son $3x - 4y = 10$, $x + y = 0$, sus normalizadas son

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y = 2; \quad \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 0$$

y las bisectrices

$$\left(\frac{3}{5} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x - \left(\frac{4}{5} \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)y = 2;$$

$$(3\sqrt{2} \pm 5)\,x - (4\sqrt{2} \mp 5)\,y = 10\sqrt{2}$$

3. Obérvese que en el ejemplo 1, habría bastado sumar y restar las dos ecuaciones dadas, para obtener directamente las bisectrices, sin necesidad de normalizar las ecuaciones; pero esta simplificación se presenta por tener las dos ecuaciones el mismo valor $A^2 + B^2$. Igual simplificación se presenta si una de las ecuaciones del Ej. 1 se sustituye por $x - 2\sqrt{6}\,y = C$ o por $\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{7}{\sqrt{2}}y = C$. Compruébese que esa regla de sumar y restar las dos ecuaciones propuestas, para obtener las bisectrices, conduce a resultados falsos en los ejemplos que no presentan esa coincidencia de valores de $A^2 + B^2$.

Entre los casos que no exigen normalización, por cumplir esta condición está el de rectas paralelas $P = C$, $P = D$, siendo C y D constantes cualesquiera.

4. Si las rectas paralelas son $5x - 7y = 8$, $5x - 7y = 10$, la bisectriz, es decir, la paralela media, tiene la ecuación $5x - 7y = 9$, sin necesidad de normalización.

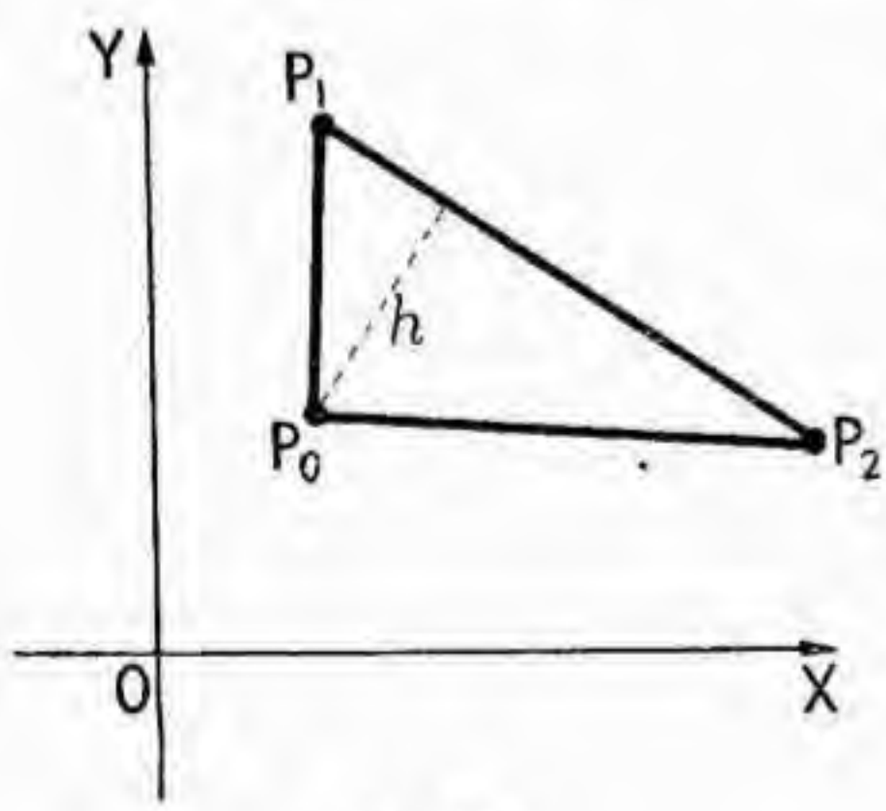

Fig. 32.

6. Área del triángulo. — Si sus vértices son los puntos $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ (fig. 32), la ecuación de la recta P_1P_2, según se demostró en (§ 8, [13]) para coordenadas cartesianas generales, es

$$\triangle(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ó sea $(y_1 - y_2)x - (x_2 - x_1)y = x_2y_1 - x_1y_2$

Ahora, en coordenadas rectangulares, conviene normalizar la ecuación, dividiéndola por

$$|P_1 P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

base del triángulo; y entonces la altura o distancia desde el vértice P_0, según hemos visto en el nº 4, es

$$[5] \qquad h = \frac{\Delta(x_0, y_0)}{|P_1 P_2|}$$

luego el número $\Delta(x_0, y_0)$, es decir, el determinante de los tres vértices, vale $|P_1 P_2| \cdot h$, es decir, el duplo del área del triángulo. En definitiva: El área del triángulo de vértices (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) es

$$[6] \qquad \text{Área} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}$$

Signo del área. — Esta segunda fórmula es muy útil; expresa el área mediante los dos vectores que forman dos lados del triángulo. Si estas componentes son (x_1, y_1) (x_2, y_2), lo que equivale a trasladar los ejes, adoptando P_0 como origen, es

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} x_1 x_2 \left(\frac{y_2}{x_2} - \frac{y_1}{x_1}\right) = \frac{1}{2} x_1 x_2 (m_2 - m_1).$$

Si llamamos P_0 al vértice de abscisa mínima, son $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, y si es $m_2 > m_1$, es decir, positivo, el sentido de circulación $P_0 P_1 P_2$, resulta $\Delta > 0$, siendo en cambio negativo el valor obtenido para el área si el sentido de circulación $P_0 P_1 P_2$ es negativo.

Así como la fórmula $d = b - a$ atribuye al segmento AB de una recta un signo $\pm$ que es como ya vimos (§ 1) acorde con el *sentido* del segmento, así la fórmula [6] del área da ésta con signo $\pm$ según sea el orden circular en que se considera el contorno. Esta asignación al valor de cada área de un signo $\pm$ es debida a Möbius 1827.

7. **Área del polígono.** — Gracias a la introducción del sentido en el área, la descomposición de un polígono en suma de triángulos, a partir de un punto O, alcanza validez general. Si O es interior al polígono $A_1 A_2 \ldots A_n$ (fig. 33), el área de éste es

$$[7] \qquad S = OA_1 A_2 + OA_2 A_3 + \ldots + OA_{n-1} A_n + OA_n A_1$$

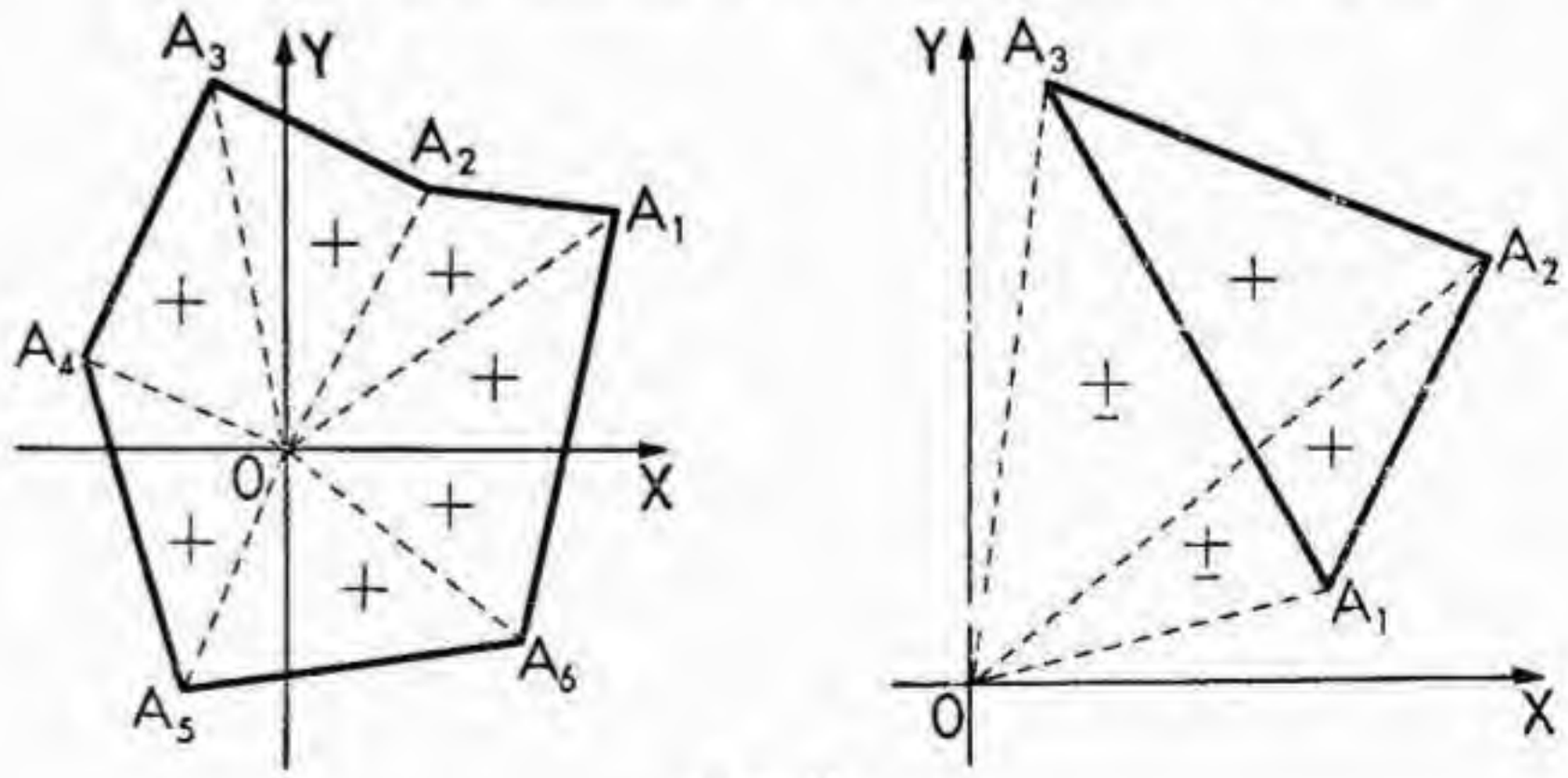

Fig 33.

como se ve, si no hay superposición de triángulos. Todos ellos son positivos, si lo es el contorno, y el área de la suma es la suma de las áreas parciales.

Siendo el origen O interior, cabe que haya triángulos rampantes (dibújese un caso) y forzosamente sucederá ésto si O es exterior. La figura demuestra la validez de la fórmula [7] para el caso del triángulo $A_1 A_2 A_3$, y será ejercicio instructivo la demostración de [7] para todo caso, resultando en definitiva para el duplo del área la fórmula

$$[8] \qquad 2S = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \ldots + (x_n y_0 - x_0 y_n)$$

Basta, en efecto, descomponer el polígono en suma de triángulos no rampantes por segmentos interiores (por ejemplo diagonales), cada uno de los cuales MN pertenece a dos triángulos contiguos MNP + NMQ. Al expresar cada uno de éstos por la descomposición [7], resulta:

$$(OMN + ONP + OPM) + (ONM + OMQ + OQN)$$

desapareciendo el segmento MN y análogamente todos los interiores, quedan pues, los del contorno $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ..., $A_n A_1$, es decir, la expresión [8].

8. **Método de los trapecios y método de los ángulos.** — En lugar de formar triángulos con el origen, es preferible considerar los trapecios de los lados $A_r A_{r+1}$ con sus proyecciones sobre el eje X (fig. 34), y basta multiplicar la altura $x_r - x_{r+1}$ por la suma $y_r + y_{r+1}$ para tener el duplo del área.

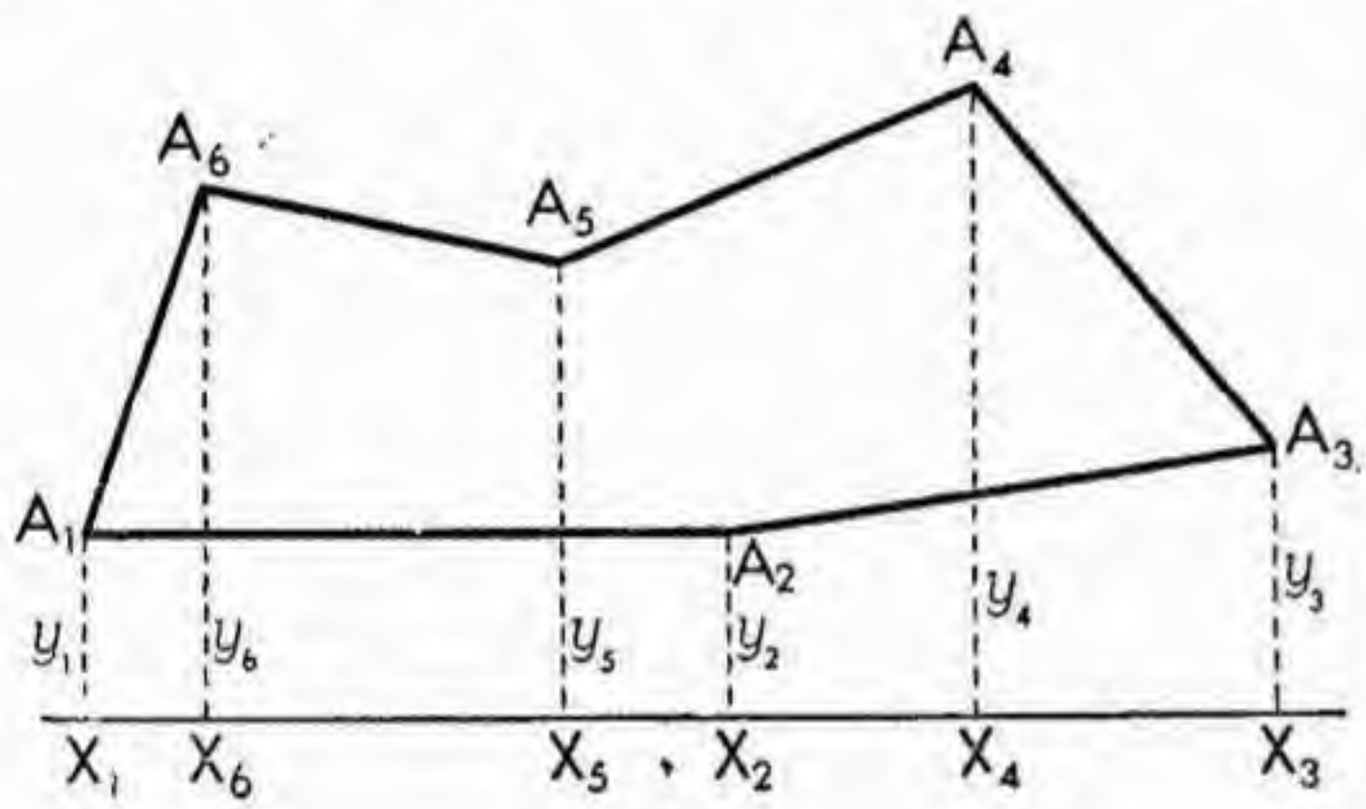

Fig. 34.

Suponiendo todas las ordenadas positivas, como siempre se logrará sumándoles una constante, es decir, trasladando el eje X, si es $x_r < x_{r+1}$ el trapecio correspondiente debe ser negativo; y positivo en caso contrario, luego:

$$[9] \qquad 2S = (x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \\ + \ldots + (x_n - x_0)(y_n + y_0)$$

cuyo desarrollo coincide con [8]; pero es preferible calcular directamente [9] que sólo exige n productos, mientras [8] exige $2n$; sin embargo, ni una ni otra son adecuadas para los cálculos de agrimensura, porque los elementos que se miden sobre el terreno son longitudes de los lados de cada poligonal y ángulos de cada dos lados consecutivos.

Calculadas, por diferencias sucesivas, los rumbos o inclinaciones de los vectores $A_r A_{r+1}$ (fig. 35) sobre el eje adoptado, las coordenadas de A_{r+1} se deducen de las A_r sumándoles $a_r \cos \alpha_r$ y $a_r \operatorname{sen} \alpha_r$, luego las diferencias que componen [8] se reducen así:

$$x_r\, y_{r+1} - x_{r+1}\, y_r = x_r\,(y_r + a_r \operatorname{sen} \alpha_r) - (x_r + a_r \cos \alpha_r)\, y_r =$$
$$= a_r\,(x_r \operatorname{sen} \alpha_r - y_r \cos \alpha_r)$$

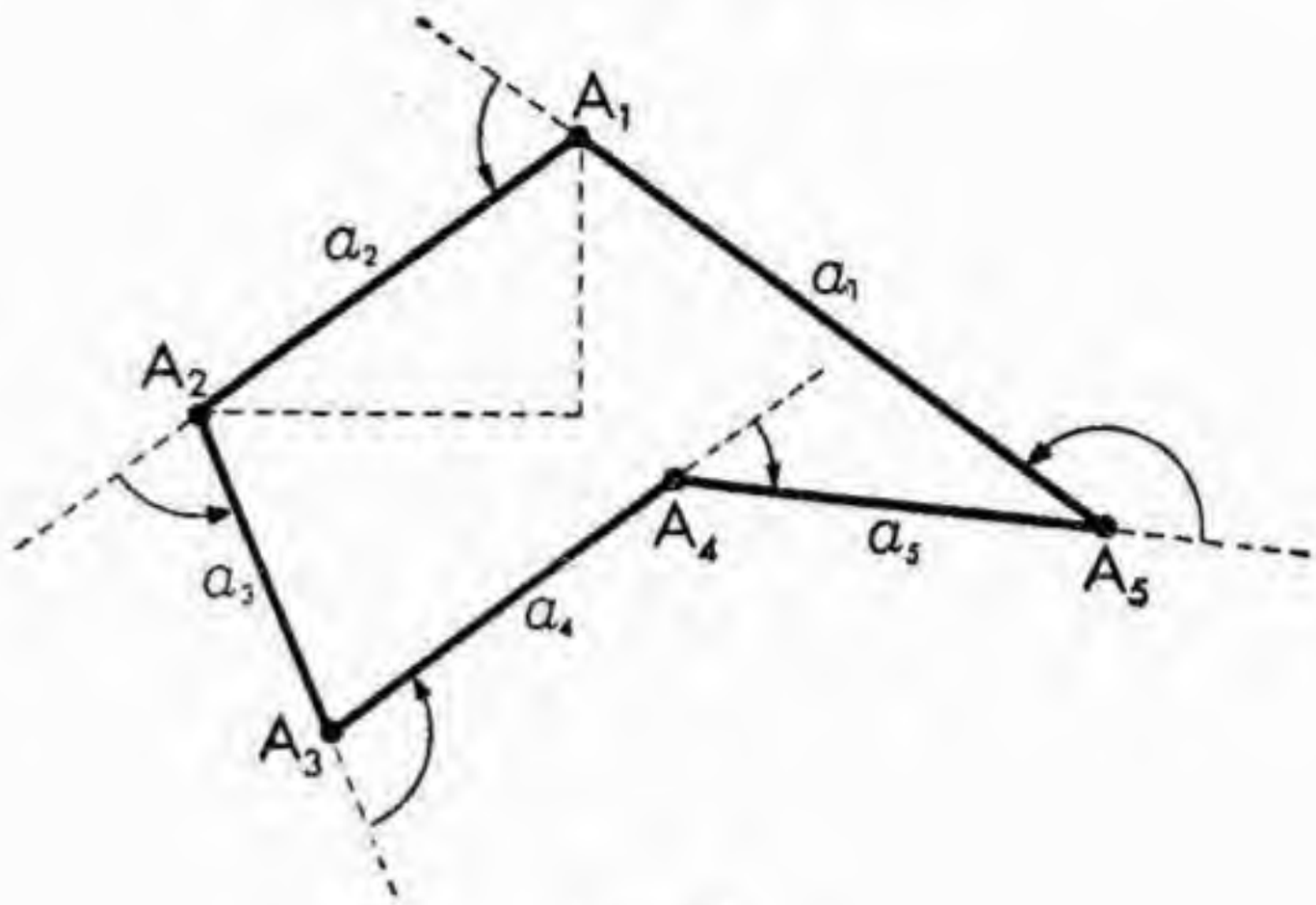

Fig. 35.

Los productos y sumas necesarios para calcular el área S se disponen en planillas especiales para simplificar el cálculo.

Ejercicios

1. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 3), y cuya pendiente es 2.

2. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (5, —1), y cuya pendiente sea la misma que la de la recta determinada por los puntos (0, 3) y (2, 0).

3. Encontrar al ecuación de la recta que pasando por el punto (1/3, 2/3), tenga pendiente infinita.

4. Un punto está situado a 8 unidades del origen y el coeficiente angular de la recta que lo une al origen es —1/4. ¿Cuáles son las coordenadas de este punto?

5. Encontrar la ecuación de la recta que pasando por el punto de intersección de $6x - 2y + 8 = 0$, y de $4x - 6y + 3 = 0$, sea perpendicular a $5x + 2y + 6 = 0$.

6. ¿Cuál es la ecuación de la recta perpendicular a la recta de ecuación: $2x - 3y + 7 = 0$ en el punto medio del segmento comprendido entre los ejes coordenados?

7. Encontrar el ángulo agudo que forman las dos rectas de ecuaciones $2x - y + 8 = 0$; $2x + 5y - 4 = 0$.

8. Encontrar el ángulo agudo que forman las rectas trazadas desde el origen a los puntos de trisección de la parte de la recta de ecuación $2x + 3y - 12 = 0$, comprendida entre los ejes coordenados.

9. Encontrar la ecuación de las rectas que pasan por el punto (4, —3), y forman un ángulo de 45° con la recta de ecuación $3x + 4y = 0$.

10. La base de un triángulo está formada por la recta que une los puntos (—3, 1), (5, —1). ¿Cuál es la distancia del tercer vértice (6, 5) a la base?

11 Por el punto de intersección de dos rectas L_1, L_2 se desea trazar una recta que forme con los ejes un triángulo de área prefijada.

Ejemplo: $L_1 = 2x - y + 2 = 0$; $L_2 = x - y + 1 = 0$, area $= 3/2$.

12. En un triángulo ABC, rectángulo en A, se traza una de las bisectrices BD, que encuentra en D al lado AC y en E a la altura AH. Se traza por E una paralela FG a BC, limitada en F sobre AB, y en G sobre AC. Demuéstrese que AD = GC, y que el ángulo DHF, es recto.

13. Encontrar la distancia entre las dos paralelas: $2x + 3y - 8 = 0$; $2x + 3y - 10 = 0$.

14. Hállese la ecuación de una recta que pase por el punto común a las L_1 y L_2, y diste del punto P(0, 1), una longitud igual a $1/\sqrt{5}$. $L_1 = x + 2y - 1 = 0$; $L_2 = 2x - y + 3 = 0$.

15. Dados dos ejes perpendiculares OX, OY, y una recta que los encuentra en A y B, se proyecta el punto O en C, sobre AB, y luego se trazan las paralelas CD y AD, CE y BE a los ejes y se proyecta el punto C, en P y Q sobre los ejes.

Demostrar:

1º) El coeficiente angular de DE, es el cubo del de AB

2º) Las rectas PQ, AB, DE, son concurrentes.

3º) Si llamamos I al punto común, tendremos $\dfrac{IP}{IQ} = \dfrac{\overline{DA}^2}{\overline{OB}^2}$

16. Encontrar la ecuación de la recta determinada por los puntos (1, 1); (—2, —3) y sobre ella los puntos que están a 15 unidades de los puntos dados.

17. Desde el punto (9, 5) se bajan perpendiculares a los lados del triángulo cuyos vértices son (8, 8), (0, 8), (4, 0). Probar que los pies de estas tres perpendiculares están sobre una misma recta.

§ 11. Complementos al Capítulo II

Las coordenadas cartesianas generales, estudiadas en §§ 6, 7, 8, son el instrumento adecuado para el estudio de las propiedades lineales o afines, intersecciones, proyecciones, paralelismo, ..., mientras que para el estudio de los problemas métricos (distancias, ángulos, perpendicularidad, áreas, ...), hemos adoptado el sistema ortogonal. Pero esta separación no puede mantenerse absolutamente, pues adoptados ejes oblicuos surgen a veces ciertas cuestiones métricas que es preciso resolver dentro de este sistema. Veamos la complicación que acarrea este uso de sistema no adecuado al problema.

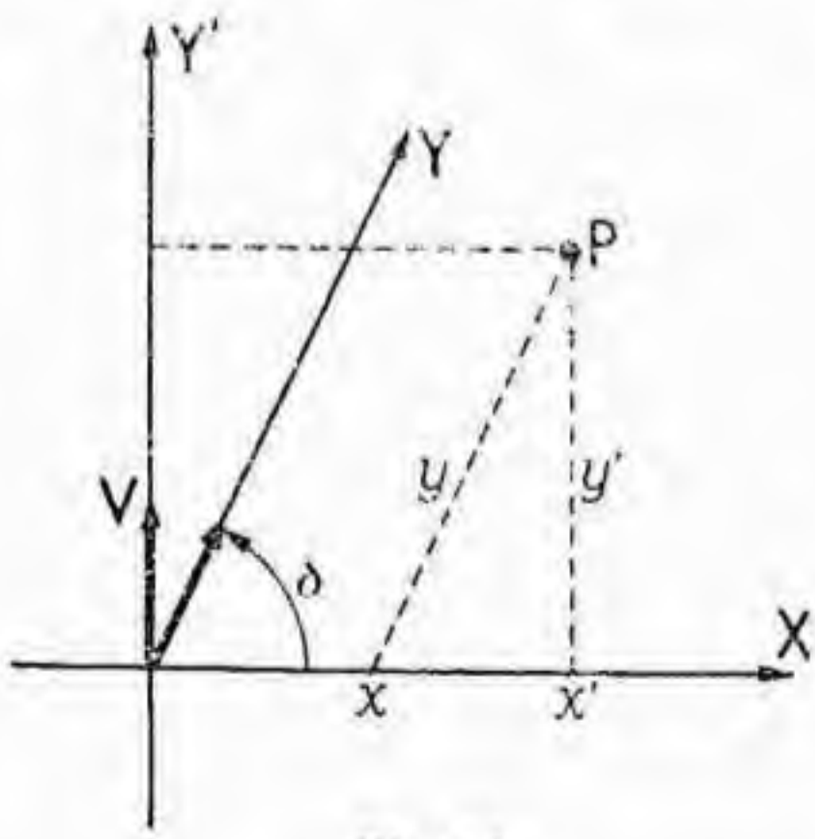

Fig. 36.

1. *Cambio de eje Y por el ortogonal al X.* Si el eje Y oblicuo al X se cambia por el Y' ortogonal (fig. 36), conservando la misma unidad V el tránsito de las coordenadas oblicuas (x, y) a las ortogonales (x', y') es inmediato:

[1]
$$\left.\begin{aligned} x' &= x + y \,.\, \cos\delta \\ y' &= y \,.\, \operatorname{sen}\delta \end{aligned}\right\} \text{ o inversamente } \left\{\begin{aligned} x &= x' - y' \operatorname{ctg}\delta \\ y &= y'/\operatorname{sen}\delta \end{aligned}\right. \quad [2]$$

fórmulas de frecuente uso cuando se presente algún problema métrico.

Veamos algunos.

3 *Perpendicularidad.* La recta $y = mx$ tiene como nueva ecuación, en el sistema ortogonal (x', y').

$$y' = m' x' \qquad \text{siendo } m' = \frac{m \,.\, \text{sen}\, \delta}{1 + m \cos \delta}$$

Como la perpendicularidad en coordenadas ortogonales está expresada por la condición $m'_1 \,.\, m'_2 = -1$ su expresión en oblicuas, será:

$$m_1 \,.\, m_2 \,\text{sen}^2 \theta + (1 + m_1 \cos \theta)(1 + m_2 \cos \theta) = 0$$

que simplificada se reduce a ésta:

[3] $$m_1 \,.\, m_2 + (m_1 + m_2) \cos \theta = -1$$

Si hubiéramos partido de ella, se deduciría como caso particular para $\theta = 90°$ la fórmula $m_1 \,.\, m_2 = -1$.

b) *Coeficiente angular.* Por división de las expresiones y simplificación en el sistema ortogonal se llega a la fórmula siguiente, que más brevemente resulta como inmediato corolario del teorema de los senos:

$$m = \frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\, \alpha}{\text{sen}\,(\theta - \alpha)}$$

y en particular, para $\theta = 90°$, es $m = \text{tg}\, \alpha$, como ya sabíamos.

2. *Distancia entre dos puntos.* La fórmula del coseno, aplicada al triángulo que forma el radio vector con los segmentos coordenados, expresa el radio vector en coordenadas oblicuas:

[4] $$r^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta$$

fórmula de uso frecuente, válida en todos los cuadrantes (fig. 37). En efecto, el tercer término del trinomio, tiene el valor siguiente:

cuadrante	I	$-2xy \cos(180° - \theta)$
"	II	$-2(-x)y \cos \theta$
"	III	$-2(-x)(-y) \cos(180° - \theta)$
"	IV	$-2x(-y) \cos \theta$

es decir, en todos los casos resulta la expresión [4].

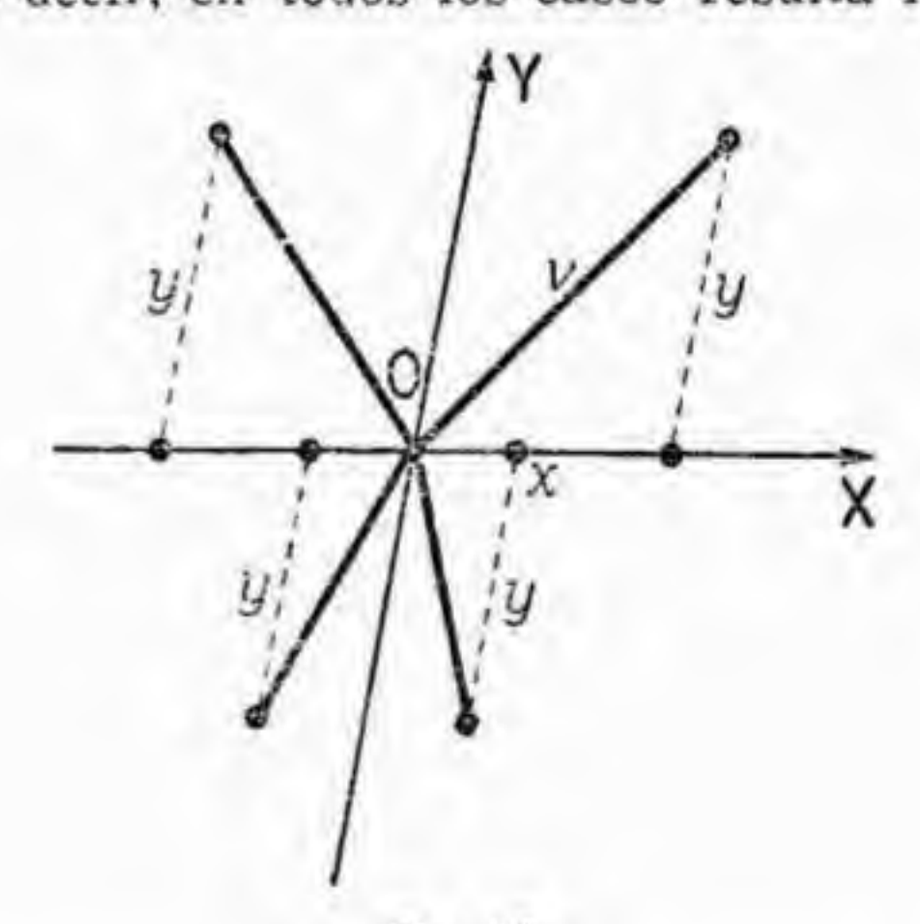

Fig. 37.

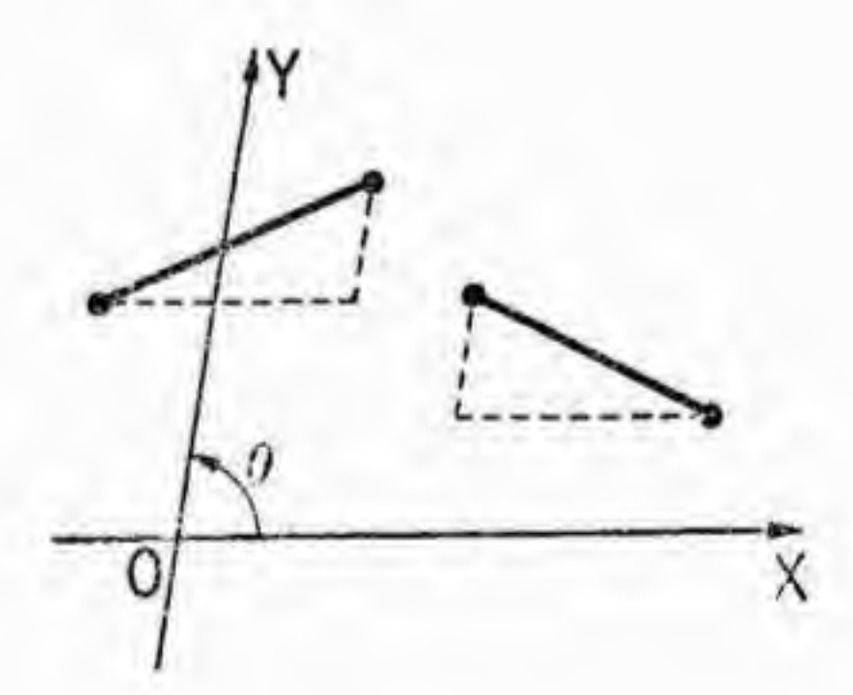

Fig. 38.

Más general: dados los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, el mismo teorema del coseno da la expresión siguiente para la distancia entre los dos puntos:

[5] $$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \cos \theta$$

fórmula que es consecuencia inmediata de la [4].

Obsérvese que los cuatro casos allí considerados se reducen a dos según que la recta de unión de los dos puntos tenga su dirección en los cuadrantes I-II o bien II-IV, como salta a la vista en la figura 38.

3. *Cosenos directores en coordenadas oblicuas.* Proyectando el vector $OP = OA + AP$ sobre los ejes OP, X é Y, resulta respectivamente:

$$\varrho = x \,.\, \cos XP + y \,.\, \cos YP$$
$$\varrho \,.\, \cos PX = x + y \cos YX$$
$$\varrho \,.\, \cos PY = x \,.\, \cos YX + y$$

relaciones lineales homogéneas cuya compatibilidad exige la anulación del determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos XP & \cos YP \\ \cos PX & 1 & \cos YX \\ \cos PY & \cos YX & 1 \end{vmatrix} = 0$$

luego resulta la ecuación

$$\cos^2 XP + \cos^2 YP = \operatorname{sen}^2 \theta + 2 \cos XP \,.\, \cos YP \,.\, \cos \theta$$

que es la relación fundamental que liga los cosenos directores en coordenadas oblicuas.

Ejercicios

1. Dada la recta $3x - 2y + 1 = 0$, hallar las rectas paralelas a ella que distan del origen dos unidades.

2. Ecuación de una recta que pase por $P(4, 3)$ y corte a los ejes coordenados en los puntos A, B tales que $OA \,.\, OB = 54$.

3. Dados los puntos $A(0, 0)$, $B(0, -3)$, $C(5, 4)$ hallar las ecuaciones de las tres alturas y comprobar que pasan por un mismo punto. Lo mismo con las tres medianas.

Capítulo III

CIRCUNFERENCIA Y FAMILIAS DE CIRCUNFERENCIAS

§ 12. Circunferencia y círculo

1. Definición y ecuación de la circunferencia.— Def. 1. Se define la circunferencia como el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo del mismo, denominado *centro*. A la distancia constante de los puntos de la circunferencia al centro se denomina *radio*. Vamos a estudiar analíticamente la circunferencia en un sistema de ejes ortogonales[1] (fig. 39).

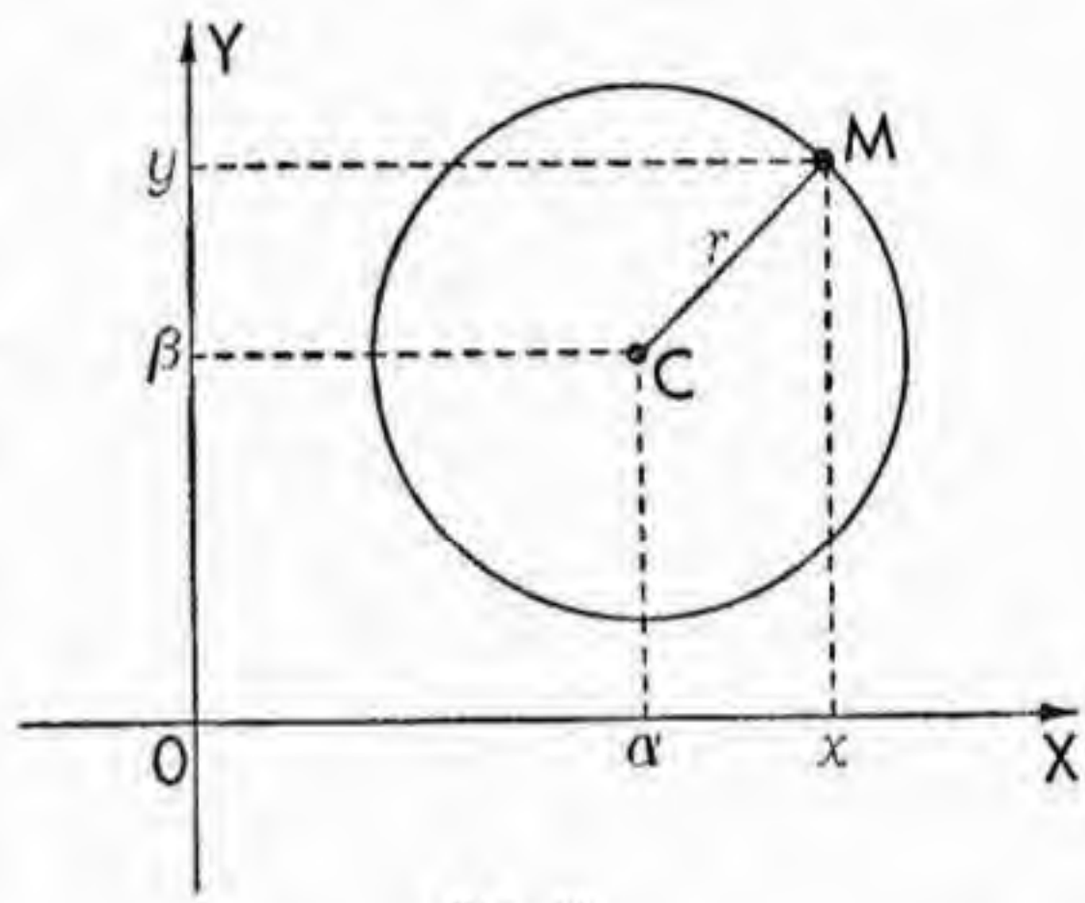

Fig. 39.

De la expresión analítica de la distancia (§ 10-1) se deduce que si (α, β) son las coordenadas del centro y r es el radio, la condición necesaria y suficiente para que la distancia de un punto $M(x, y)$ al centro sea igual a r, es

$$[1] \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

luego ésta es la *ecuación de la circunferencia*. Recíprocamente, a toda ecuación de este tipo corresponde una circunferencia de centro (α, β) y radio r.

Desarrollando [1] y poniendo $\delta = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$ tendremos la ecuación de la circunferencia bajo la forma

$$[2] \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \delta = 0$$

y es claro que siempre que se cumpla la condición $(\alpha^2 + \beta^2 - \delta > 0)$, toda ecuación del tipo [2] representará una circunferencia de centro (α, β) y radio r, tal que $r^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \delta$.

[1] El estudio en coordenadas rectangulares se justifica por intervenir en la definición de la circunferencia en forma esencial el concepto métrico de distancia.

EJEMPLOS: 1. La ecuación de la circunferencia de centro $(-3, 1)$ y radio 4 es

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 16, \quad \text{o sea,} \quad x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0.$$

2. La ecuación de la circunferencia de centro el origen y radio r es

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

3. La ecuación de la circunferencia de centro $(-1, 0)$ y radio 1 es

$$(x+1)^2 + y^2 = 1, \quad \text{o sea,} \quad x^2 + y^2 + 2x = 0.$$

La ecuación más general posible de segundo grado es de la forma

$$[3] \qquad ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$$

Para que ella represente una circunferencia es necesario que exista una ecuación del tipo [2] que tenga sus coeficientes proporcionales a los de la [3]. Es decir, que se tiene que cumplir

$$a = b = \frac{g}{-\alpha} = \frac{f}{-\beta} = \frac{c}{\delta} \quad ; \quad h = 0.$$

Por consiguiente se han de cumplir las condiciones siguientes: $a = b \neq 0$ (para que la ecuación sea de segundo grado), y además

$$\frac{g^2}{a^2} + \frac{f^2}{a^2} - \frac{c}{a} = \alpha^2 + \beta^2 - \delta > 0 \quad \text{ó} \quad g^2 + f^2 - ac > 0$$

En resumen: *Las condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación de segundo grado* [3] *represente una circunferencia son*:

$$[4] \qquad a = b \neq 0, \quad h = 0, \quad g^2 + f^2 - ac > 0$$

Cuando $a = b = 1$ se dice que la ecuación es *normal*.

Suponiendo la ecuación *normal*, o sea $a = b = 1$, las *coordenadas del centro* y el *radio* de la circunferencia [3] (supuesto ya $h = 0$), están dados por

$$\alpha = -g, \quad \beta = -f, \quad r^2 = g^2 + f^2 - c.$$

Si es $g^2 + f^2 - c < 0$, se dice que se trata de una circunferencia de *radio imaginario*. Si $g^2 + f^2 - c = 0$, la ecuación de la circunferencia se puede escribir $(x+g)^2 + (y+f)^2 = 0$, que sólo se satisface para el punto *real* $x = -g$, $y = -f$, pero puede decirse que representa dos rectas imaginarias, a saber: $y + f + i(x+g) = 0$, $y + f - i(x+g) = 0$, puesto que el producto de estas dos ecuaciones es la ecuación de la circunferencia.

EJEMPLOS: 1. El centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - y = 0$ son $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$, $r = 1/2$.

2. El centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = 0$ son $\alpha = 1$, $\beta = -1/2$, $r = 3/2$.

2. **Intersección de una recta con una circunferencia.** — El problema geométrico de determinar la intersección de una recta con una circunferencia es analíticamente el de resolver el sistema

$$[5] \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \quad ; \quad mx+ny+p=0$$

formado por las ecuaciones de la recta y de la circunferencia. El sistema, estando formado por una ecuación de primer grado y una de segundo, se reduce a la resolución de una ecuación de segundo grado; luego puede tener dos soluciones reales distintas, una solución real doble, o dos soluciones imaginarias conjugadas. En el primer caso la recta es secante a la circunferencia y hay dos puntos comunes. En el segundo caso se dice que *la recta es tangente a la circunferencia. La recta y la circunferencia tienen entonces comunes un sólo punto.* En el tercer caso no hay puntos comunes a la recta y a la circunferencia.

Dados en el plano una circunferencia y una recta, tomemos como origen de coordenadas el centro de la circunferencia y como eje OX la perpendicular a la recta. Las ecuaciones de la circunferencia y de la recta son

$$x^2+y^2=r^2 \quad , \quad x=a$$

y eliminado x llegamos a la ecuación $y^2=r^2-a^2$ que tiene dos soluciones, una o ninguna, según que se tenga $r>a$, $r=a$ ó $r<a$, luego (como a es la distancia del centro a la recta), deducimos que:

La recta tiene con la circunferencia dos puntos comunes, uno o ninguno, según que su distancia al centro sea menor, igual o mayor que el radio.

3. **Ecuación de la tangente a la circunferencia en un punto.** — Sea la circunferencia de ecuación $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ y $M(x_0, y_0)$ un punto de la misma (fig. 40). Consideremos la ecuación de la familia de rectas $y-y_0=m(x-x_0)$, que pasan por el punto (x_0, y_0), con excepción de la $x=x_0$.

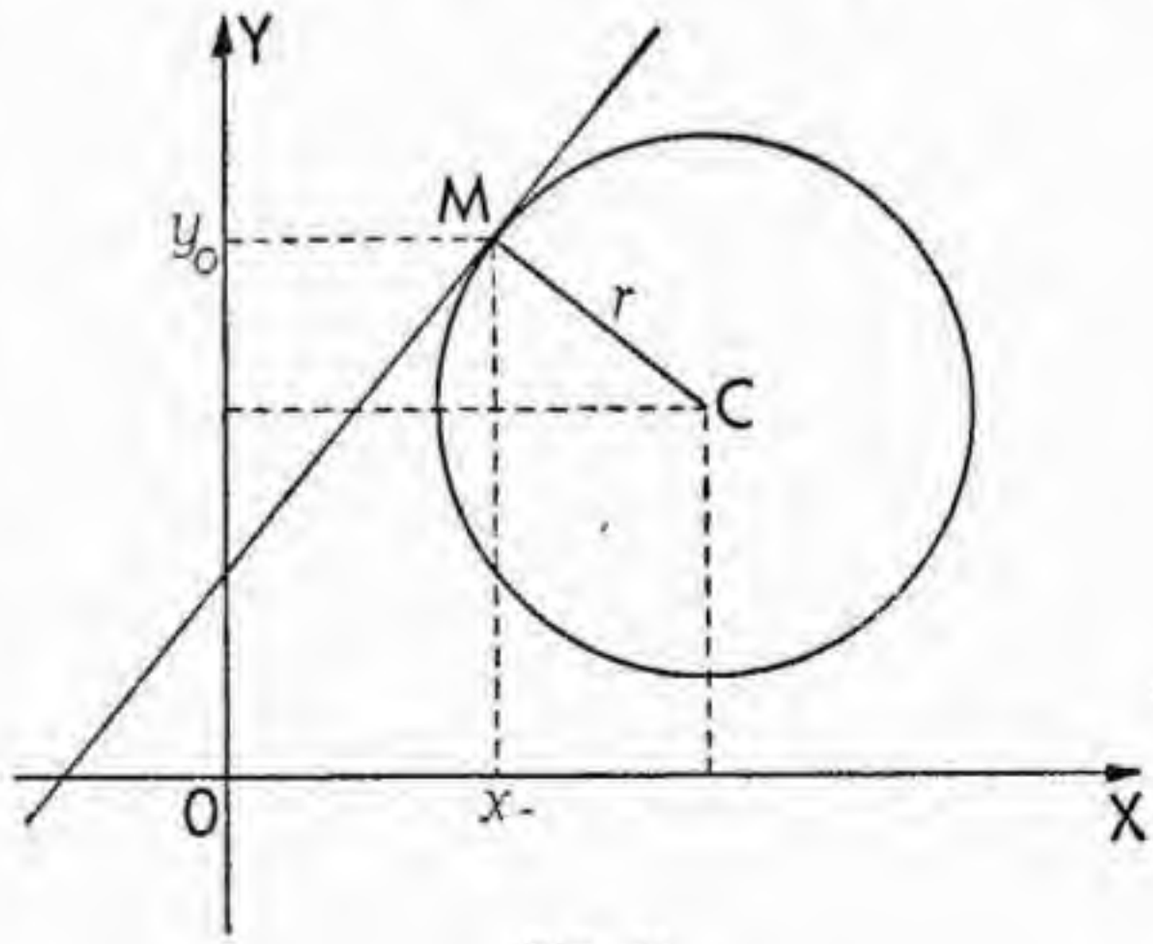

Fig. 40.

Para determinar la tangente a la circunferencia en dicho punto hay que determinar el valor de m tal que el sistema de las ecuaciones de la circunferencia y de la recta, tenga una sola solución doble. Para ello la ecuación en x

$$[6] \qquad (x-\alpha)^2 + [y_0 + m(x-x_0) - \beta]^2 = r^2$$

tiene que admitir la raíz doble x_0. Como se puede ver en cualquier curso de Álgebra[1] es para ello necesario y suficiente, puesto que x_0 es raíz de la ecuación, que la ecuación obtenida derivando [6] respecto de x,

$$2(x-\alpha) + 2[y_0 + m(x-x_0) - \beta]m = 0$$

tenga también x_0 como raíz. Es decir, que se tenga

$$x_0 - \alpha + (y_0 - \beta)m = 0$$

y si $y_0 \neq \beta$ es para ello necesario y suficiente que se tenga

$$m = -\frac{x_0-\alpha}{y_0-\beta},$$

luego la ecuación de la tangente es

$$y - y_0 = -\frac{x_0-\alpha}{y_0-\beta}(x-x_0) \qquad \text{o sea:}$$

$$[7] \qquad (x-x_0)(x_0-\alpha) + (y-y_0)(y_0-\beta) = 0.$$

Queda ahora el caso en que $y_0 = \beta$; entonces debe ser $x_0 = \alpha + r$ y la recta $x = x_0$ es ahora tangente a la circunferencia. Basta ver, en efecto, que poniendo $x = x_0$ en la ecuación [6] se reduce dicha ecuación a la $(y-\beta)^2 = 0$, que tiene la solución doble $y = \beta$.

Si en [7] hacemos $y_0 = \beta$, $x_0 = \alpha \pm r$ la ecuación toma la forma $x = x_0$. Podemos, pues, enunciar el teorema siguiente:

La ecuación [7] *es la ecuación general de la tangente a la circunferencia de centro* (α, β) *y radio* r *en el punto* (x_0, y_0) *de la misma.* Cuando la circunferencia tiene su centro en el origen, la ecuación toma la forma $xx_0 - x_0^2 + yy_0 - y_0^2 = 0$, y como $x_0^2 + y_0^2 = r^2$ se puede poner en la forma

$$[8] \qquad xx_0 + yy_0 = r^2.$$

La recta que une el centro (α, β) con el punto (x_0, y_0) tiene como ecuación

$$[9] \qquad (x-x_0)(y_0-\beta) - (y-y_0)(x_0-\alpha) = 0$$

y se prueba inmediatamente que las rectas de ecuaciones [7]

[1] Ver, po rejemplo: REY PASTOR, PÍ CALLEJA, TREJO: *Análisis Matemático*, Vol. I, pág. 532.

y [9] son perpendiculares. Obtenemos así analíticamente el conocido teorema de la geometría clásica:

La tangente a una circunferencia en un punto es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.

EJEMPLOS: 1. Para hallar la tangente en el origen ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$) a la circunferencia $x^2 + y^2 - x + 2y = 0$, basta observar que el centro es $\alpha = 1/2$, $\beta = -1$ (ver nº anterior) y por tanto, según [7], la tangente buscada es

$$-(1/2)x + y = 0, \quad \text{o sea,} \quad x - 2y = 0.$$

2. La tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8 = 0$ en el punto $(2, -2)$ de la misma, según [8], es $2x - 2y - 8 = 0$.

4. **Intersección de dos circunferencias.** — Si las circunferencias tienen como ecuaciones

$$[10] \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \delta = 0 \\ x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \delta' = 0 \end{cases}$$

el problema de buscar los puntos comunes a las dos circunferencias es el de buscar las soluciones de este sistema de ecuaciones, que es equivalente al [10]:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \delta = 0 \\ 2(\alpha' - \alpha)x + 2(\beta' - \beta)y + \delta - \delta' = 0 \end{cases}$$

obtenido restando la segunda ecuación de la primera, sistema de dos ecuaciones, una de segundo grado y otra de primero, que puede tener dos soluciones reales distintas, una solución real doble o dos imaginarias; las dos circunferencias tendrán entonces respectivamente, dos puntos comunes, uno solo, o ninguno.

Dadas dos circunferencias cualesquiera tomemos como eje OX, la línea de los centros, y el origen en uno de éstos, de forma que el otro quede en la parte positiva de OX. Las ecuaciones de las circunferencias son entonces

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad ; \quad (x - d)^2 + y^2 = r'^2$$

siendo d la distancia de los centros y r y r' los radios. Restando las ecuaciones se obtiene

$$2dx - d^2 = r^2 - r'^2 \qquad x = \frac{d^2 + r^2 - r'^2}{2d}$$

y reemplazando en la primera

$$y^2 = r^2 - \frac{(d^2 + r^2 - r'^2)^2}{(2d)^2}$$

Esta ecuación tiene raíces reales si es

$$r \geqslant \left| \frac{d^2 + r^2 - r'^2}{2d} \right|,$$

o sea:

$$-2dr \leqslant d^2 + r^2 - r'^2 \leqslant 2dr$$

correspondiendo el signo igual al caso en que la raíz es doble. La primera desigualdad puede escribirse en la forma

$$0 \leqslant (d+r)^2 - r'^2 \qquad r'^2 \leqslant (d+r)^2$$

y la segunda: $$(d-r)^2 - r'^2 \leqslant 0 \qquad (d-r)^2 \leqslant r'^2$$

y como d, r y r' son positivos, estas desigualdades se reducen a

$$r' \leqslant d + r \qquad d \geqslant r' - r$$

o bien $$-r' \leqslant d - r \leqslant r' \qquad d \geqslant r - r' \qquad d \leqslant r + r'$$

que son la condición necesaria y suficiente para que las circunferencias tengan puntos comunes, correspondiendo el signo igual al caso en que tengan un solo punto común. Por consiguiente:

1º *Si la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios o menor que la diferencia, las dos circunferencias no tienen puntos comunes.*

2º *Si la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que la diferencia, las dos circunferencias tienen dos puntos comunes, que (como se deduce fácilmente de los cálculos anteriores) son simétricos ortogonalmente respecto de la línea de los centros.*

3º *Si la distancia de los centros es igual a la suma o a la diferencia de los radios, las circunferencias tienen un solo punto común en la línea de los centros.* La abscisa de ese punto es

$$x_0 = \frac{(r \pm r')^2 + r^2 - r'^2}{2(r \pm r')} = \frac{2r^2 \pm 2rr'}{2(r \pm r')} = r$$

y por tanto la recta $x = r = d - r'$ es tangente en el punto común a ambas circunferencias; se dice entonces que *las circunferencias son tangentes* en dicho punto.

Los resultados anteriores suponen que $d \neq 0$, es decir, que las circunferencias no son concéntricas; si lo fuesen y tuviesen distinto radio, no tendrían puntos comunes y si el radio fuese el mismo, coincidirían.

5. **Tangentes desde un punto a la circunferencia.** — Dada una circunferencia de ecuación

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

y un punto (x_1, y_1) del plano, el problema de determinar las tangentes a la circunferencia que pasan por el punto se resuelve si podemos determinar las coordenadas de los puntos de contacto. Si x_0 é y_0 son las coordenadas de dicho punto deben satisfacer al sistema de dos ecuaciones

$$(x_1 - x_0)(x_0 - \alpha) + (y_1 - y_0)(y_0 - \beta) = 0$$
$$(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 = r^2$$

que expresan, la primera, según [7], que la tangente a la circunferencia en (x_0, y_0) pasa por el punto (x_1, y_1), y la segunda que el punto está en la circunferencia. Sumando estas dos ecuaciones queda una ecuación de primer grado en x_0 é y_0 y por consiguiente el sistema puede tener dos soluciones reales, una o ninguna.

Dados en el plano una circunferencia y un punto, tomemos un sistema de coordenadas con origen en el centro de la circunferencia y cuyo eje OX pasa por el punto, estando éste además situado en la parte positiva. Siendo en este sistema de coordenadas $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $y_1 = 0$ y poniendo $x_1 = d$, las ecuaciones del sistema anterior se reducen a

$$dx_0 = r^2 \quad , \quad x_0^2 + y_0^2 = r^2 \quad ;$$

donde r es el radio de la circunferencia y d la distancia del centro al punto. Eliminando x_0 en el sistema, obtenemos la ecuación

$$y_0^2 = r^2 \left(1 - \frac{r^2}{d^2} \right)$$

que tiene dos soluciones reales, una o ninguna, según que sea $r < d$, $r = d$ ó $r > d$. Luego según que la distancia del punto al centro sea mayor, igual o menor que el radio, se pueden trazar desde él dos tangentes, una o ninguna a la circunferencia.

Si restamos las dos ecuaciones del sistema que determina x_0 é y_0 obtenemos

$$x_0^2 + y_0^2 - dx_0 = 0, \quad \text{o sea:} \quad \left(x_0 - \right) \frac{d}{2}^2 + y_0^2 = \frac{d^2}{4}$$

lo que nos prueba que los puntos de contacto están en una circunferencia que pasa por el centro de la circunferencia dada y por el punto dado, y cuyo centro está en el punto medio del segmento que dichos puntos determinan. Obtenemos así la propiedad que sirve de base para el trazado clásico de las tangentes a una circunferencia desde un punto exterior.

6. **Determinación de las tangentes, paralelas a una recta.** — Supongamos la circunferencia con centro en el origen; vamos a determinar las tangentes paralelas a una recta de coeficiente angular m.

Sea $y = m'x$ la recta perpendicular a la dada y que pasa por el centro, su coeficiente angular es $m' = -1/m$. Para hallar la intersección de esta recta con la circunferencia dada, hay que resolver el sistema:

$$y = m'x \quad , \quad x^2 + y^2 = r^2$$

cuyas soluciones son

$$x = \frac{\pm r}{\sqrt{1 + m'^2}}, \quad y = \frac{\pm m'r}{\sqrt{1 + m'^2}}$$

Las tangentes que pasan por dichos puntos son perpendiculares a los radios que pasan por el punto de contacto; por consiguiente son paralelas a la recta dada y son las soluciones del problema. Sus ecuaciones resultan, después de sustituir nuevamente $m' = -1/m$ y quitar denominadores

$$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

que son las ecuaciones de las dos tangentes a la circunferencia paralelas a una dirección dada.

En el caso general cuando la circunferencia tiene por ecuación

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

una simple traslación de ejes nos probaría que las tangentes solución del problema tienen como ecuaciones

[11] $$y = mx - m\alpha + \beta \pm r\sqrt{1 + m^2}$$

Las tangentes paralelas a. eje OY tienen como ecuaciones, como se deduce imediatamente,

$$x = \alpha \pm r.$$

7. **Determinación de circunferencias.** — La ecuación de una circunferencia contiene tres parámetros arbitrarios, luego para determinar una circunferencia sujeta a cumplir ciertas condiciones habrá que expresar estas condiciones en forma analítica, mediante relaciones entre los parámetros, lo que nos conducirá a un sistema de ecuaciones entre los parámetros, que habrá que resolver; reemplazando las soluciones obtenidas en la ecuación general de la circunferencia se obtendrá la ecuación de la circunferencia del problema pedido. El uso de propiedades geométricas conocidas puede facilitar mucho la solución del problema, como igualmente la elección o el cambio del sistema de ejes.

Tomemos, como ejemplo, el problema de determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ y $M_3(x_3, y_3)$. Sabemos determinar la ecuación de la recta que es perpendicular al segmento M_1, M_2 en su punto medio, la de la recta que es perpendicular al segmento $M_1 M_3$ en su punto medio. Las coordenadas del punto de intersección de estas dos rectas son las coordenadas del centro de la circunferencia y dicho punto existe siempre que las rectas no sean paralelas, es decir, siempre que los tres puntos M_1, M_2 y M_3 no estén alineados. El radio es la distancia del centro a uno de los puntos dados.

Otra forma de resolver este problema sería escribir las condiciones

para que la ecuación general de la circunferencia pase por los tres puntos, es decir las ecuaciones

$$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = r^2$$
$$(x_2 - \alpha)^2 + (y_2 - \beta)^2 = r^2$$
$$(x_3 - \alpha)^2 + (y_3 - \beta)^2 = r^2$$

y hay que resolver este sistema tomando como incógnitas α, β y r. Restando las dos últimas de la primera quedan dos ecuaciones de primer grado en α y β; resolviéndolas y reemplazando los valores en una de las ecuaciones se tendría el valor de r.

Se logra una solución directa del problema escribiendo la ecuación en la forma de un determinante. Dicha ecuación es la siguiente:

$$[12] \qquad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

En efecto: desarrollando el determinante por los elementos de la primera fila se tiene

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

en donde A, B, C y D son los menores complementarios de los elementos de la primera fila. Si los elementos no están alineados es $A \neq 0$ (§ 8-3), luego la ecuación anterior es la de una circunferencia que pasa por los tres puntos ya que al reemplazar las variables x é y por uno cualquiera de esos valores se obtiene un determinante igual a cero por tener dos filas iguales.

EJEMPLO: La ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos (0, 0), (0, 1), (1, —2) es

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que desarrollando, da $x^2 + y^2 - 7x - y = 0$.

8. Ecuaciones paramétricas de la circunferencia. — Consideremos la circunferencia con centro en el origen, su ecuación es entonces $x^2 + y^2 = r^2$. Sea M un punto cualquiera y t el ángulo que forma el semieje positivo OX con la semirrecta OM. Se tiene (fig. 41)

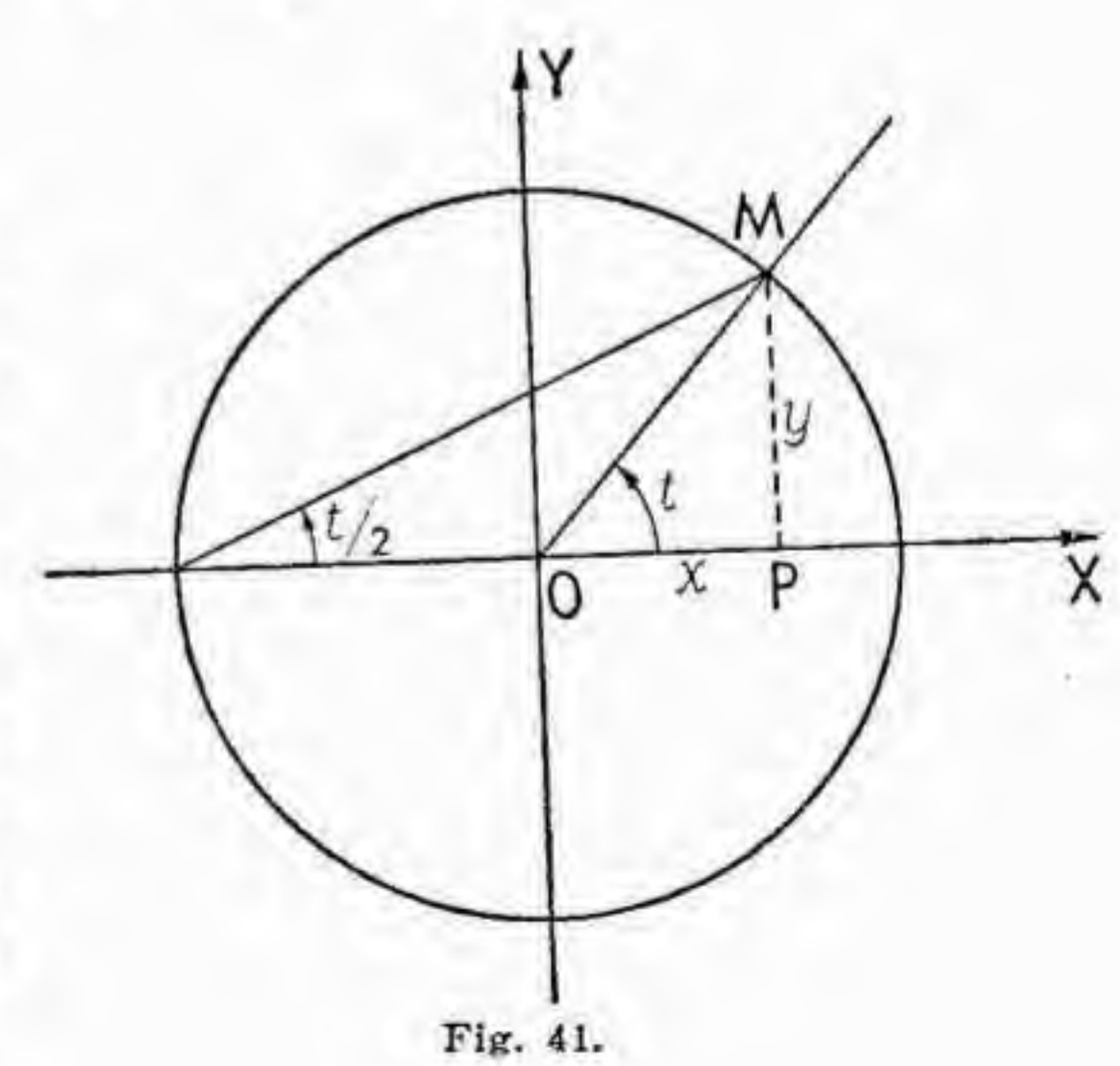

Fig. 41.

$$\text{OP} = x \quad , \quad \text{PM} = y \quad , \quad \text{y por tanto}$$

[13] $$x = r \cos t \quad , \quad y = r \operatorname{sen} t$$

Recíprocamente, dado un valor de t cualquiera entre 0 y 2π, los puntos de coordenadas $r \cos t$, $r \operatorname{sen} t$ están en la circunferencia, luego las ecuaciones [13] son las ecuaciones paramétricas de la circunferencia.

El parámetro t puede también variar entre $-\pi$ y π para obtener todos los puntos de la circunferencia.

Si tomamos ahora $u = \operatorname{tg} t/2$ y recordando las fórmulas

$$\operatorname{sen} t = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}} \quad ; \quad \cos t = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}}$$

se tiene, reemplazando $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ en función de u, las siguientes ecuaciones paramétricas

[14] $$x = r \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \quad ; \quad y = r \frac{2u}{1 + u^2}$$

que nos dan las coordenadas de los puntos de la circunferencia como funciones racionales de un parámetro u. Es claro que a u hay que darle todos los valores reales para obtener todos los puntos de la circunferencia.

El caso en que el centro es un punto cualquiera, se reduce al anterior mediante una traslación de ejes y se tienen las ecuaciones

[15] $$x = a + r \cos t \quad ; \quad y = b + r \operatorname{sen} t$$

9. **Ecuación de la circunferencia en coordenadas polares.** — Dada una circunferencia por su ecuación general [2], si tomamos un sistema de coordenadas polares con el polo en el origen y el eje OX como eje polar, y aplicamos las fórmulas (§ 9-[12]) de cambio de coordenadas, la ecuación [2] toma la forma, llamando ahora ω al ángulo polar,

[16] $$\varrho^2 - 2\varrho\,(\alpha \cos \omega + \beta \operatorname{sen} \omega) + \delta = 0$$

que es la ecuación general de la circunferencia en coordenadas polares.

Si ϱ_0 y ω_0 son las coordenadas polares del centro de la circunferencia y r su radio, se tiene

$$\varrho_0^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad ; \quad \delta = \varrho_0^2 - r^2 \quad ; \quad \alpha = \varrho_0 \cos \omega_0 \quad ; \quad \beta = \varrho_0 \operatorname{sen} \omega_0$$

y la ecuación [16] toma la forma

[17] $$\varrho^2 - 2\varrho\,\varrho_0 \cos(\omega - \omega_0) + \varrho_0^2 - r^2 = 0$$

Como casos particulares importantes se tiene:

Ecuación de la circunferencia que pasa por el polo ($\varrho_0 = r$),

$\varrho = \alpha \cos \omega + \beta \operatorname{sen} \omega$, o bien, $\varrho = 2r \cos (\omega - \omega_0)$.

Ecuación de la circunferencia tangente en el polo al eje polar ($\varrho_0 = r$, $\omega_0 = \pi/2$),

$$\varrho = 2r \operatorname{sen} \omega.$$

Ecuación de la circunferencia tangente en el polo a la perpendicular al eje polar ($\varrho_0 = r$, $\omega_0 = 0$),

$$\varrho = 2r \cos \omega.$$

Ecuación de la circunferencia cuyo centro es el polo ($\varrho_0 = 0$),

$$\varrho = r.$$

§ 13. Ejes radicales. Haces de circunferencias

1. Potencia de un punto respecto a una circunferencia. — Teorema 1. *El producto de los segmentos MA y MB, que tienen como origen un punto fijo M del plano y como extremos los puntos A y B de intersección de una circunferencia fija con una secante variable que pasa por M, es constante.*

Sea la ecuación de la circunferencia $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ y x_0 e y_0 las coordenadas del punto M.

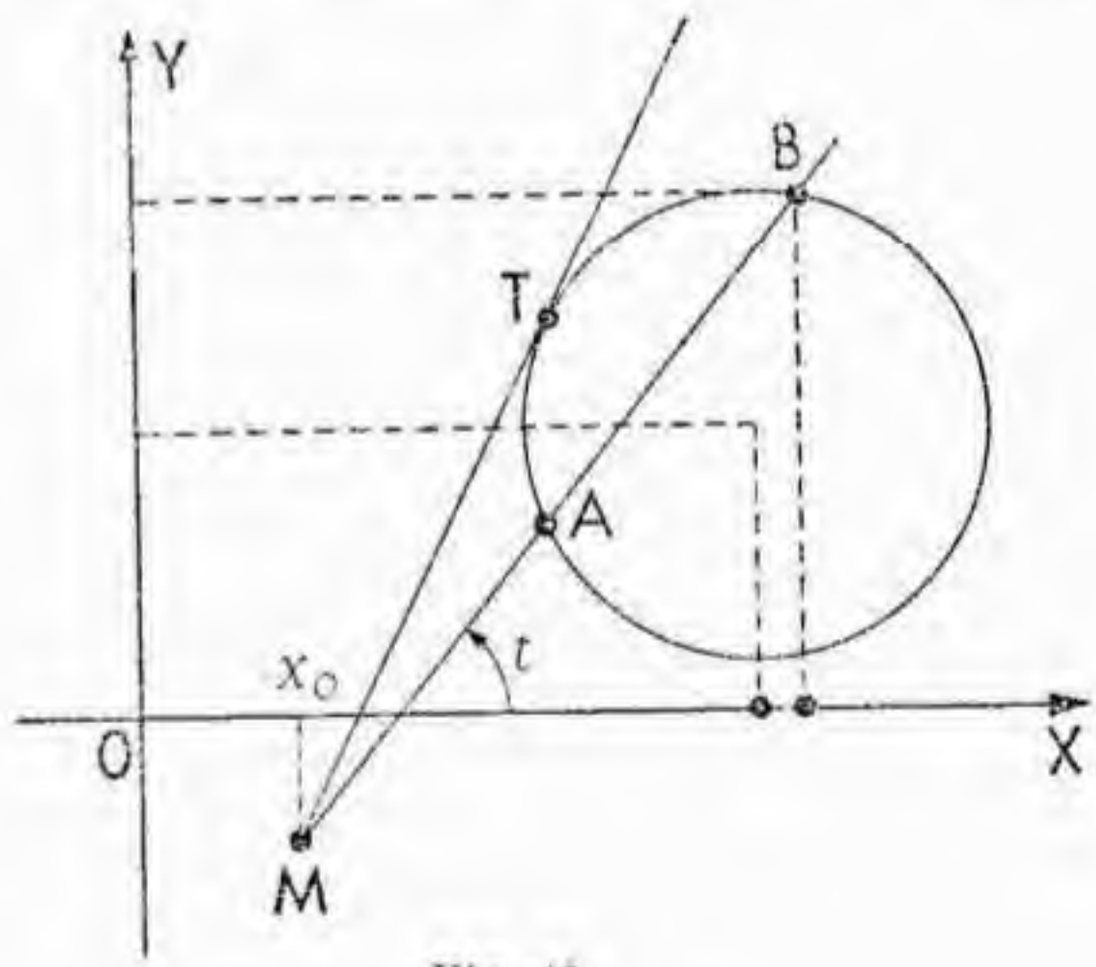

Fig. 42.

Las rectas que pasan por M (fig. 42) tienen como ecuaciones paramétricas

$$x = x_0 + \varrho \cos t \quad , \quad y = y_0 + \varrho \operatorname{sen} t$$

en donde t es el ángulo que forma el semieje positivo OX con la recta MA, y el parámetro ϱ es la distancia de un punto cualquiera de la recta a M. Los valores de ϱ correspondientes a los puntos A y B de intersección de la recta con la circunferencia, es decir, las longitudes MA y MB son las raíces de la ecuación

$$[1] \qquad (x_0 + \varrho \cos t - \alpha)^2 + (y_0 + \varrho \operatorname{sen} t - \beta)^2 = r^2$$

que puede ponerse en la forma

$$\varrho^2 + 2[(x_0 - \alpha) \cos t + (y_0 - \beta) \operatorname{sen} t]\varrho + [(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 - r^2] = 0.$$

El producto de las dos raíces de la ecuación anterior, es decir, el producto de las longitudes de MA y MB es independiente de t, lo que prueba el teorema.

DEF. 1. Este producto constante se llama la *potencia del punto respecto de la circunferencia*. Dicho producto es, según acabamos de ver, igual a

$$[2] \qquad (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 - r^2$$

es decir: *se obtiene la potencia de un punto respecto a una circunferencia reemplazando las coordenadas del punto en el primer miembro de la ecuación normal de la circunferencia.*

La distancia de M al centro de la circunferencia es

$$d^2 = (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2$$

luego se tiene: *potencia del punto respecto de la circunferencia es igual al cuadrado de su distancia al centro menos el cuadrado del radio.* De aquí se deduce que la potencia es positiva, nula o negativa, según que el punto sea exterior, esté en la circunferencia, o sea interior a la misma.

Como los resultados anteriores valen cuando la ecuación [1] tiene una raíz doble se deduce:

La potencia de un punto respecto de una circunferencia es igual al cuadrado de la longitud del segmento de la tangente trazada por el punto a la circunferencia y limitada por dicho punto y el de contacto.

2. **Ejes y centros radicales.** — TEOREMA 2. *El lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia con respecto a dos circunferencias no concéntricas es una línea recta.*

Sean en efecto las ecuaciones de las dos circunferencias

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$
$$(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 = r'^2 .$$

Para que un punto $M(x, y)$ tenga igual potencia respecto de ambas circunferencias es condición necesaria y suficiente que sus coordenadas satisfagan a la relación

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 - r'^2$$

o a la equivalente

$$[3] \qquad 2(\alpha' - \alpha)x + 2(\beta' - \beta)y + \\ + \alpha^2 - \alpha'^2 + \beta^2 - \beta'^2 - r^2 + r'^2 = 0$$

y como hemos supuesto que las circunferencias no son concéntricas no pueden anularse a la vez $\alpha' - \alpha$; $\beta' - \beta$ y por tanto la ecuación anterior es la de una recta.

DEF. 2. Esta línea recta es el *eje radical y su ecuacion se*

obtiene restando miembro a miembro las ecuaciones normales de ambas circunferencias.

Si es $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; $r \neq r'$, es decir, si las circunferencias son concéntricas y distintas, la ecuación [3] no se satisface para ningún sistema de valores, es decir, no hay ningún punto que tenga la misma potencia con respecto a ambas circunferencias.

La recta que une los centros de las circunferencias y la del eje radical, tienen como coeficientes angulares

$$\frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} \; ; \quad \frac{\alpha' - \alpha}{\beta - \beta'}$$

luego resulta:

a) *El eje radical es perpendicular a la línea de los centros,* puesto que el producto de los coeficientes angulares de dichas rectas es igual a —1.

Si las dos circunferencias tienen puntos comunes, estos puntos, por tener potencia nula respecto de las dos circunferencias, pertenecen al eje radical, luego tenemos:

b) *El eje radical de dos circunferencias secantes es la recta de su cuerda común.*

Si las circunferencias son tangentes el eje radical pasa por el punto de tangencia y es perpendicular a línea de los centros, luego se tiene:

c) *Si dos circunferencias son tangentes, su eje radical es la recta tangente común.*

Supongamos ahora tres circunferencias C_1, C_2 y C_3 y sean: R_1, R_2 y R_3 los ejes radicales de C_2 y C_3, C_3 y C_1, y C_1 y C_2, respectivamente. Si dos de estas rectas se confunden los puntos de ambas tienen la misma potencia respecto de las tres circunferencias que tienen, por consiguiente, el mismo eje radical.

Si dos de los ejes radicales son paralelos no existe ningún punto que tenga la misma potencia respecto de las tres circunferencias y entonces los tres ejes son paralelos y como son perpendiculares a las líneas de los centros, las tres circunferencias tienen sus tres centros en línea recta.

Finalmente, si dos de los ejes se cortan en un punto, sin confundirse, dicho punto es el único que tiene la misma potencia respecto de las tres circunferencias, por él pasan los tres ejes radicales.

DEF. 3. Dicho punto se llama el *centro radical de las tres circunferencias.*

3. **Haces lineales de circunferencias.** — Consideremos dos circunferencias C_1 y C_2 de ecuaciones normales

$$f_1(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \delta = 0$$
$$f_2(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \delta' = 0$$

DEF. 4. *Se denomina haz lineal de circunferencias al conjunto de las circunferencias de ecuaciones*

[4] $$\lambda f_1(x, y) + \mu f_2(x, y) = 0$$

en donde λ y μ toman todos los valores reales posibles.

Es evidente que la ecuación [4] representa una circunferencia para todos los valores de λ y μ salvo en el caso $\lambda = -\mu$ en que representa el eje radical, al que consideraremos como un caso límite de los círculos del haz. Se tiene el teorema siguiente:

TEOREMA 3. *Todas las circunferencias de un mismo haz lineal tienen el mismo eje radical.* Sea en efecto C una circunferencia del haz de ecuación

$$f(x, y) \equiv \lambda f_1(x, y) + \mu f_2(x, y).$$

El eje radical de C y C_1 tiene como ecuación

$$\frac{f(x, y)}{\lambda + \mu} - f_1(x, y) = 0$$

(en donde hemos dividido por $\lambda + \mu$ en la ecuación de C para que la ecuación tomase la forma normal). Esta ecuación puede también escribirse en la forma

$$f(x, y) - (\lambda + \mu) f_1(x, y) = 0$$
$$\lambda f_1(x, y) + \mu f_2(x, y) - (\lambda + \mu) f_1(x, y) = 0 \quad \text{ó}$$
$$f_1(x, y) - f_2(x, y) = 0$$

que no es otra que la ecuación del eje radical de C_1 y C_2 lo que demuestra el teorema.

Recíprocamente: *si H es la familia de las circunferencias que tiene el mismo eje radical, H es un haz lineal de circunferencias.*

Para demostrar este teorema bastará probar que cualquier circunferencia C de H tiene como ecuación

$$\lambda f_1(x, y) + \mu f_2(x, y) = 0$$

en donde $f_1(x, y) = 0$ y $f_2(x, y) = 0$ son las ecuaciones de dos circunferencias fijas cualesquiera C_1 y C_2 de H.

En efecto: la ecuación del eje radical de C_1 y C_2 es, supuestas las ecuaciones escritas en forma normal, $e(x, y) = f_2(x, y) - f_1(x, y) = 0$, pero como C y C_1 tienen también el mismo eje radical, si ponemos $g(x, y) = f(x, y) - f_1(x, y)$ siendo $f(x, y)$ la ecuación normal de C, se ha de cumplir, puesto que $e(x, y) = 0$ y $g(x, y) = 0$ son ecuaciones de la misma recta

$$f_1(x, y) - f_2(x, y) = e(x, y) = \gamma g(x, y) = \gamma f(x, y) - \gamma f_1(x, y)$$

siendo $\gamma \neq 0$, es decir

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{\gamma} + 1\right) f_1(x, y) - \frac{1}{\gamma} f_2(x, y)$$

como queríamos demostrar.

4. **Clasificación de los haces lineales.** — Los haces lineales se clasifican en tipos distintos que vamos a estudiar. Elijamos como eje de ordenadas el eje radical de las circunferencias del haz y como eje de abscisas la perpendicular bajada desde el centro de una de las circunferencias del haz al eje radical. Los centros de las circunferencias del haz están todos en el eje OX, luego las circunferencias del haz tienen todas ecuaciones del tipo

$$x^2 + y^2 - 2ax + d = 0$$

La potencia del origen con respecto a cualquier circunferencia del haz es igual a d, luego este término independiente ha de ser el mismo para todas las circunferencias del haz, estas tienen, pues, todas como ecuación

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + d = 0 \qquad [5]$$

y recíprocamente todas las ecuaciones del tipo anterior, para los valores de λ que hagan que dicha ecuación sea la de una circunferencia, es decir, para los valores de λ tales que $\lambda^2 > d$ representan una circunferencia del haz. La ecuación [5] es pues, la ecuación general de todas las circunferencias del haz. Consideraremos ahora tres casos distintos que nos dan tres tipos distintos de haces lineales.

1º $d < 0$. Todas las circunferencias cortan al eje OY en los dos puntos P y Q de ordenada $\pm\sqrt{-d}$ y toda circunferencia que pase por esos dos puntos pertenece al haz. El haz está formado por todas las circunferencias que pasan por dos puntos fijos (fig. 43).

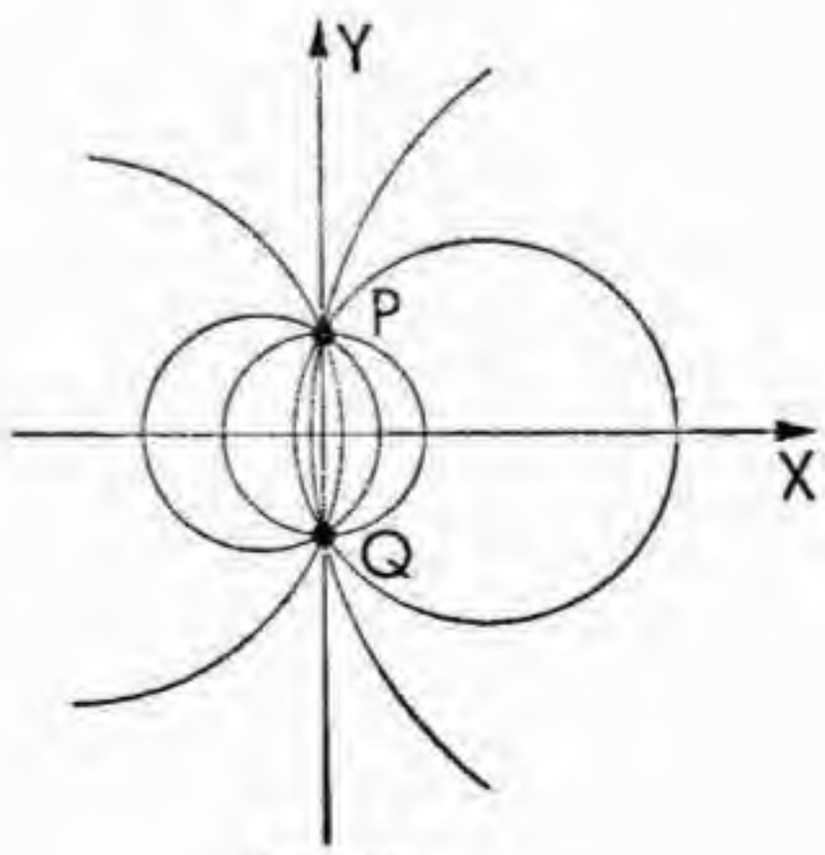

Fig. 43.

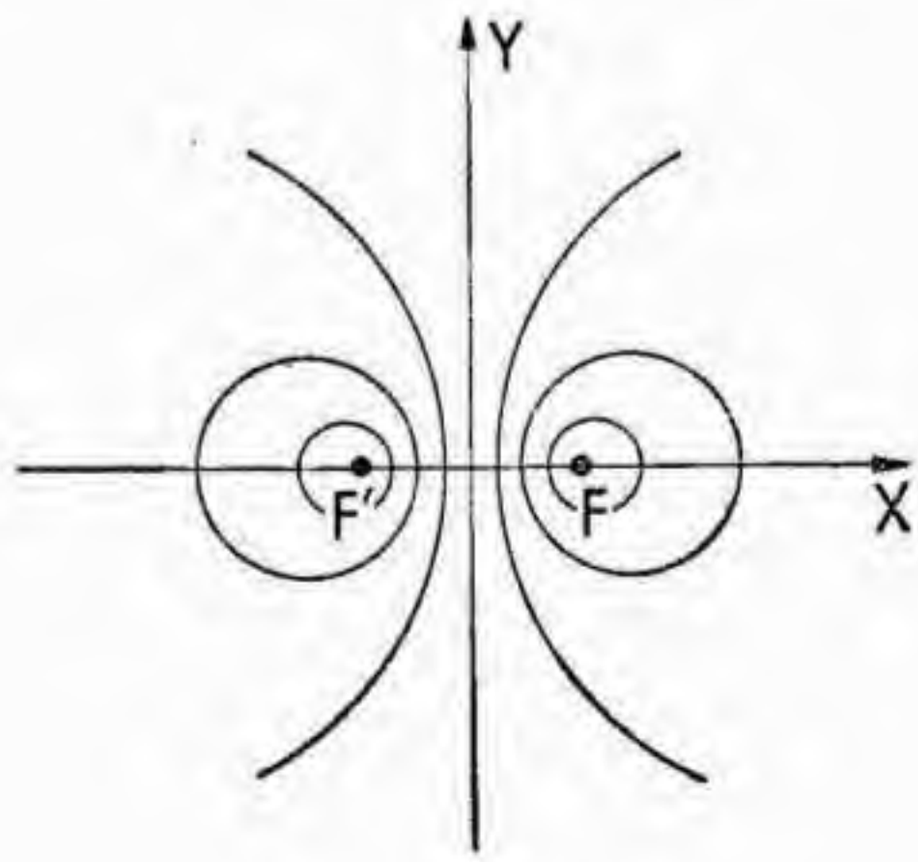

Fig. 44.

2º $d > 0$. Las circunferencias no tienen ningún punto común con el eje OY, y como este eje es su eje radical, las circunferencias del haz no tienen puntos comunes entre sí. La ecuación [5] puede ponerse en la forma

$$(x - \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 - d$$

luego los centros de las circunferencias están en el exterior del segmento $(-\sqrt{d}, \sqrt{d})$ del eje OX. Los puntos $F'(-\sqrt{d}, 0)$ y $F(\sqrt{d}, 0)$ se llaman puntos límites del haz y pueden considerarse como dos circunferencias de radio nulo pertenecientes al haz (fig. 44).

3º $d = 0$. La ecuación del haz toma entonces la forma

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0$$

y se compone de todas las circunferencias tangentes a una recta en un punto al eje OY en el origen en la (fig. 45).

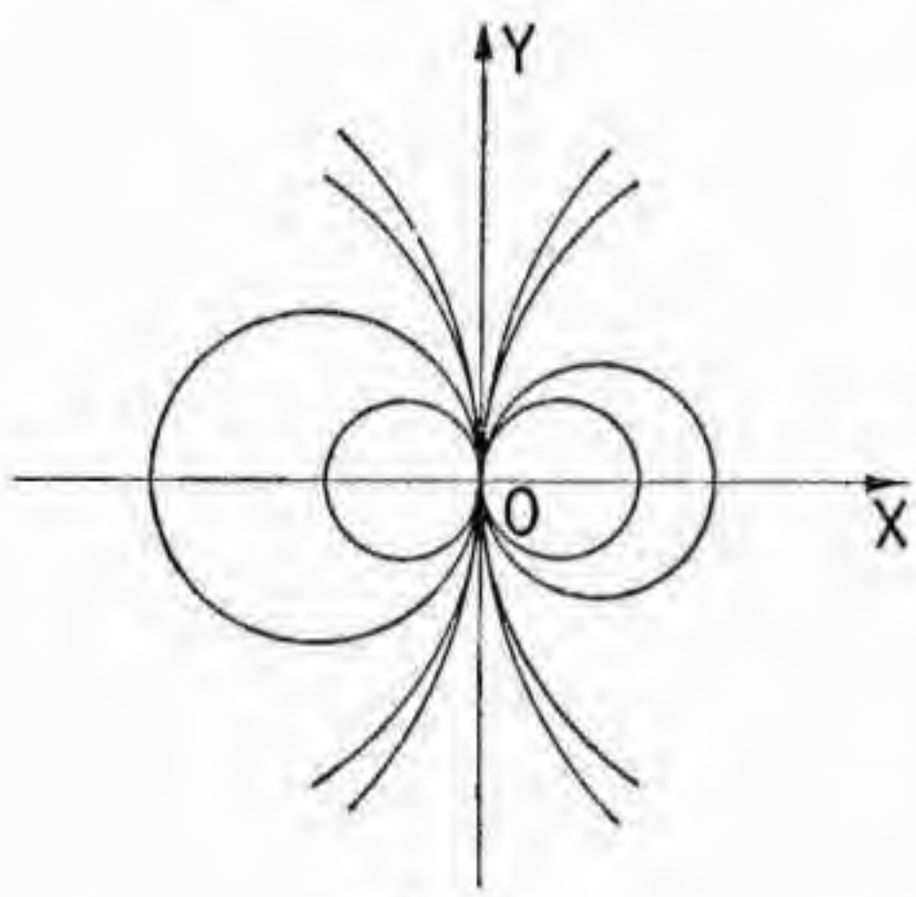

Fig. 45.

Este caso puede considerarse como límite de los dos primeros cuando los dos puntos comunes a las circunferencias del haz o los dos puntos límites tienden a confundirse.

En todos los casos hemos supuesto que existía el eje radical de dos circunferencias del haz; si no existe, es decir, si dos circunferencias del haz son concéntricas, entonces el haz está formado como se ve inmediatamente, por todas las circunferencias que tienen el mismo centro.

5. **Circunferencias ortogonales. Haces ortogonales.** — DEF. 5. Dos circunferencias se dice que son *ortogonales cuando las tangentes en sus puntos comunes son perpendiculares.* Es para ello necesario y suficiente que el triángulo que tiene como vértices los centros y un punto común sea rectángulo en el último punto. Es decir que se tenga $d^2 = r^2 + r'^2$ siendo r y r' los radios de las dos circunferencias y d la distancia de los centros.

Esta condición es evidentemente idéntica a la siguiente: *la potencia del centro de una de las circunferencias con respecto a la otra es igual al cuadrado del radio de la primera circunferencia.*

Son consecuencias inmediatas de esta propiedad:

Si dos circunferencias son concéntricas y distintas no hay ninguna circunferencia ortogonal a ambas.

Los centros de las circunferencias ortogonales a dos dadas están en el eje radical.

Si las circunferencias vienen dadas por sus ecuaciones

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \delta = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2\alpha' x - 2\beta' y + \delta' = 0$$

la condición de ortogonalidad se expresa en la forma

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\alpha' - 2\beta\beta' + \delta' = \alpha^2 + \beta^2 - \delta$$

que se transforma en la

$$[6] \qquad 2(\alpha\alpha' + \beta\beta') - (\delta + \delta') = 0$$

Consideremos ahora dos circunferencias no concéntricas del plano, y un sistema de ejes cartesianos que tenga por ejes OX y OY a la línea de los centros y al eje radical de las dos circunferencias.

Las ecuaciones de ambas circunferencias toman entonces la forma [5]

$$x^2 + y^2 - 2\lambda_1 x + d = 0 \qquad x^2 + y^2 - 2\lambda_2 x + d = 0$$

Cualquier circunferencia ortogonal a estas dos tiene su centro en OY, su ecuación es del tipo $x^2 + y^2 - 2\mu y + h = 0$ y la condición de ortogonalidad de esta circunferencia a las dos dadas es $h + d = 0$, es decir $h = -d$.

Luego la ecuación de cualquier circunferencia ortogonal a las dos dadas es la

$$x^2 + y^2 - 2\mu y - d = 0$$

es decir que dichas circunferencias forman un haz lineal que tiene como eje radical la línea de los centros de las circunferencias dadas.

Como la condición de ortogonalidad es independiente de λ_1 y λ_2 se deduce:

TEOR. 4. *Todas las circunferencias ortogonales a dos dadas C_1 y C_2 son ortogonales a todas las del haz lineal determinado por C_1 y C_2.*

DEF. 6. *Ambos haces se denominan haces ortogonales* y sus ecuaciones son

$$[7] \qquad x^2 + y^2 - 2\lambda x + d = 0 \qquad x^2 + y^2 - 2\mu y - d = 0$$

Los dos haces son del tercer tipo, cuando $d = 0$ y están formados por las circunferencias tangentes en el origen a OX y a OY (fig. 46), o son uno del primer tipo y otro del segun-

do, siendo los puntos límites de uno de ellos los puntos comunes a las circunferencias del otro (fig. 47).

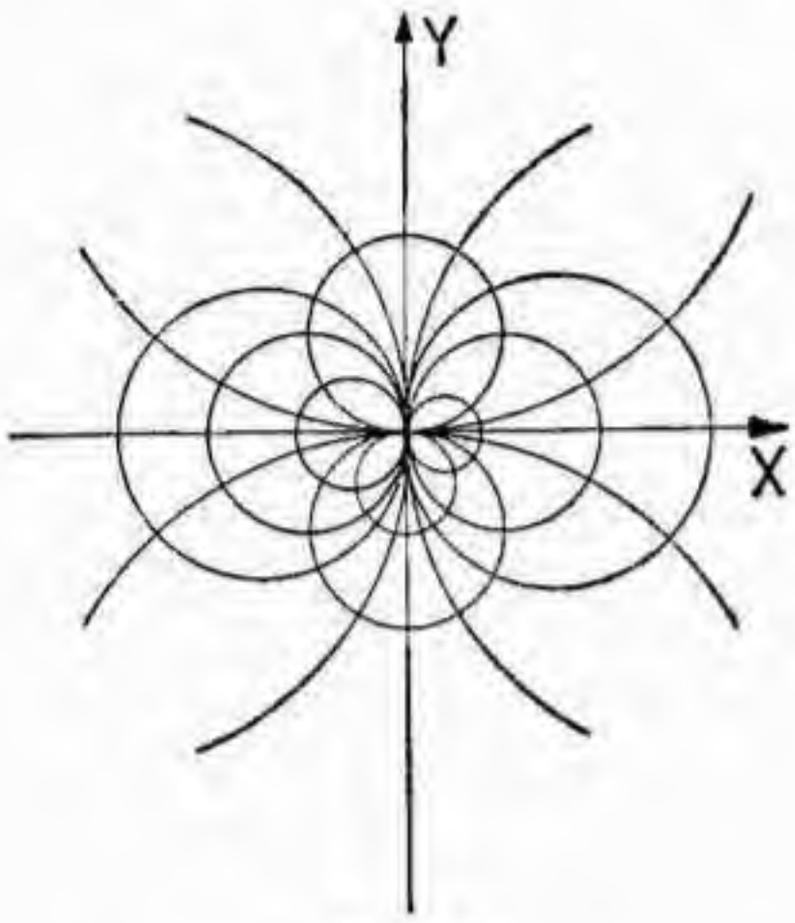

Fig. 46.

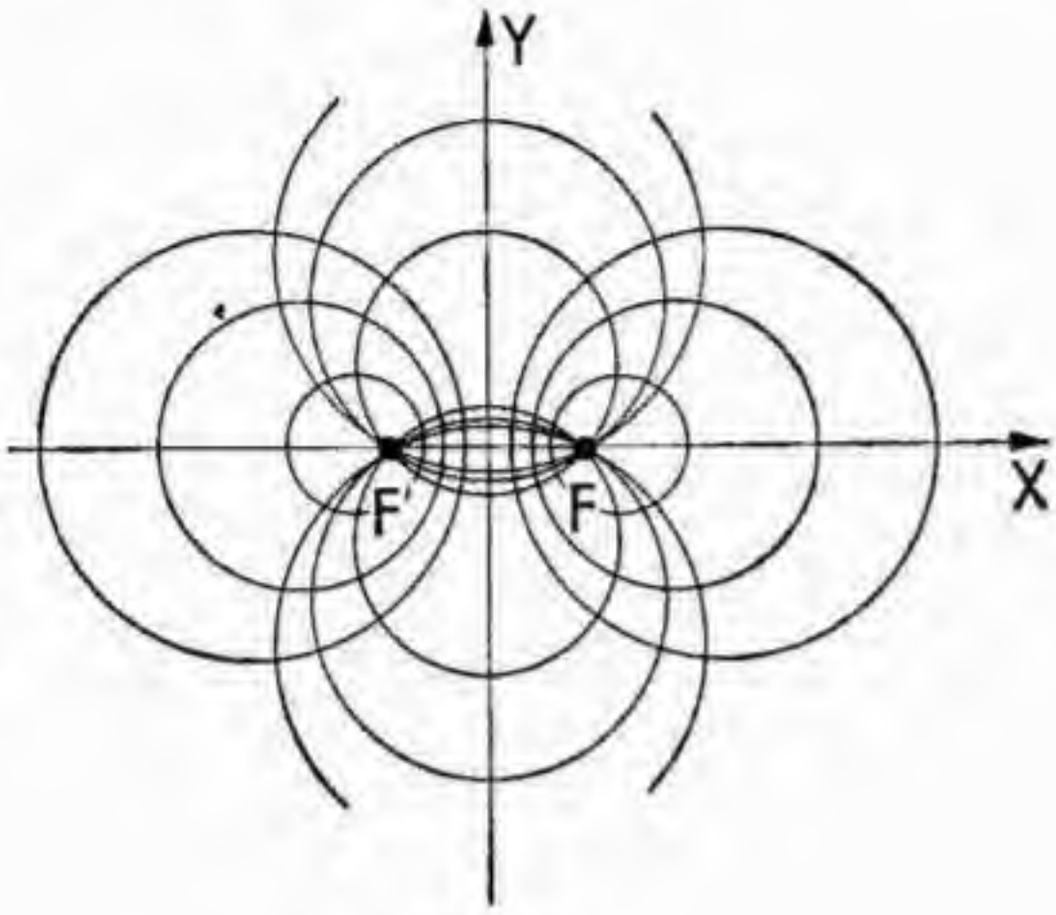

Fig. 47.

6. **Circunferencia ortogonal a tres circunferencias.** — Veamos ahora cómo se puede determinar *la circunferencia ortogonal a tres circunferencias dadas*, C_1, C_2 y C_3, cuyos centros no estén alineados. El centro de dicha circunferencia ha de estar en el centro radical de las tres dadas. Tomemos dicho centro como origen de coordenadas. Las ecuaciones de las tres circunferencias son entonces de la forma

$$x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y + \delta = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2\alpha_2 x - 2\beta_2 y + \delta = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2\alpha_3 x - 2\beta_3 y + \delta = 0$$

siendo el término constante común δ, la potencia del origen respecto de los tres círculos. Una circunferencia ortogonal a las tres dadas tiene como ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2$$

y las tres condiciones de ortogonalidad nos conducen a la misma relación $\delta - r^2 = 0$, luego la circunferencia ortogonal a las tres dadas es la de ecuación

$$x^2 + y^2 = \delta$$

luego resulta:

TEOREMA 5. *La circunferencia ortogonal a tres circunferencias dadas tiene su centro en el centro radical de las tres circunferencias y su radio es igual a la raíz cuadrada de la potencia de dicho centro con respecto a las tres circunferencias.* Por consecuencia, para que exista dicha circunferencia, *debe ser el centro radical exterior a las tres circunferencias.*

Si los centros de las tres circunferencias están alineados y las tres circunferencias no pertenecen al mismo haz no existe ninguna circunferencia ortogonal a las tres dadas. Puede entonces considerarse la línea de los centros, que es ortogonal a las tres circunferencias, como una solución límite de este problema.

§ 14. ELEMENTOS IMAGINARIOS

1. **Introducción de los elementos imaginarios en geometría analítica.** — La introducción de los números complejos se justifica por la necesidad de dar a los resultados del álgebra y del análisis una armonía y una generalidad que no se pueden alcanzar con el sólo empleo de los números reales [1].

La geometría analítica se basa en el principio de correspondencia entre los números reales y los puntos de una recta, y por tanto su desarrollo en el campo real tiene que estar sujeto a la misma falta de generalidad y armonía que tiene el dominio de los reales. Si se quiere obtener, en geometría analítica, armonía y generalidad en los resultados, es necesario la introducción en ella de los elementos imaginarios.

Pero esta introducción lleva consigo la falta de representación en la geometría euclídea, en la que no existen elementos imaginarios; éstos son entonces, en geometría, meras creaciones analíticas sin base en los elementos de la geometría euclídea.

DEF. 1. *Dado en un plano un sistema de ejes cartesianos, llamaremos punto del plano al conjunto de dos números complejos* $(a + bi,\ c + di)$ *cualesquiera.*

Consideremos ahora una ecuación lineal con coeficientes reales o complejos

$$mx + ny + p = 0$$

la recta será ahora *por definición,* el conjunto de los puntos reales o imaginarios cuyas coordenadas satisfacen a dicha ecuación y lo mismo se define la circunferencia o cualquier curva definida por una relación que una las dos coordenadas x é y.

Debemos hacer resaltar la diferencia que hay entre las ecuaciones tal como las definimos ahora y tal como lo hicimos cuando sólo considerábamos elementos reales; en este último caso suponíamos un espacio preexistente (en él se introducían las coordenadas, y las ecuaciones de una figura geométrica eran la traducción analítica de propiedades geométricas ya existentes). En la geometría con elementos imaginarios o geometría compleja, las ecuaciones de una figura constituyen su propia definición [2], que ha de coincidir con la de la geometría analítica real cuando sólo se consideren elementos reales.

La extensión de los resultados y propiedades de la geome-

---

[1] La resolución de ecuaciones en álgebra y la determinación del intervalo de validez del desarrollo en serie de una función son ejemplos típicos de esta diferencia entre los resultados que se obtienen en el campo real y los que se obtienen en el campo complejo.

[2] La creación de la geometría analítica de un espacio de cualquier número de dimensiones se apoya en consideraciones análogas a las que acabamos de establecer.

tria real a la geometría compleja puede hacerse siempre que se cumpla la siguiente condición: el resultado o la propiedad puede deducirse por vía meramente analítica y los razonamientos analíticos utilizados son válidos igualmente en el campo real y en el campo complejo.

Así, por ejemplo, la determinación de la recta por dos puntos, las condiciones de paralelismo y en general aquellos problemas que se apoyen únicamente en la teoría de ecuaciones lineales se extienden a la geometría compleja. También se extienden los problemas relativos a la intersección de curvas, que se reducen a la resolución de sistemas de ecuaciones. Las propiedades en que interviene la distancia no siempre se pueden extender al campo complejo, en el que, por ejemplo, la distancia de dos puntos no confundidos puede ser cero (basta tomar los puntos $(1, i)$ y $(-1, -i)$, su distancia ϱ viene dada por la fórmula $\varrho^2 = (1+1)^2 + (i+i)^2 = 0$). Esto es, naturalmente, consecuencia de que no se cumple en el campo complejo la propiedad del campo real de que una suma de cuadrados sólo puede ser nula cuando lo sean todos los sumandos.

2. **Los elementos imaginarios en el estudio de la circunferencia.** — Vamos a ver cómo los resultados que hemos obtenido en el estudio de la circunferencia toman una forma completamente general cuando se utilizan los elementos imaginarios.

El problema de la intersección de una recta con una circunferencia, que se reduce a la resolución de un sistema de dos ecuaciones, una de primer grado y una de segundo, que tiene siempre solución en el campo complejo, se puede enunciar así: una recta y una circunferencia tienen siempre dos puntos de intersección que puede reducirse a uno solo doble cuando la recta es tangente a la circunferencia. Así, por ejemplo, la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ y la recta $x = 5$, tienen comunes los dos puntos $(5, 4i)$ y $(5, -4i)$. Si los coeficientes de las ecuaciones son reales, las coordenadas de los dos puntos de intersección, si son imaginarios, son números imaginarios conjugados, puesto que las soluciones imaginarias de una ecuación de segundo grado con coeficientes reales, son siempre números imaginarios conjugados.

Análogamente, dos circunferencias tienen siempre comunes dos puntos de intersección que pueden confundirse cuando las circunferencias son tangentes.

Así, por ejemplo, las circunferencias de ecuaciones

$$x^2 + y^2 - x + 1 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + x + 1 = 0$$

tienen comunes los puntos $(0, i)$ y $(0, -i)$.

Pasemos ahora al eje radical. La ecuación [1] del § 13 nos da los puntos de intersección, reales o complejos de la secante con la curva, el producto de sus raíces es igual al término in-

dependiente, sean o no reales las raíces, y de las ecuaciones paramétricas de la curva se deduce que dichas raíces siguen representando las longitudes de los segmentos con origen en M y extremos en los puntos de intersección, luego la definición de potencia se extiende al caso en que los puntos de intersección dejan de ser reales. Así, por ejemplo, sea la circunferencia de ecuación $(x-3)^2+(y-5)^2=16$, la potencia del origen respecto de la misma es $d^2-r^2=18$. Si cortamos dicha circunferencia por el eje OX obtenemos como puntos de intersección los $(3+3i, 0)$ y $(3-3i, 0)$, y el producto de las distancias de esos dos puntos al origen es

$$(3+3i)(3-3i) = 18.$$

Los puntos de intersección de dos circunferencias, reales o imaginarios, son de potencia nula respecto de ambas circunferencias, luego pertenecen al eje radical, es decir, que el eje radical de dos circunferencias está determinado por sus dos puntos comunes aún cuando éstos sean imaginarios.

Así, por ejemplo, tomemos las circunferencias de ecuaciones

$$(x-1)^2+(y-1)^2 = 1 \qquad (x+1)^2+(y+1)^2 = 1$$

que tienen como puntos de intersección (basta resolver el sistema

$$\left(\frac{i\sqrt{2}}{2}, -\frac{i\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \left(-\frac{i\sqrt{2}}{2}, \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)$$

La recta que une estos dos puntos tiene como ecuación

$$x+y=0$$

que como se ve fácilmente (es perpendicular a la línea de los centros y la potencia del origen es la misma respecto de las dos circunferencias) es el eje radical de las dos circunferencias.

De aquí se deduce que todo haz lineal de circunferencias es el conjunto de las circunferencias que pasan por dos puntos fijos reales o imaginarios (conjugados si las circunferencias tienen ecuaciones con coeficientes reales). Si se confunden, el haz está compuesto por las circunferencias tangentes a una recta en un punto fijo.

3. **Rectas isótropas y puntos cíclicos.** — En la geometría real una ecuación del tipo

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = 0$$

representa un solo punto real: el (a, b). En la geometría compleja dicha ecuación puede escribirse en la forma

$$[y-b+i(x-a)]\,[y-b-i(x-a)] = 0$$

y representa por consiguiente a dos rectas imaginarias de coeficientes angulares i y $-i$ que pasan por el punto.

Dada una recta cualquiera de coeficiente angular i

$$y = ix + a + bi$$

pasa siempre por un punto real, el punto $(-b, a)$, que es por otra parte el único punto real que tiene, pues si tuviera otro, la ecuación de la recta que pasa por esos dos puntos tendría sus coeficientes reales y no podría ser la dada. Por dicho punto pasa también la recta de ecuación $y = -ix + a - bi$ cuyo coeficiente angular es $-i$. Vemos, pues, que por todo punto real del plano pasan dos rectas imaginarias de coeficientes angulares i y $-i$, y recíprocamente dada una recta cualquiera de coeficiente angular i, existe otra de coeficiente angular $-i$ que sólo tiene común con la primera un punto real.

DEF. 1. A estas rectas se las denomina *rectas isótropas* salidas del punto real que tienen común.

Vamos a dar algunas propiedades un tanto singulares de las rectas isótropas.

TEOREMA 1. *La distancia entre dos puntos cualesquiera de una recta isótropa es nula.* En efecto, sea la recta de ecuación $y = ix + a + bi$. Si (x_1, y_1), (x_2, y_2) son dos puntos de la recta, se ha de cumplir

$$y_1 = ix_1 + a + bi \qquad y_2 = ix_2 + a + bi$$

Restando ambas ecuaciones se tiene $y_1 - y_2 = i(x_1 - x_2)$, y por tanto si d es la distancia entre esos dos puntos, se tiene

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 0$$

Como la relación anterior se puede poner en la forma

$$[(y_1 - y_2) + i(x_1 - x_2)]\,[(y_1 - y_2) - i(x_1 - x_2)] = 0$$

se deduce que dos puntos distintos cuya distancia sea nula se encuentran siempre sobre una recta isotropa.

TEOREMA 2. *Toda recta isótropa forma con ella misma un ángulo indeterminado.* Basta ver que la fórmula (§ 10, [3]) que da el ángulo de dos rectas

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m' - m}{1 + mm'}$$

toma la forma $\frac{0}{0}$ si hacemos $m = m' = \pm i$; es claro también que recíprocamente sólo cuando el coeficiente angular sea $\pm i$ es indeterminado el ángulo que forma una recta consigo misma. En todos los otros casos es siempre cero.

Los elementos imaginarios son también muy útiles cuando se consideran coordenadas homogéneas. La ecuación de una circunferencia en coordenadas homogéneas es

$$(x - at)^2 + (y - bt)^2 = r^2t^2$$

y si la cortamos por la recta impropia, es decir, si hacemos $t = 0$, se tiene la relación

$$x^2 + y^2 = 0 \qquad \text{ó} \qquad (x + iy)(x - iy) = 0$$

DEF. 2. Por tanto, deducimos que la recta impropia corta a cualquier circunferencia en dos puntos fijos impropios, los $(i, 1, 0)$ y $(-i, 1, 0)$, que se denominan los *puntos cíclicos* y que son los puntos impropios de las rectas isótropas *salidas del origen.*

De acuerdo con este resultado:

TEOREMA 3. *Dos circunferencias del plano tienen siempre cuatro puntos comunes, de los cuales dos pueden ser reales, distintos o confundidos, o bien imaginarios, y los otros dos son imaginarios e impropios siendo además fijos, cualesquiera que sean las circunferencias.*

EJERCICIOS SOBRE LA CIRCUNFERENCIA:

1) Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen y determina en los ejes OX y OY segmentos de extremo, el origen y longitudes $2a$ y $2b$.

R.: $(x \pm a)^2 + (y \pm b)^2 = a^2 + b^2$.

2) Determinar la ecuación de la circunferencia de radio 1, tangente a la recta $3x - 4y + 1 = 0$ en el punto de ordenada 1.

R.:

$$\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{5}\right)^2 = 1; \left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 = 1.$$

3) Determinar la ecuación de la circunferencia de centro $(-2, 3)$ y tangente a la recta $2x + y - 1 = 0$.

R.: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = \frac{4}{5}$.

4) Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(2, 0)$ y es tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 18 = 0$.

R.: $x^2 + y^2 - 2x = 0$; $x^2 + y^2 - 2x + \frac{48}{7} y = 0$.

5) Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-1, 1)$, $(3, 5)$ y $(5, -3)$.

R.: $(5x - 16)^2 + (5y - 4)^2 = 442$.

6) Determinar la ecuación de la circunferencia que tiene un diametro cuyos extremos son los puntos $(2, 3)$ y $(-4, 5)$.

R.: $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$.

7) Determinar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en la recta de ecuación $x - y + 2 = 0$ y que pasa por la intersección de las circunferencias de ecuaciones $x^2 + y^2 - 10x + 7y + 31 = 0$ y $x^2 + y^2 - 6x - y + 3 = 0$.

R.: $x^2 + y^2 - 3x - 7y - 18 = 0$.

8) Determinar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta de ecuación $6x + 7y - 16 = 0$ y que es tangente a las rectas de ecuaciones $8x + 15y + 7 = 0$ y $3x - 4y - 18 = 0$.

R.: $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1$; $(x - 3)^2 + \left(y + \frac{2}{7}\right)^2 = \frac{121}{49}$

9) Determinar la ecuación de la circunferencia de centro $(3, 1)$ y tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$.

R.: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 42 \pm 16\sqrt{5}$.

10) Determinar la ecuación de la familia de circunferencias que pasa por el origen y por el punto $(0, 1)$.

R.: $x^2 + y^2 - y + \lambda x = 0$.

11) Determinar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos lados tienen como ecuaciones $x = 3$; $x + 1 = 0$; $x - y + 1 = 0$.

R.: $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$.

12) Encontrar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 18 = 0$ que son paralelas a la recta de ecuación $y = 0$.

R.: $x - y + 2 = 0$; $x - y + 10 = 0$.

13) Probar que las circunferencias de ecuaciones $x + y^2 - 4x + 2y = 0$ y $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$, son ortogonales.

14) Determinar la ecuación de la circunferencia tangente al eje OX y a la bisectriz del primer cuadrante y tal que el origen tiene potencia 4 respecto de ella.

R.: $x^2 + y^2 - 4x - 4(\sqrt{2} - 1)y + 4 = 0$.

15) Sean las circunferencias de ecuaciones $x^2 + y^2 - 16 = 0$ y $2x^2 - 2y^2 - 8y - 3x - 10 = 0$. Determinar las coordenadas de un punto que tenga la misma potencia respecto de las dos circunferencias y que equidiste de los ejes.

R.: (2, 2).

16) Determinar la ecuación de la circunferencia ortogonal a las tres circunferencias de ecuaciones $x^2 + y^2 - 4 = 0$; $x^2 + y^2 - 10y + 20 = 0$; $2x^2 + 2y^2 + 2x - 1 = 0$.

R.: $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{12}{5}\right)^2 = 14{,}01$.

17) Probar que son circunferencias los siguientes lugares geométricos:

a) Lugar de los puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijos es constante y distinta de la unidad. ¿Qué ocurre si es igual a la unidad?

b) Lugar de los puntos tales que es constante la suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos, multiplicado cada uno de los cuadrados por un coeficiente constante, siendo la suma de ambos coeficientes distinta de cero. ¿Qué ocurre si esta suma es igual a cero?

18) ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia que pasan por un punto fijo O de la misma?

R.: Una circunferencia que iene como diámetro el segmento determinado por O y el centro de la circunferencia dada.

19) Dos tangentes a una circunferencia paralelas entre sí, son cortadas por una tercer tangente en los puntos A y B. Probar que las rectas que unen A y B con el centro de la circunferencia son siempre perpendiculares.

Capítulo IV

LAS CÓNICAS

§ 15. La elipse

1. **Preliminar. Cónicas reducibles.** — Def. 1. Se llaman *cónicas*, las curvas cuya ecuación en un sistema de coordenadas cartesianas es un polinomio de segundo grado en las dos variables x é y, igualado a cero.

Como la propiedad de ser un polinomio de segundo grado se conserva en cualquier transformación de coordenadas cartesianas, por ser lineales las fórmulas de transformación, la definición que hemos dado es independiente del sistema de coordenadas elegido.

Tomemos un sistema cualquiera de coordenadas cartesianas (oblicuas u ortogonales). Los tipos más simples de ecuaciones de segundo grado son los que tienen un solo término, es decir las ecuaciones

$$[1] \qquad y^2 = 0 \quad ; \quad x^2 = 0 \quad ; \quad xy = 0 .$$

Las dos primeras son idénticas sin más que permutar la x por la y. La ecuación $y^2 = 0$ sólo se satisface para los puntos del eje OX. Como además la ordenada $y = 0$ es raíz doble de la ecuación, se considera cada punto como doble y se dice que la ecuación representa una recta doble.

La ecuación $xy = 0$ se satisface sea para $x = 0$ sea para $y = 0$; los puntos que satisfacen a dicha ecuación son los del eje OX, y los del eje OY, y sólo ellos, *la ecuación representa, pues, dos rectas que se cortan.*

Si tomamos todas las ecuaciones de segundo grado con dos términos, los casos posibles son

$$[2] \quad \begin{array}{lll} y^2 + ax^2 = 0 \quad ; & y^2 + axy = 0 \quad ; & y^2 + ay = 0 \quad ; \\ y^2 + ax = 0 \quad ; & y^2 + a = 0 \quad ; & xy + ax = 0 \quad ; \\ xy + a = 0 & & \end{array}$$

y los que se obtienen permutando en estos tipos la variable x con la y.

La primera, si $a > 0$ sólo se satisface para $x = 0$, $y = 0$, representa pues un solo punto real, pero se descompone en dos factores lineales imaginarios (§ 14-2) y diremos que repre-

senta *dos rectas imaginarias conjugadas.* Si $a \leqslant 0$, se descompone en la forma $(y - bx)(y + bx) = 0$, siendo $b^2 = -a$; los puntos que satisfacen a esta ecuación son pues, o los de la recta $y + bx = 0$ ó los de la recta $y - bx = 0$. Representa entonces *dos rectas que se cortan en el origen.*

La segunda se puede poner en la forma $y(y + ax) = 0$. Representa pues, *dos rectas que se cortan,* el eje OX y la de ecuación $y + ax = 0$.

La tercera se puede poner en la forma $y(y + a) = 0$. Representa por consiguiente las *dos rectas paralelas* $y = 0$, $y = -a$.

La cuarta ecuación representa una nueva curva que vamos a estudiar enseguida, que se denomina parábola, y cuya ecuación se acostumbra a poner en la forma

$$y^2 - 2px = 0. \tag{3}$$

La quinta ecuación si $a > 0$, carece de puntos reales, y si $a \leqslant 0$, por descomponerse en la forma $(y + b)(y - b) = 0$, siendo $b^2 = -a$, representa *dos rectas paralelas.*

La sexta se descompone en la forma $x(y + a) = 0$, y representa *dos rectas que se cortan.*

Con respecto a la séptima ecuación, veremos más adelante que representa la curva que estudiaremos previamente bajo otra forma denominada hipérbola.

2. **Elipse, hipérbola y parábola.** — Entre las ecuaciones que tienen tres términos, la de mayor interés es, como veremos en la teoría que sigue, la que contiene únicamente los términos en x^2, y^2, y el constante, es decir, dividiendo por el término constante, las del tipo $mx^2 + ny^2 = 1$.

Si m y n son los dos negativos, la ecuación carece de raíces reales. Si ambos son positivos, poniendo $a^2 = 1/m$, $b^2 = 1/n$, la ecuación toma la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

y la curva se denomina *elipse,* que cuando $a = b$, es una *circunferencia.* Si m y n son de signo contrario, la ecuación puede ponerse (permutando, si fuese necesario, la x por la y) en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

y la curva se denomina *hipérbola.*

Vamos ahora a ocuparnos del estudio de estas curvas, es decir, de la elipse, hipérbola y parábola, que han quedado definidas en la forma siguiente:

DEF. 2. *Se denominan elipse, hipérbola y parábola, a las curvas cuyas ecuaciones en un sistema de coordenadas cartesianas (oblicuas u ortogonales) tienen respectivamente la forma* [4], [5] y [3].

3. **Elipse. Tangente en un punto.** — De la simple consideración de la ecuación [4] de la elipse, se deduce que el origen es un centro de simetría, que se denomina *centro* de la elipse, ya que si el punto (x, y) está en la elipse, también lo está el punto $(-x, -y)$, y de una forma análoga se prueba que los ejes OX y OY son ejes de simetría oblicua.

La elipse está sólo definida para $|x| \leqslant a$ é $|y| \leqslant b$, luego está comprendida dentro del paralelogramo de lados $x = \pm a$, $y = \pm b$.

DEF. 3. Sea $M(x_0, y_0)$ un punto de la elipse. Una recta que pase por él se dice que es *tangente a la elipse*, cuando el sistema de ecuaciones de la elipse y de la recta admita una solución doble. Es decir, cuando reemplazando, en la ecuación de la elipse, una de las coordenadas por su valor deducido de la ecuación de la recta, la ecuación de segundo grado que resulta en la otra coordenada tenga una raíz doble.

Las ecuaciones de la elipse y de la recta son:

[6] $$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2; \quad y = y_0 + m(x - x_0) \quad \text{ó} \quad x = x_0.$$

Dejemos por el momento la recta $x = x_0$; se tiene, reemplazando

[7] $$b^2x^2 + a^2[y_0 + m(x - x_0)]^2 = a^2b^2.$$

Para que esta ecuación admita x_0 como raíz doble, es necesario y suficiente que la ecuación derivada

$$2b^2x + 2a^2[y_0 + m(x - x_0)]m = 0$$

tenga x_0 como raíz, es decir, que se ha de tener

$$2b^2x_0 + 2a^2y_0m = 0,$$

y por consiguiente, si $y_0 \neq 0$, tiene que ser

[8] $$m = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

La ecuación de la tangente es pues

$$y = y_0 - \frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$

o bien

$$a^2y_0y = a^2y_0^2 - b^2x_0x + b^2x_0^2$$

y como $a^2y_0^2 + b^2x_0^2 = a^2b^2$, por ser (x_0, y_0) un punto de la elipse, se tiene $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$, dividiendo por a^2b^2

$$[9] \qquad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

que es la ecuación de la tangente a la elipse.

Cuando sea $y_0 = 0$ entonces debe ser $x_0 = \pm a$ y la tangente a la elipse es entonces la recta $x = \pm x_0$, que antes habíamos dejado de lado. Basta, en efecto, ver que poniendo $x = x_0 = \pm a$ en la primera de las ecuaciones [6], se obtiene la ecuación $a^2y^2 = 0$ que tiene la raíz doble $y = 0$. Si en [9] ponemos $x_0 = \pm a$, $y = 0$, la ecuación toma la forma $x = \pm a$, luego: *la* [9] *es la ecuación general de la tangente a la elipse en el punto* (x_0, y_0).

Si queremos ahora determinar las tangentes que se pueden trazar a una elipse desde un punto cualquiera (x_1, y_1) del plano, el problema estará resuelto si sabemos determinar las coordenadas (x_0, y_0) del o de los puntos de contacto; éstos han de satisfacer a las condiciones

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad \frac{x_0x_1}{a^2} + \frac{y_0y_1}{b^2} = 1$$

es decir que el punto de contacto ha de estar en la elipse y en la recta tangente a la elipse en (x_0, y_0) y que pasa por (x_1, y_1).

El problema se reduce por tanto al de la determinación de los puntos de intersección de la elipse con una recta de ecuación $(x_1/a^2)x + (y_1/b^2)y = 1$, que vamos a estudiar de inmediato.

4. **Intersección de una recta con una elipse.** — El problema se reduce a resolver el sistema formado por las ecuaciones de la recta y de la elipse. Pongamos la ecuación de la elipse en la forma $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, y la de la recta, que supondremos por el momento, no paralela a OY en la forma $y = mx + h$.

Reemplazando el valor de y de la segunda ecuación en la primera se tiene

$$b^2x^2 + a^2m^2x^2 + a^2h^2 + 2a^2mhx = a^2b^2,$$

o bien

$$[10] \qquad (b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mhx + a^2(h^2 - b^2) = 0.$$

Según que esta ecuación tenga sus raíces reales y distintas, real doble o imaginarias, la recta tendrá dos puntos comunes, será tangente, o no tendrá ningún punto común con la recta.

El discriminante de la ecuación [10] es

$$a^4m^2h^2 - a^2(h^2 - b^2)(b^2 + a^2m^2) = a^2(a^2m^2h^2 - h^2b^2 - \\ - a^2h^2m^2 + b^4 + a^2b^2m^2) = a^2b^2(b^2 + a^2m^2 - h^2)$$

luego la recta tendrá dos puntos comunes con la elipse, será

tangente, o no tendrá ningún punto común según que h^2 sea menor, igual o mayor que $b^2 + a^2m^2$. Es decir, según se tenga

$$-\sqrt{a^2m^2 + b^2} < h < \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad ;$$
$$h = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad ;$$
$$h < -\sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad \text{ó} \quad h > \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

Por consiguiente cuando se deja m fijo y se hace variar h, es decir cuando se desplaza la recta Δ (fig. 48) paralelamente a sí misma, corta a la elipse cuando está comprendida

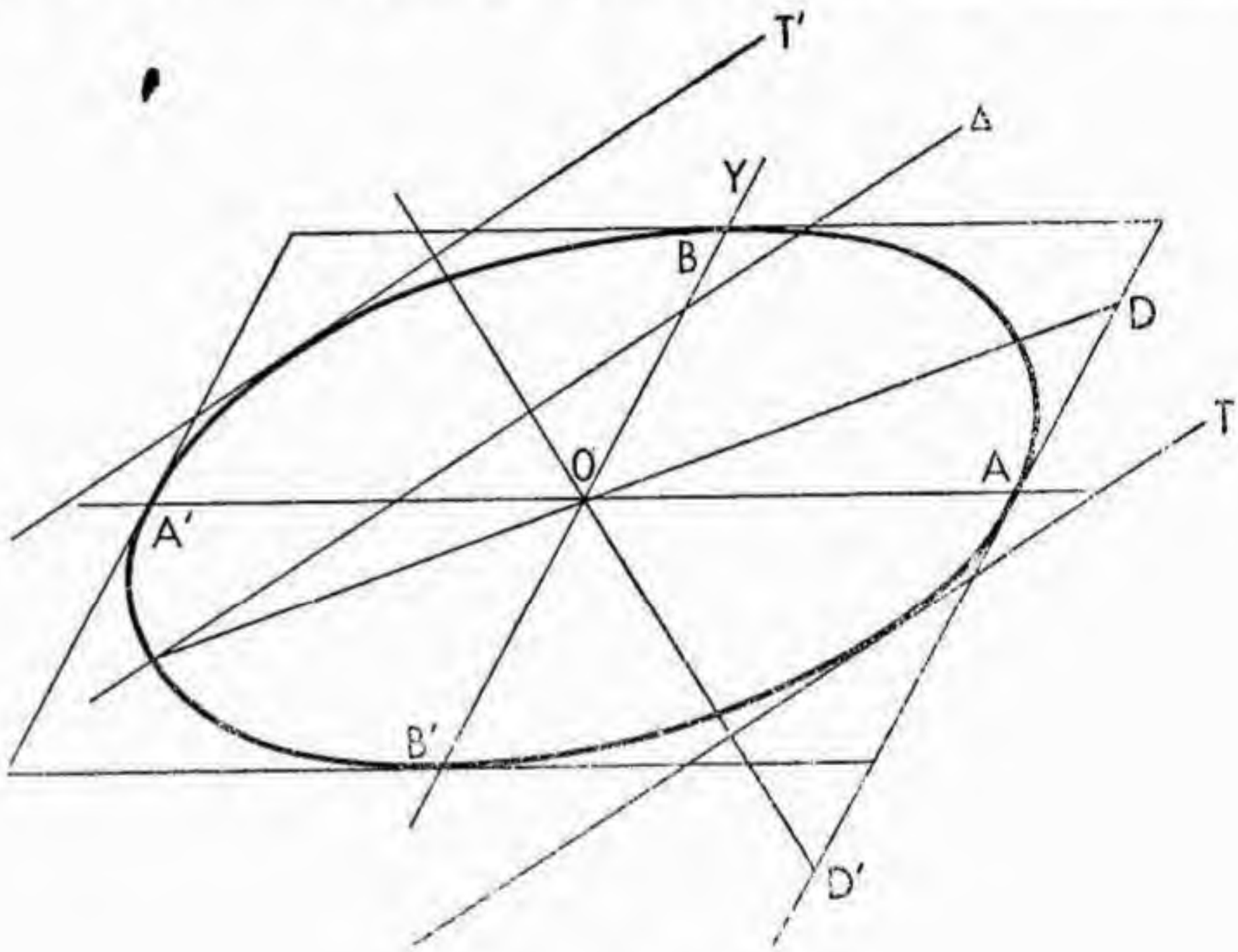

Fig. 48.

entre dos posiciones extremas T y T' simétricas con respecto al centro; estas dos rectas T y T' son las tangentes a la elipse, paralelas a una recta de coeficiente angular m y sus ecuaciones son

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$
$$y = mx - \sqrt{a^2b^2 + b^2}$$

Es inmediato que estos resultados siguen siendo válidos si tomamos Δ paralela a OY; sus puntos de intersección con la elipse son entonces los de ordenadas $\pm\, b/a\,\sqrt{a^2 - h^2}$ y las tangentes son las rectas de ecuaciones $x = \pm\, a$.

Cuando se consideran elementos imaginarios una recta tie-

ne siempre puntos comunes con la elipse. Así, por ejemplo, la elipse y la recta de ecuaciones

$$2x^2 + y^2 = 3 \quad , \quad y = -x + 3$$

tienen como puntos comunes, que se obtienen resolviendo el sistema, los puntos de coordenadas

$$(1 + i,\ 2 - i) \qquad (1 - i,\ 2 + i).$$

La solución que hemos dado al problema de determinar las ecuaciones de las tangentes a la elipse, paralelas a una dirección dada puede servir también para determinar las tangentes a la elipse, que pasan por un punto dado del plano: sean x_1, y_1 las coordenadas del punto.

Si $x_1 \neq \pm a$, las tangentes que pasan por (x_1, y_1) no pueden ser paralelas al eje OY, y según acabamos de ver, sus coeficientes angulares son los que cumplen la condición

$$(y_1 - mx_1)^2 = a^2m^2 + b^2$$

o sea

$$[11] \qquad m^2(x_1^2 - a^2) - 2x_1y_1m + y_1^2 - b^2 = 0$$

Si esta ecuación tiene dos raíces reales m_1 y m_2, se tienen como ecuaciones de las dos tangentes que pasan por el punto

$$y - y_1 = m_1(x - x_1)$$
$$y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

Si la ecuación tiene una raíz doble sólo pasa por el punto una tangente. Entonces se ha de tener

$$x_1^2y_1^2 = (y_1^2 - b^2)(x_1^2 - a^2) \qquad \text{ó} \qquad x_1^2b^2 + y_1^2a^2 - a^2b^2 = 0$$

y por consiguiente el punto (x_1, y_1) está en la elipse.

Si la ecuación no tiene raíces reales no pasa ninguna tangente por el punto.

Cuando es $x_1 = \pm a$ las dos tangentes son una, la $x = \pm a$, y la otra la que se obtiene de la ecuación [11], que en este caso es una ecuación de primer grado

$$-2x_1y_1m + y_1^2 - b^2 = 0$$

5. **Diámetros en la elipse.** — DEF. 4. Se denominan *diámetros* de la elipse las rectas que pasan por el centro.

La propiedad fundamental de los diámetros es la siguiente:

TEOR. 1. *Los puntos medios de las cuerdas paralelas a una recta dada están situados sobre un diámetro.*

Se entiende, naturalmente, por *cuerda*, el segmento que determinan sobre una recta sus puntos de intersección con la elipse.

La propiedad es inmediata, por la simetría oblicua de la curva, si las rectas son paralelas a uno de los ejes, los puntos medios de las cuerdas paralelas al eje OX están en OY y recíprocamente.

Sea ahora la recta de ecuación $y = mx$, $(m \neq 0)$. Toda recta paralela a ella tiene como ecuación $y = mx + h$. Las abscisas de los puntos de intersección de la recta con la elipse son

las raíces de la ecuación [10] y las coordenadas del punto medio de la cuerda son

$$[12] \qquad x_m = \frac{-hma^2}{a^2m^2+b^2}$$

$$y_m = \frac{-hm^2a^2}{a^2m^2+b^2} + h = \frac{b^2h}{a^2m^2+b^2}$$

y se tiene por consiguiente

$$\frac{h}{a^2m^2+b^2} = \frac{-x_m}{ma^2} = \frac{y_m}{b^2} \quad \text{ó} \quad y_m = -\frac{b^2}{a^2m}\,x_m$$

es decir, cualquiera que sea h, el punto (x_m, y_m) es un punto de la recta de ecuación

$$[13] \qquad y = \frac{-b^2}{a^2m}\,x$$

lo que prueba la propiedad.

6. **Diámetros conjugados.** — Si formamos ahora la ecuación del diámetro que contiene los puntos medios de las cuerdas paralelas a la recta de ecuación [13], dicha ecuación será

$$y = \frac{-b^2}{a^2m'}\,x$$

siendo m' el coeficiente angular de la recta [13], y por tanto, resulta la recta $y = mx$, de partida.

DEF. 5. Los dos diámetros de ecuaciones $y = mx$, $y = m'x$ que tienen *cada uno la propiedad de contener los puntos medios de las cuerdas paralelas al otro, se denominan conjugados.*

Cada diámetro tiene siempre un diámetro conjugado que se determina por la relación que liga los coeficientes angulares $mm' = -b^2/a^2$. En particular los ejes OX y OY son diámetros conjugados.

Cualquiera que sea h, las relaciones [12] nos dan las coordenadas del segmento cuyos extremos son los puntos de intersección de la recta $y = mx + h$, con la elipse.

Cuando dichos puntos son reales y distintos, nos dan el punto medio de la cuerda; cuando están confundidos, la recta es tangente a la elipse, es decir, se tiene la propiedad siguiente:

TEOR. 2. *Un diámetro pasa por los puntos de contacto de las tangentes paralelas a su diámetro conjugado.*

Si los puntos son imaginarios siguen valiendo las relaciones [12]. Como a cada valor de h le corresponde un valor de x_m y otro de y_m, y como a cada par de valores de x_m, y_m que satisfagan a la ecuación [13] le corresponde un valor de h, se

ve que un *diámetro es el lugar de los puntos medios de los segmentos definidos por los puntos de intersección (reales o imaginarios) de la elipse con las rectas paralelas a su diámetro conjugado.* Dichos puntos medios son siempre *reales.*

EJEMPLO: Consideremos la elipse de ecuación $2x^2 + y^2 = 3$ y la recta de ecuación $y = -x + 3$; como vimos anteriormente, tienen como puntos comunes los $(1 + i, 2 - i)$ y $(1 - i, 2 + i)$, el punto medio del segmento determinado por esos dos puntos tiene coordenadas $(1, 2)$. Los coeficientes a y b tienen aquí los valores $a^2 = 3/2$, $b^2 = 3$; luego el diámetro conjugado del $y = -x$ es el $y = 2x$ que efectivamente pasa por punto $(1, 2)$.

Vamos a estudiar ahora la posición de los diámetros conjugados D y D′ (fig. 48); sus coeficientes angulares m y m', como satisfacen a la relación $m \,.\, m' = -b^2/a^2$, tienen que ser de signo contrario, luego uno de los diámetros está en el ángulo AOB de los ejes de coordenadas y el otro en el ángulo BOA′. Siendo $m \,.\, m'$ constante en valor absoluto, cuando m crece, m' decrece, es decir, cuando un diámetro se aleja del eje OX el otro se acerca.

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) las coordenadas de los extremos de dos diámetros conjugados. Tenemos las siguientes relaciones:

$$b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2 \quad ; \quad b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = a^2b^2 \quad ;$$

$$\frac{y_2y_1}{x_2x_1} = -\frac{b^2}{a^2}$$

las dos primeras por ser (x_1, y_1); (x_2, y_2) puntos de la elipse y la tercera es la relación que liga los coeficientes angulares de dos diámetros conjugados; pongamos esta relación en la forma

$$\frac{ay_2}{bx_1} = \frac{-bx_2}{ay_1}$$

y llamando c al valor común de estas dos fracciones se tiene

$$c^2 = \frac{a^2y_2^2 + b^2x^2}{b^2x_1^2 + a^2y_1^2} = 1 \quad ; \quad \frac{ay_2}{bx_1} = \pm 1 \quad ; \quad \frac{bx_2}{ay_1} = \pm 1 \quad ;$$

en el que las combinaciones posibles de signos corresponden a las combinaciones posibles de los pares de extremos de diámetros conjugados. Tenemos, pues, las fórmulas

$$[14] \qquad x_2 = \pm \frac{a}{b} y_1 \qquad y_2 = \pm \frac{b}{a} x_1$$

que nos dan *las coordenadas de los extremos de un diámetro en función de las de los extremos de su diámetro conjugado.* Se acostumbra designar a estas fórmulas con el nombre de *fórmulas de Chasles.*

7. **Ecuación de la elipse respecto de dos diámetros conjugados cualesquiera.** — Dada una elipse, vamos a estudiar su ecuación cuando se toma como nuevo sistema de ejes el formado por dos diámetros conjugados.

Como las fórmulas de cambio de ejes son lineales, la ecuación de la elipse en el nuevo sistema seguirá siendo de segundo grado.

Por la propiedad de los diámetros conjugados, las cuerdas paralelas a uno de los ejes tienen sus puntos medios en el otro; luego si $M(x, y)$ está en la curva, también lo están $M'(-x, y)$ y $M''(x, -y)$, luego la ecuación sólo puede contener potencias pares de x é y, y como no pasa por el origen, tiene que tener un término independiente. Dividiendo por él la ecuación tendrá la forma

$$mx^2 + ny^2 = 1.$$

Sean A y B extremos de los dos diámetros conjugados que hemos tomado como ejes (fig. 48) y sean a y b las semilongitudes de las cuerdas que determinan dichos diámetros, que se denominan *semilongitudes de los diámetros*. Los puntos A y B tienen como coordenadas $(a, 0)$ y $(0, b)$, luego se ha de cumplir

$$ma^2 = 1 \quad ; \quad nb^2 = 1$$

y la ecuación de la elipse toma la forma

$$[15] \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es la *ecuación general de la elipse referida a dos diámetros conjugados cualesquiera, siendo* a *y* b *las longitudes de los semidiámetros.*

§ 16. La hipérbola y la parábola

1. **Hipérbola. Tangentes.** — Al igual que en la elipse, de la simple consideración de la ecuación [5] de la hipérbola, se deduce que ésta tiene el origen como centro de simetría y los ejes de coordenadas como ejes de simetría oblicuos (fig. 49). Está definida únicamente para $|x| \geqslant a$ y no tiene ningún punto real de intersección con el eje

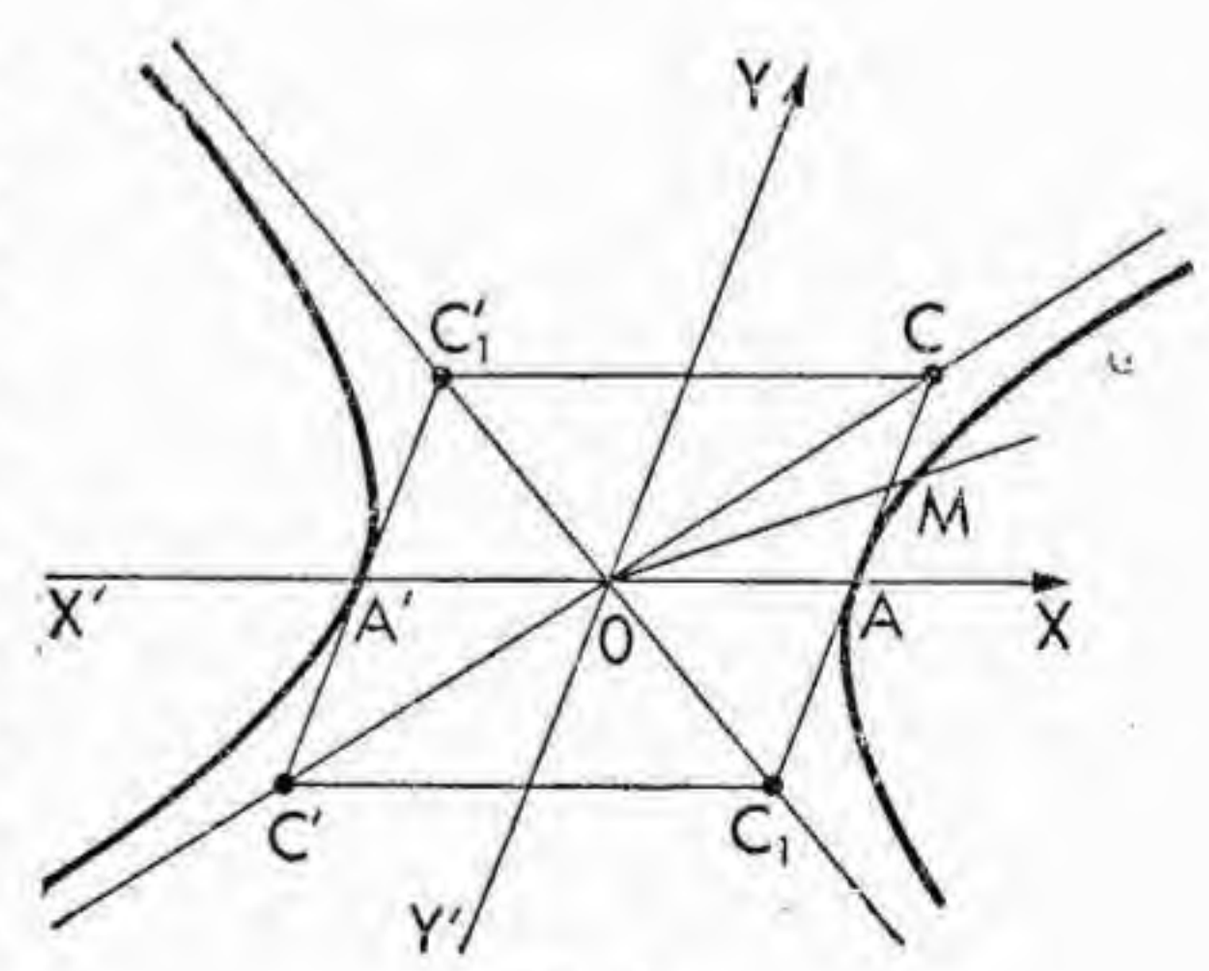

Fig. 49.

OY. La curva tiene, por consiguiente, dos ramas distintas en los semiplanos $x > 0$ y $x < 0$.

El estudio de los problemas de tangentes se hace como en el caso de la elipse y se llega a los siguientes resultados

La ecuación de la tangente a una hipérbola de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en un punto cualquiera $M(x_0, y_0)$ *de la misma es*

$$[1] \qquad \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

El problema de determinar las tangentes a la hipérbola, que pasan por un punto $M(x_1, y_1)$ *del plano, se reduce a determinar los puntos de intersección de la curva con la recta de ecuación*

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

siendo los puntos de esta intersección los puntos de contacto de las tangentes pedidas.

2. **Asíntotas.** — Consideremos ahora las rectas de ecuaciones

$$[2] \qquad y = \frac{b}{a}\, x \quad ; \quad y = -\frac{b}{a}\, x$$

y sea $M(x, y)$ un punto de la hipérbola situado en el ángulo XOY. El coeficiente angular de la recta OM es

$$m = \frac{y}{x} = \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

luego para x suficientemente grande, es decir, para x tendiendo a $+\infty$, el coeficiente angular de la recta OM tiende hacia b/a. Lo mismo sucede si M está en el ángulo X'OY', y si M está en los otros dos ángulos de los ejes de coordenadas, el coeficiente angular de OM tiende hacia $-b/a$.

DEF. 1. Las rectas CC' y C_1C_1', definidas mediante las ecuaciones [2], se denominan las *asíntotas* de la hipérbola.

El nombre de asíntota significa que la recta y la curva no tienen ningún punto común, pero que se aproximan tanto como se quiera; veamos que esto se cumple en el caso de la hipérbola. Si en la ecuación de la hipérbola reemplazamos la y por $\pm(b/a)x$, la ecuación resultante toma la forma $0 = 1$, es decir, las ecuaciones de la hipérbola y de las asíntotas son incompatibles, y por tanto la hipérbola y las asíntotas no tienen ningún punto común.

Las ordenadas y_1 é y_2 de la asíntota y la hipérbola están ligadas por la relación

$$y_1^2 - y_2^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 - \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = b^2 \quad ;$$

$$y_1 - y_2 = \frac{b^2}{y_1 + y_2}$$

y si suponemos $y_2 > 0$ é $y_1 > y_2$ (el resultado vale, por simetría, para los otros casos), se tiene

$$0 < y_1 - y_2 < \frac{b^2}{y_1} = \frac{ab}{x} \ ,$$

luego para x suficientemente grande $y_1 - y_2$ llega a ser tan pequeño como se quiera.

Si consideramos coordenadas homogéneas, las ecuaciones de la hipérbola y de la asíntota son

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2t \quad ; \quad y = \pm \frac{b}{a} x$$

reemplazando y en la ecuación de la hipérbola se tiene

$$b^2x^2 - b^2x^2 = a^2b^2t^2 \quad ; \quad t = 0$$

es decir que $t = 0$ es raíz doble y *la asíntota puede considerarse como tangente a la hipérbola en un punto impropio.*

Si consideramos los puntos C, C′, C_1, C_1', de intersección de las asíntotas con las rectas $x = \pm a$, se obtienen (a, b), $(-a, -b)$, $(a, -b)$, $(-a, b)$, lo que nos da una interpretación geométrica del coeficiente b de la hipérbola.

3. **Intersección de una hipérbola con una recta.** — Sea la hipérbola de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si buscamos su intersección con una recta paralela al eje OY de ecuación $x = h$ se ve que la corta en dos puntos si es $|h| > a$, es tangente si $h = \pm a$ y no tiene puntos comunes con la hipérbola si es $|h| < a$.

Consideremos ahora el caso de una recta de ecuación $y = mx + h$. El problema de determinar la intersección equivale analíticamente al de determinar las soluciones del sistema de dos ecuaciones

$$y = mx + h \quad , \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

de la recta y de la hipérbola. Eliminando y se obtiene

[3] $$x^2(b^2 - a^2m^2) - 2a^2mhx - a^2(h^2 + b^2) = 0.$$

Esta ecuación es siempre de segundo grado, salvo en el

caso en que es $b^2 - a^2m^2 = 0$, es decir para $m = \pm b/a$. Para que las raíces de la ecuación [3] sean reales, debe ser el discriminante $\geqslant 0$, es decir, debe ser

$$0 \leqslant a^4m^2h^2 + a^2(h^2 + b^2)(b^2 - a^2m^2) =$$
$$= a^4m^2h^2 + a^2h^2b^2 - a^4h^2m^2 + a^2b^4 - a^4b^2m^2 =$$
$$= a^2b^2(h^2 + b^2 - a^2m^2)$$

es decir, debe ser $h^2 \geqslant a^2m^2 - b^2$. Consideremos los tres casos siguientes:

1º $a^2m^2 - b^2 < 0$, es decir $-b/a < m < b/a$; sea Δ_1 la recta considerada (fig. 50); la paralela por el origen a Δ_1 está en este caso dentro del ángulo de las asíntotas que contiene el eje OX, y por lo tanto a la hipérbola, la ecuación [3] tiene siempre en este caso dos raíces reales distintas, es decir, la recta y la hipérbola tienen siempre dos puntos comunes.

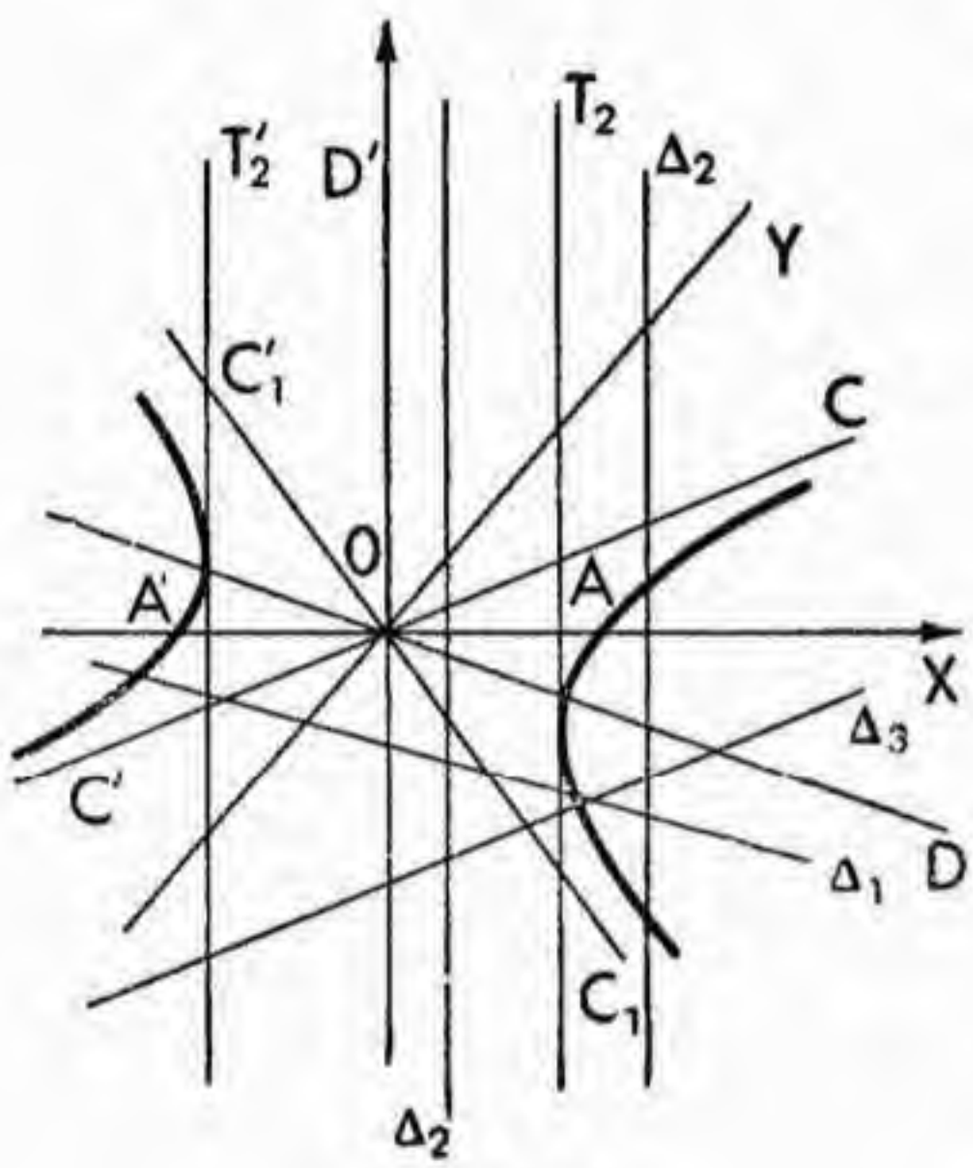

Fig. 50.

2º $a^2m^2 - b^2 > 0$, es decir $|m| > b/a$; sea Δ_2 la recta considerada, su paralela por el origen está en el ángulo de las asíntotas que no contiene a la hipérbola; la ecuación [3] es siempre de segundo grado, y tiene dos soluciones reales, una real doble o dos imaginarias según que sea

$$h > \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad \text{ó} \quad h < -\sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad ;$$
$$h = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad ;$$
$$-\sqrt{a^2m^2 + b^2} < h < +\sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

Por lo tanto, al desplazar Δ_2, la recta corta a la hipérbola en dos puntos reales y distintos cuando está colocada fuera de la banda del plano que determinan dos posiciones extremas T_2 y T'_2, simétricas con relación al centro y que son tangentes a la hipérbola; para posiciones de la recta comprendidas dentro de la banda de plano, la recta y la hipérbola no tienen ningún punto real común. En este caso las secantes cortan a la hipérbola en dos puntos de la misma rama, mientras que en el caso anterior los puntos de intersección están siempre en distintas ramas.

3º $a^2m^2 - b^2 = 0$, es decir $m = \pm b/a$, la recta secante es entonces paralela a una asíntota; la ecuación [3] es siempre de primer grado, admite una solución si $h \neq 0$ y ninguna si $h = 0$; es decir que, salvo en el caso de que coincida con una asíntota, la recta tiene un solo punto común con la hipérbola (recta Δ_3 de la fig. 50).

Si consideramos en este caso coordenadas homogéneas las ecuaciones de la hipérbola y de la recta son

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2t^2 \qquad y = \pm \frac{b}{a} x + ht$$

que admiten la solución común $(a, b, 0)$, es decir que siempre la recta y la hipérbola tienen un punto común impropio; por eso la recta, a pesar de tener un solo punto común con la hipérbola, no es tangente a la misma, salvo en el caso de la asíntota en que la solución $(a, b, 0)$ es doble y la asíntota es, como ya lo dijimos, tangente a la hipérbola en un punto impropio.

Si quisiéramos ahora, teniendo en cuenta la discusión que acabamos de realizar, estudiar el problema de las tangentes paralelas a una recta dada, vemos que sólo es posible el problema cuando el coeficiente angular m cumpla la condición $|m| > b/a$ y las tangentes tienen entonces como ecuaciones

$$[4] \qquad y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2} \qquad y = mx - \sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

Las consideraciones que hicimos sobre los elementos imaginarios al tratar este mismo problema en el caso de la elipse son aplicables también a la hipérbola.

Para determinar las tangentes que pasan por un punto del plano puede usarse el método empleado en el caso de la elipse, de tomar como incógnita el coeficiente angular de la tangente que se busca. Los razonamientos y cálculos hechos para la elipse se aplican en forma totalmente análoga en el caso de la hipérbola, y la ecuación [11] del § 15 toma en este caso la forma

$$[5] \qquad m^2(x_1^2 - a^2) - 2mx_1y_1 + y_1^2 + b^2 = 0.$$

4. **Diámetros de la hipérbola.** — Como en el caso de la elipse, se denominan *diámetros* de la hipérbola a las rectas que pasan por el centro, y se tiene aquí la misma propiedad fundamental

Los puntos medios de las cuerdas paralelas a una recta dada están situados sobre un diámetro.

Esta propiedad se demuestra exactamente igual que en el caso de la elipse, partiendo de la ecuación [3] en lugar de partir de la [10] del § 15, con la diferencia de que la [3] puede reducirse a una ecuación de primer grado cuando las rectas son paralelas a una asíntota, en cuyo caso ya vimos que no hay cuerdas.

También se demuestra, como en el caso de la elipse, la existencia de los *diámetros conjugados* y las propiedades de los mismos, y se establece la siguiente relación entre sus coeficiente angulares m y m'

$$[6] \qquad mm' = \frac{b^2}{a^2}.$$

Como el coeficiente angular de una asíntota satisface a la relación $m^2 = b^2/a^2$, se consideran las asíntotas como *diámetros singulares* autoconjugados

De la ecuación [3] se deduce que el punto medio de la cuerda que determina una secante de ecuación $y = mx + h$ con la hipérbola tiene como coordenadas

$$x_m = \frac{hma^2}{b^2 - a^2m^2} \qquad y_m = mx_m + h.$$

Los puntos de intersección de la secante con las asíntotas se obtienen resolviendo los sistemas

$$\begin{cases} y = mx + h \\ y = \dfrac{b}{a}\, x \end{cases} \qquad \begin{cases} y = mx + h \\ y = -\dfrac{b}{a}\, x \end{cases}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{ha}{b - am} \\ y_0 = mx_0 + h; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-ha}{b + am} \\ y_1 = mx_1 + h \end{cases}$$

y las coordenadas del punto medio del segmento determinado por esos dos puntos de intersección son

$$x_m = \tfrac{1}{2}\left(\frac{ha}{b - am} - \frac{ha}{b + am}\right) = \frac{hma^2}{b^2 - a^2m^2}$$

luego dicho punto es el punto medio de la cuerda. De aquí deducimos:

TEOR. 1. a) *Los segmentos interceptados por una secante entre la hipérbola y las asíntotas tienen la misma longitud.*

b) *El segmento determinado por una tangente a la hipérbola entre las asíntotas, tiene su punto medio en el punto de contacto de la tangente con la hipérbola.*

Vamos a estudiar ahora la posición relativa de dos diámetros conjugados D y D′ (fig. 50). De la relación $m \,.\, m' = b^2/a^2$

se deduce que uno de los coeficientes angulares es de módulo mayor que b/a y el otro menor y que ambos son del mismo signo, luego los dos diámetros están siempre dentro del mismo ángulo de los ejes de coordenadas, pero uno está dentro del ángulo de las asíntotas que contiene la hipérbola y el otro en el suplementario; cuando un diámetro se aleja del OX, el otro se acerca, ya que si m aumenta, m' disminuye. El diámetro que está dentro del ángulo de las asíntotas, corta a la hipérbola y se denomina *diámetro real*; el conjugado de éste no corta a la hipérbola y se denomina *diámetro imaginario*. Del estudio hecho del problema de la intersección de una hipérbola con una recta se deduce que los puntos del diámetro imaginario son siempre puntos medios de cuerdas paralelas al diámetro conjugado, mientras que en el diámetro real esta propiedad sólo es cierta para los puntos exteriores al segmento limitado por los puntos de intersección de la hipérbola con el diámetro.

Cuando se consideran elementos imaginarios, entonces, como en el caso de la elipse: *un diámetro es el lugar de los puntos medios del segmento definido por los puntos de intersección (reales o imaginarios) de la hipérbola, con las rectas paralelas a un diámetro conjugado.*

5. La hipérbola referida a dos diámetros conjugados. — Consideremos una hipérbola (fig. 51) y un par de diámetros conjugados, que tomaremos como nuevos ejes de coordenadas OX′ y OY′, siendo OX′ el diámetro real.

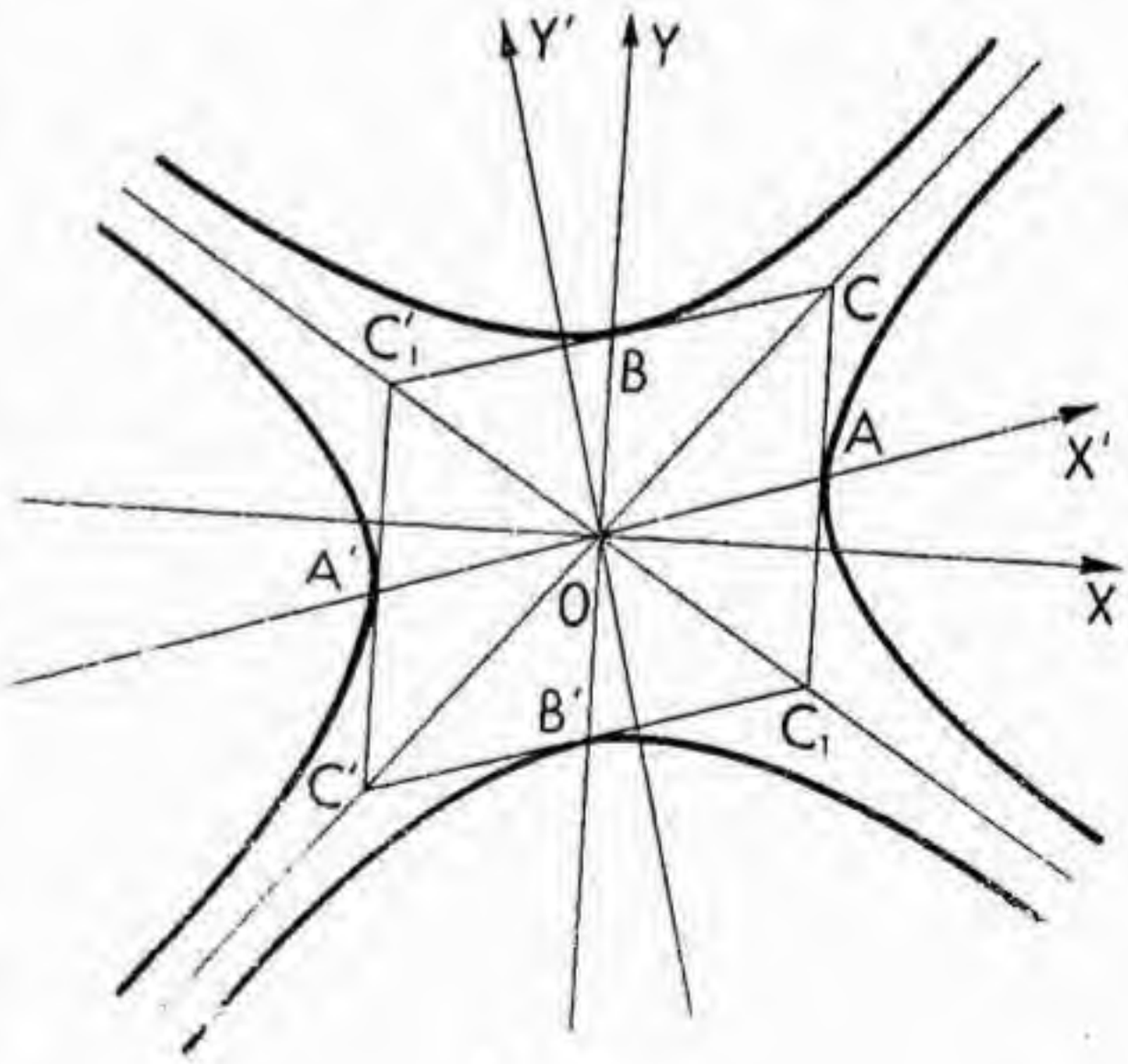

Fig. 51.

Por las mismas consideraciones de simetría que hicimos en el caso de la elipse, la ecuación de la hipérbola referida a estos nuevos ejes debe ser de la forma

$$mx^2 - ny^2 = 1.$$

Si designamos por $2a'$ la longitud del segmento AA′, las coordenadas del punto A han de ser $(a', 0)$ y por tanto se debe tener $a'^2 = 1/m$. Como la hipérbola no tiene ningún punto real común con el eje OY′, se debe tener

$n < 0$. Poniendo $b'^2 = -1/n$, la ecuación de la hipérbola toma finalmente la forma

$$[7] \qquad \frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1.$$

Teniendo esta ecuación la misma forma que con respecto a OX y OY se deduce que las ecuaciones de las asíntotas en el nuevo sistema serán

$$y' = \frac{b'}{a'}\, x' \qquad y' = -\frac{b'}{a'} x'$$

luego, de acuerdo con lo dicho en el § 16-3, las tangentes en A y A' a la hipérbola cortan a la asíntota en los puntos

$$C(a', b')\,; \quad C_1(a', -b')\,; \quad C'_1(-a', b')\,; \quad C'(-a', -b')$$

Las rectas CC'_1 y C_1C' cortan al eje OY' en los puntos B y B' de coordenadas $(0, b')$ y $(0, -b')$. Los puntos B y B' se llaman *extremos del diámetro imaginario* y la longitud de BB', es decir, $2b'$ se denomina la *longitud del diámetro imaginario*. Los puntos A y A' y la longitud $2a'$ se dice que son *los extremos y longitud del diámetro real.*

De lo dicho resulta que los cuatro extremos de los dos diámetros son los vértices de un paralelogramo que tiene los lados paralelos a las asíntotas.

Las *fórmulas de Chasles* que nos dan las coordenadas de los extremos de un diámetro en función de las de los extremos de su conjugado son, para el caso de la hipérbola,

$$x'_1 = \frac{a}{b}\, y_1 \quad ; \quad y'_1 = \frac{b}{a}\, x_1$$

y su demostración se hace como para el caso de la elipse.

6. **Hipérbolas conjugadas.** — Los extremos de los diámetros imaginarios satisfacen a la relación

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{a}{b}\, y'_1\right)^2 - \frac{1}{b^2}\left(\frac{b}{a}\, x'_1\right)^2 = 1 \qquad \text{o sea} \qquad \frac{y'^2_1}{b^2} - \frac{x'^2_1}{a^2} = 1$$

obtenida poniendo en la ecuación de la hipérbola en lugar de las coordenadas de un punto, su valor en función de las del diámetro conjugado al que pasa por dicho punto. Se ve pues que todos ellos están situados sobre una hipérbola de ecuación

$$[8] \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

y es evidente que, recíprocamente, los extremos de los diámetros imaginarios de la nueva hipérbola están en la hipérbola dada. Ambas hipérbolas se denominan *conjugadas*, y es inmediato que tienen las mismas *asíntotas*.

7. **La hipérbola referida a sus asíntotas.** — Tomemos ahora como ejes coordenados las asíntotas de la hipérbola (fig. 52). Por la linealidad de las fórmulas de cambio de coordenadas ha de ser la ecuación de la curva, de segundo grado, y por ser el origen un centro de simetría, no se ha de alterar la ecuación al cambiar x en $-x$ é y en $-y$, luego no ha de contener términos de primer grado ni en x ni en y, y como no pasa por el origen ha de contener término independiente. La ecuación será pues del tipo

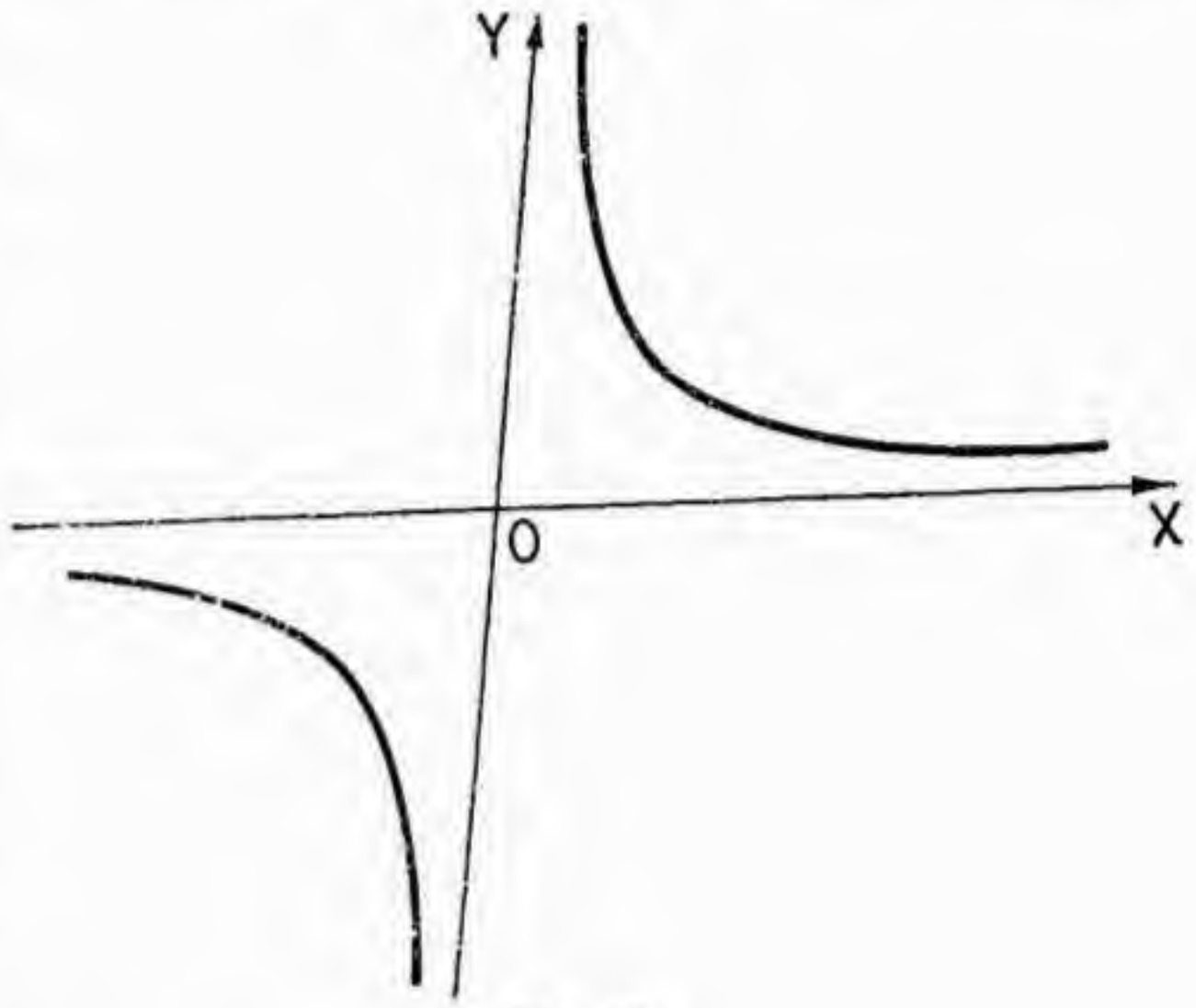

Fig. 52.

$$mx^2 + pxy + ny^2 + q = 0$$

Las rectas $y = h$ son secantes que sólo cortan a la hipérbola en un punto, luego la ecuación en x

$$mx^2 + phx + nh^2 + q = 0$$

admite una raíz simple para cualquier valor de h, y para que eso sea posible ha de ser $m = 0$. Análogamente se prueba que se debe tener $n = 0$ y por lo tanto la ecuación toma la forma $pxy = -q$ y como podemos suponer $-q/p > 0$ (pues en caso contrario bastaría cambiar el sentido del eje OX) la ecuación toma finalmente la forma

$$[9] \qquad xy = k^2$$

que nos da la ecuación de *una hipérbola referida a sus asíntotas.*

EJEMPLO: Sea la hipérbola $4x^2 - y^2 = 1$. Sus asíntotas son

$$y - 2x = 0 \quad , \quad y + 2x = 0.$$

Si tomamos estas rectas como nuevos ejes x', y', o sea, como rectas $y' = 0$, $x' = 0$, respectivamente, deberá ser

$$x' = y + 2x \quad , \quad y' = y - 2x$$

de donde

$$x = \tfrac{1}{4}(x' - y') \quad , \quad y = \tfrac{1}{2}(x' + y').$$

De aquí, sustituyendo estos valores en la ecuación dada de la hipérbola, resulta que la ecuación de la misma en el sistema x', y' de las asíntotas es $x'y' = -1$, que cambiando el sentido del eje x' (o sea, poniendo $-x'$ en vez de x'), queda de la forma [9].

8. **La parábola. Tangentes.** — Definimos la parábola como la curva cuya ecuación en un sistema de coordenadas cartesianas (oblicuas o rectangulares) es $y^2 = 2px$. La parábola está definida, pues, para los valores de $x \geqslant 0$ si es $p > 0$ y para los valores $x \leqslant 0$ si es $p < 0$. Consideraremos el primer caso (fig. 53).

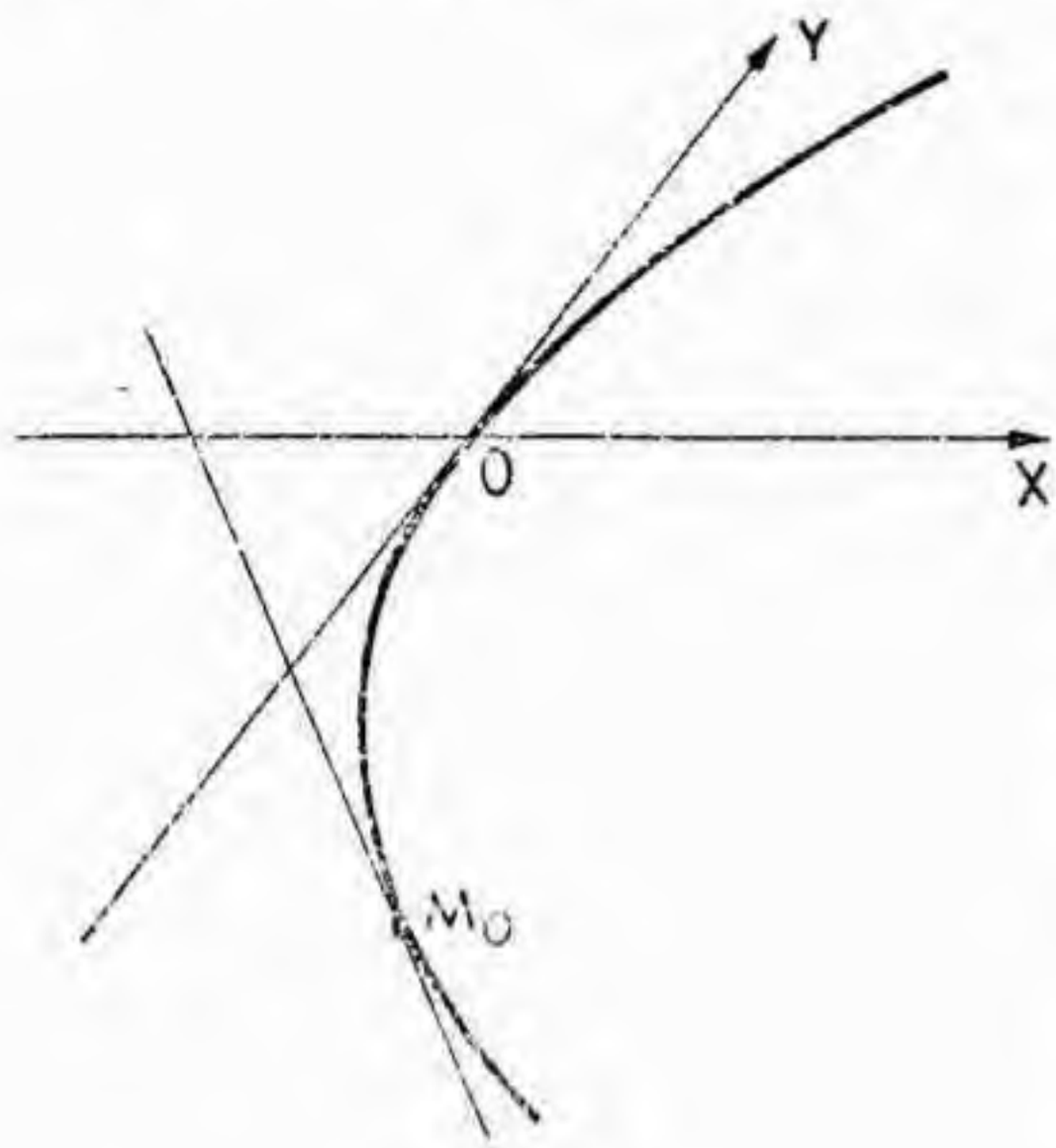

Fig. 53.

Dado un punto $M_0(x_0, y_0)$, como en el caso de la elipse y en el de la hipérbola, para determinar la tangente en M_0 a la parábola, hay que considerar el sistema formado por las ecuaciones de la parábola y de las rectas que pasan por el punto y buscar la condición para que dicho sistema admita una raíz doble. Las ecuaciones son

$$y^2 = 2px$$
$$y = y_0 + m(x - x_0) \quad \text{ó} \quad x = x_0.$$

Consideremos el caso $x = x_0$; reemplazando en la ecuación de la parábola queda $y^2 = 2px_0$ y para que esta ecuación tenga una raíz doble ha de ser $x_0 = 0$, es decir que el único punto en que la parábola admite una tangente paralela al eje OY es el origen. Pasemos ahora al caso de la ecuación $y = y_0 + m(x - x_0)$. Reemplazando y en la ecuación de la parábola se tiene

$$[y_0 + m(x - x_0)]^2 - 2px = 0.$$

Para que la recta sea tangente esta ecuación ha de admitir x_0 como raíz doble y para ello, como en los casos de la elipse y de la hipérbola ha de ser x_0 raíz de la ecuación derivada

$$2[y_0 + m(x - x_0)]m - 2p = 0$$

luego ha de ser $my_0 = p$ y como $y_0 \neq 0$ ha de ser $m = p/y_0$.

La ecuación de la tangente es pues

$$y = y_0 + \frac{p}{y_0}(x - x_0) \quad \text{ó} \quad yy_0 = y_0^2 + px - px_0$$

y como por ser (x_0, y_0) punto de la parábola es $y_0^2 = 2px_0$ la ecuación toma finalmente la forma

[10] $$yy_0 = px + \frac{y_0^2}{2},$$

que es *la ecuación general de la tangente a la parábola en un punto de la misma,*

Si queremos obtener ahora la ecuación de la tangente que pasa por un punto (x_1, y_1) del plano basta observar que las ordenadas de los puntos de contacto deben cumplir con la condición

[11] $$y_1 y_0 = px_1 + \frac{y_0^2}{2}$$

luego el problema se reduce a resolver esta ecuación de segundo grado en y_0.

9. **Intersección de la parábola con una recta.** — Sea la parábola de ecuación $y^2 = 2px$; si consideramos las rectas paralelas a OY, de ecuación $x = h$, es inmediato que cortan a la parábola en dos puntos reales, en uno doble o ninguno, segun que sea $h > 0$, $h = 0$, $h < 0$, siendo tangente, como ya lo vimos en el segundo caso.

Consideremos ahora una recta de ecuación $y = mx + h$; reemplazando en la ecuación de la parábola se tiene

[12] $$m^2x^2 + 2(mh - p)x + h^2 = 0$$

Consideremos dos casos:

1º $m \neq 0$; la ecuación es de segundo grado y tiene dos raíces reales, una real doble, o dos imaginarias según que sea $(mh - p)^2 - m^2h^2 = p(2mh - p)$ mayor, igual o menor que cero, es decir, según que se tenga

$$h > \frac{p}{2m} \qquad h = \frac{p}{2m} \qquad h < \frac{p}{2m}$$

luego cuando la recta se desplaza paralelamente a sí misma existe una sola posición de la recta, la de ecuacion

[13] $$y = mx + \frac{p}{2m}$$

que es tangente a la parábola; se obtiene una secante con dos puntos de intersección, cuando la paralela está situada en el semiplano de la tangente que contiene el semieje positivo de las abscisas y sin puntos comunes cuando está en el otro semiplano.

2º $m = 0$. La ecuación [12] toma la forma $-2px + h^2 = 0$, que tiene una sola solución, la $x = h^2/2p$, y la recta tiene por consiguiente un solo punto común con la parábola.

Si utilizamos coordenadas homogéneas, las ecuaciones de la parábola y de una paralela al eje OX son $y^2 - 2pxt = 0$, $y = ht$, y se ve que ambas tienen además del punto propio común que hemos dado, un punto impropio común, el (1, 0, 0), lo que explica por qué la recta no es tangente a la parábola, aún cuando tenga sólo un punto común (propio) con ella.

Si se emplean los elementos imaginarios, la recta tiene siempre dos puntos comunes con la parábola, reales y distintos, real y doble o imaginarios conjugados.

El problema de encontrar las tangentes paralelas a una recta dada admite, según lo que acabamos de decir, solución siempre que la recta no sea paralela al eje OX, esta solución es única y su ecuación es la [13].

Aplicando este resultado al problema de determinar las tangentes que pasan por un punto del plano, buscando los coeficientes angulares de las mismas, se ve que éstos deben satisfacer a la ecuación

$$[14] \qquad 2x_1m^2 - 2my_1 + p = 0$$

que nos da la solución del problema (por el cambio de variable $m = p/y_0$, esta ecuación toma la forma [11] utilizada para resolver este mismo problema).

10. **Diámetros en la parábola.** — Consideremos las rectas paralelas a una dada, de ecuación $y = mx + h$. El punto medio de la cuerda que determina la recta sobre la parábola tiene como coordenadas

$$x_m = \frac{p - mh}{m^2}\ ; \quad y_m = mx_m + h = \frac{p - mh}{m} + h = \frac{p}{m}$$

cuando m es fijo y h varía, se encuentran sobre la recta paralela a OX de ecuación $my = p$ y recíprocamente dada una recta de ecuación $my = p$, paralela a OX dicha recta contiene los puntos medios de las cuerdas determinadas por las rectas paralelas a la recta de ecuación $y = mx$, y pasa por el punto de contacto de la tangente paralela a dicha recta.

DEF. 4. Por cumplirse esta propiedad definiremos los *diámetros* de la parábola como las rectas paralelas al eje OX, es decir, como las secantes a la parábola que la cortan en un solo punto (propio).

El eje OX es el diámetro lugar de las paralelas al eje OY.

Los diámetros no determinan cuerdas en la parábola y por consiguiente *en la parábola no existen diámetros conjugados.*

Como en el caso de la elipse y la hipérbola, *un diámetro es el lugar de los puntos medios de los segmentos definidos por los puntos de intersección (reales o imaginarios) de la parábola con las rectas paralelas a la tangente a la parábola, en el*

punto de intersección de ésta con el diámetro. Este punto se denomina el *extremo del diámetro.*

Dada una parábola de ecuación $y^2 = 2px$ (fig. 54) hemos visto que el eje OY es tangente en el origen a la parábola, consideremos ahora un diámetro y la tangente en su extremo que tomaremos como nuevos ejes de coordenadas OX′ y OY′. Las fórmulas de transformación de ejes son en este caso

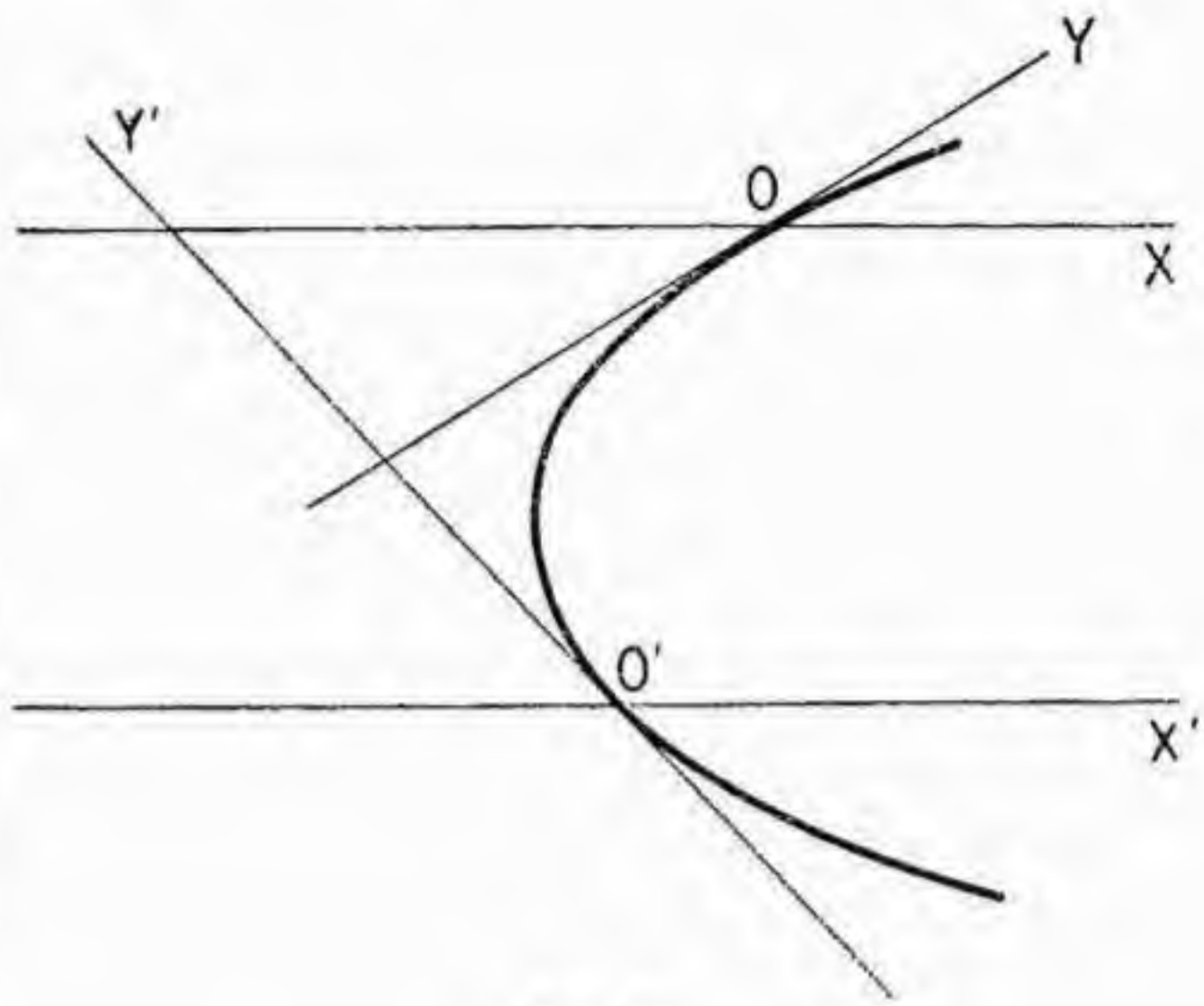

Fig. 54.

$$x = x_0 + x' + \alpha y'$$
$$y = y_0 + \beta y'$$

(siendo x_0 é y_0 las coordenadas de O′).

La ecuación de la parábola en el nuevo sistema es

$$y_0^2 + 2y_0\beta y' + \beta^2 y'^2 = 2px_0 + 2px' + 2p\alpha' y'$$

Como $y_0^2 = 2px_0$ la ecuación no tiene término independiente; por otra parte por la propiedad del diámetro de contener los puntos medios de las cuerdas paralelas a OY′ no ha de alterar al cambiar y' en $-y'$ luego se debe anular el término en y'. Por todo ello la ecuación toma la forma $\beta^2 y'^2 = 2px'$, y si llamamos $p' = p/\beta^2$, la ecuación toma finalmente la forma

[15] $$y'^2 = 2p'x'$$

que es la *ecuación general de la parábola respecto de un diámetro y la tangente en su extremo.*

§ 17. Propiedades métricas de la elipse

1. La elipse en coordenadas ortogonales. — Sea una elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en un sistema de coordenadas cartesianas oblicuas cualesquiera.

Si $y = mx$; $y = m'x$ son las ecuaciones de dos rectas que pasan por el centro, el ángulo α de las mismas viene dado por

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(m' - m) \operatorname{sen} \theta}{1 + (m + m') \cos \theta + mm'}$$

siendo θ el ángulo de los ejes coordenados, luego para que dichas rectas sean perpendiculares debe anularse el denominador.

Si suponemos ahora que $y = m'x$ es la ecuación del diámetro conjugado de $y = mx$ se tiene (§ 15-5) $mm' = -b^2/a^2$, luego para que los diámetros sean perpendiculares se debe tener

$$1 + \left(m - \frac{b^2}{a^2 m}\right) \cos \theta - \frac{b^2}{a^2} = 0$$

$$a^2 \cos \theta \, m^2 + (a^2 - b^2) \, m - b^2 \cos \theta = 0$$

El discriminante de esta ecuación de segundo grado en m es

$$(a^2 - b^2)^2 + 4a^2 b^2 \cos^2 \theta > 0 \quad \left(\text{si } \theta \neq \frac{\pi}{2}\right)$$

luego la ecuación tiene siempre dos raíces reales, es decir, en *toda elipse, siempre existe un par de diámetros conjugados perpendiculares.* De aquí, teniendo en cuenta [15] del § 15, se tiene:

Toda elipse puede referirse a un sistema de ejes cartesianos rectangulares, de modo que su ecuación sea:

$$[1] \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se acostumbra a tomar como eje de abscisas el que tiene mayor longitud de diámetro, es decir que, salvo especificación contraria, supondremos siempre $a > b$. Si fuese $a = b$ tendríamos evidentemente una circunferencia de radio a, es decir, que la *circunferencia es un caso particular de la elipse.*

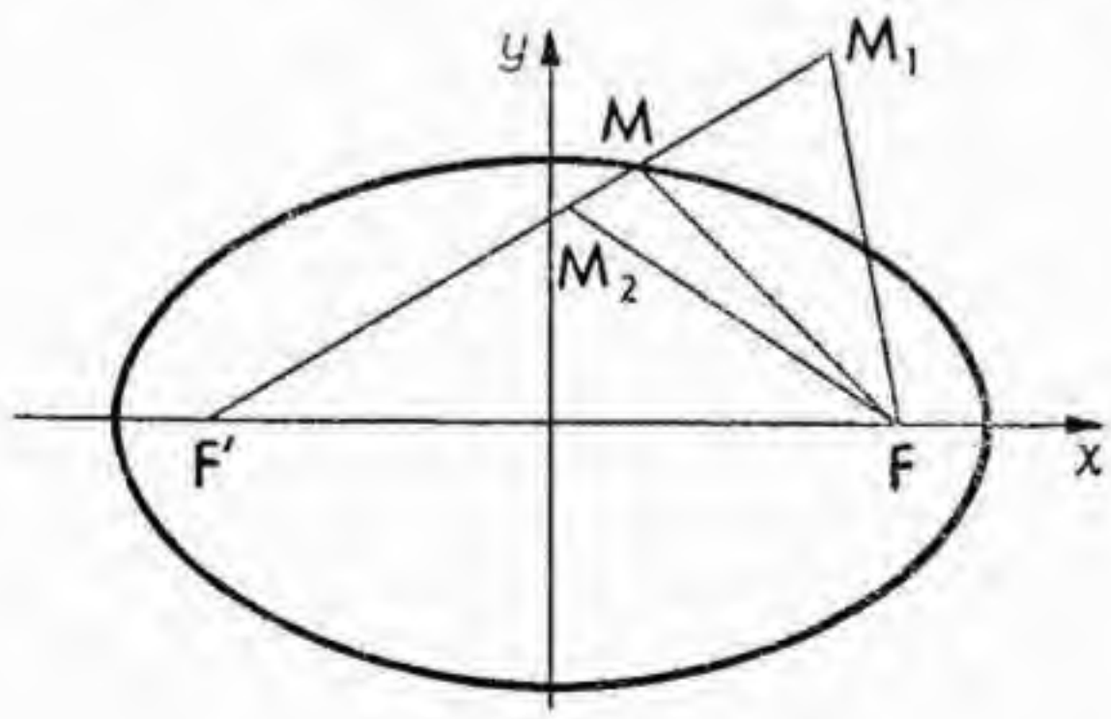

Fig. 55.

2. Focos de la elipse. — DEF. 1. Si ponemos $c^2 = a^2 - b^2$, se denominan *focos* de la elipse a los puntos $F(c, 0)$; $F'(-c, 0)$ (fig. 55).

Sea $M(x, y)$ un punto cualquiera de la elipse y ϱ_1 su distancia al foco $(c, 0)$. Se tiene:

$$\varrho_1^2 = (x - c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) =$$

$$= \frac{x^2}{a^2}(a^2 - b^2) - 2cx + c^2 + b^2 =$$

$$= \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2.$$

Como $x \leqslant a$ es siempre $a - \frac{c}{a}x \geqslant a - c > 0$, luego tomando el valor positivo al extraer la raíz cuadrada se tiene

$$\varrho_1 = a - \frac{c}{a}x$$

Análogamente, si ϱ_2 es la distancia de M al foco F′, se tiene:

$$\varrho_2 = a + \frac{c}{a}x$$

Los focos tienen pues la notable propiedad de que sus distancias a cualquier punto de la elipse se expresan en función racional de la abscisa del punto.

DEF. 2. Se denomina *excentricidad* de la elipse al número $e = \frac{c}{a}$, que es siempre menor que 1; las distancias de un punto a los focos vienen dadas por las fórmulas

[2] $$\varrho_1 = a - ex \quad ; \quad \varrho_2 = a + ex$$

y sumando se tiene

[3] $$\varrho_1 + \varrho_2 = 2a$$

La importante propiedad expresada por la fórmula anterior suele adoptarse como definición geométrica de la elipse y sirve para construir la elipse por puntos trazando desde los focos circunferencias de radios ϱ_1 y ϱ_2 tales que

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 2a.$$

Para que la propiedad expresada por [3] pueda ser tomada como definición de la elipse habrá que probar que los puntos de esta curva son los únicos que la cumplen. En efecto: tomemos un punto cualquiera del plano y unámoslo con un foco. Si está entre el foco y el punto M de intersección de la recta con la elipse (punto M_2 de la figura 55) se tiene:

$$FM_2 + M_2F' < F'M_2 + M_2M + MF = 2a\,.$$

Si es M el que está entre el punto y el foco (punto M_1 de la figura 55) se tiene:

$$2a = F'M + MF < F'M + MM_1 + M_1F = F'M_1 + M_1F.$$

Obtenemos así la propiedad siguiente:

TEOR. 1. *La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.* Esta definición de la elipse es una *definición meramente geométrica, con independencia de todo sistema de ejes coordenados.*

Hemos demostrado en forma geométrica una parte de esta propiedad, pero vamos a ver que puede hacerse toda la demostración en forma totalmente analítica. Para ello probaremos analíticamente que todo punto $M(x, y)$, cuya suma de distancias a los focos sea igual a $2a$, satisface a la ecuación [1] de la elipse.

Sean ϱ_1 y ϱ_2 las distancias de M a los focos; se tiene:

$$\varrho_1^2 = (x - c)^2 + y^2 \quad ; \quad \varrho_2^2 = (x + c)^2 + y^2 \quad ;$$

$$\varrho_1^2 - \varrho_2^2 = -4cx \quad ; \quad \varrho_1 + \varrho_2 = 2a \quad ;$$

$$\varrho_1 - \varrho_2 = \frac{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}{\varrho_1 + \varrho_2} = \frac{-2cx}{a} \quad ;$$

$$\varrho_1 = a - \frac{cx}{a} \quad ; \quad \varrho_2 = a + \frac{cx}{a}.$$

Reemplazando este valor en la expresión ϱ_1^2 se tiene:

$$a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \quad ;$$

$$x^2\frac{a^2 - c^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2 \quad ;$$

$$\frac{x^2b^2}{a^2} + y^2 = b^2 \quad ;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

luego M pertenece a la elipse.

3. **Vértices de la elipse.** — DEF. 3. Los puntos en que la elipse corta a los ejes de coordenadas, es decir $A(a, 0)$; $A'(-a, 0)$; $B(b, 0)$; $B'(-b, 0)$, se denominan *vértices* de la curva; los segmentos AA' y BB' se denominan respectivamente eje mayor y eje menor. Los ejes OX y OY son ejes de simetría ortogonal de la curva (fig. 56).

De la ecuación de la elipse se deduce

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$b^2(x^2 + y^2) = a^2b^2 - a^2y^2 + b^2y^2 = a^2b^2 - c^2y^2$$
$$a^2(x^2 + y^2) = a^2b^2 - b^2x^2 + a^2x^2 = a^2b^2 + c^2x^2$$

De la segunda de estas fórmulas deducimos que la distancia de un punto de la elipse al origen es máxima para $y = 0$ y de la tercera que es mínima para $x = 0$, es decir que *los vértices A y A′ son los puntos de la elipse más alejados del centro y los B y B′ los más próximos.*

4. **Ecuaciones paramétricas de la elipse.** — Consideremos (fig. 56) una elipse cuya ecuación sea [1] y dos circunferencias con centros en el origen y radios a y b.

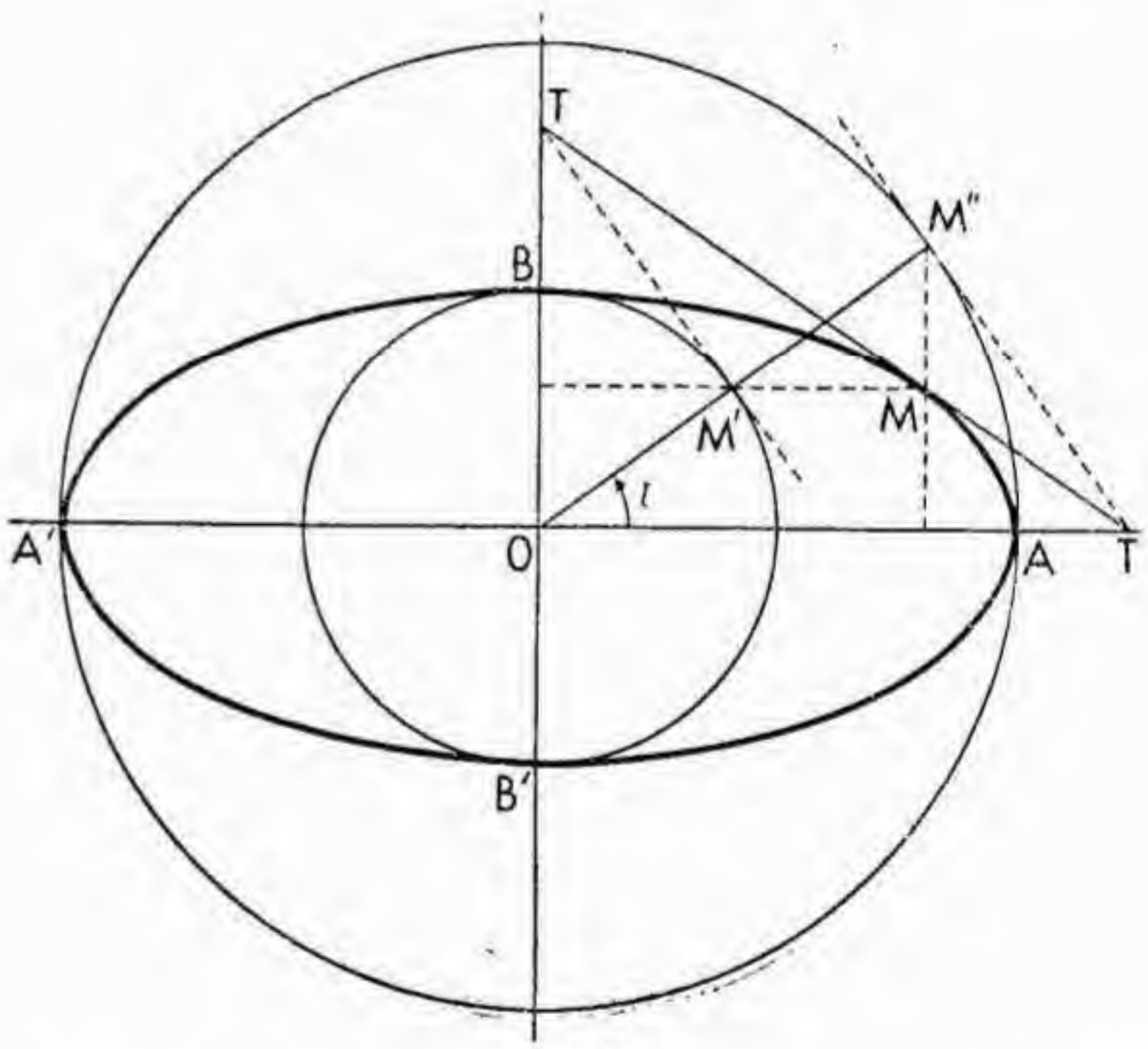

Fig. 56.

Es inmediato que estas circunferencias son tangentes (o sea, tienen la misma recta tangente) a la elipse en los puntos A y A′ y B y B′ respectivamente.

DEF. 4. A la primera circunferencia se la designa con el nombre de *circunferencia principal* y a la segunda con el nombre de *circunferencia menor principal.*

Las ecuaciones paramétricas de cada circunferencia, en función del ángulo t, son

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = b\cos t \\ y = b \operatorname{sen} t \end{cases}$$

Consideremos dos puntos M″ y M′ de la primera y segunda circunferencias correspondientes al mismo valor del parámetro t; el punto M cuya abscisa es la de M″ y la ordenada la de M′ es un punto de la elipse puesto que se tiene

$$\frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2 \operatorname{sen}^2 t}{b^2} = 1.$$

Como este resultado puede obtenerse cualquiera que sea el punto M de la elipse, deducimos que las ecuaciones

$$[4] \qquad x = a\cos t \qquad y = b \operatorname{sen} t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

son las *ecuaciones paramétricas de la elipse.*

Tomando como nuevo parámetro $u = \operatorname{tg} t/2$, como se hizo para la circunferencia (§ 12-8), se tienen también como ecuaciones paramétricas de la elipse las siguientes funciones racionales del parámetro

$$[4'] \qquad x = a\frac{1-u^2}{1+u^2} \quad ; \quad v = b\frac{2u}{1+u^2}$$

en donde u toma todos los valores reales.

De estas ecuaciones paramétricas se deduce una regla para construir por puntos la elipse: se trazan las dos circunferencias principales y un radio cualquiera OM″ (fig. 56) que corta a ambas circunferencias en M′ y M″; se traza desde M″ una paralela a OY y desde M′ una paralela a OX; el punto M de intersección de ambas paralelas pertenece a la elipse.

De la comparación de las ecuaciones paramétricas de la elipse y de la circunferencia principal se deduce que los puntos de la elipse se obtienen a partir de los de la circunferencia dejando invariable la abscisa y multiplicando la ordenada por $\frac{a}{b}$; esta alteración proporcional de las ordenadas sin variar la abscisa se denomina una *afinidad* y se dice por esto que la elipse es *afine* de la circunferencia principal.

Consideremos los puntos

$$(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad x_0, \left(\frac{y_0 a}{b}\right)$$

de la elipse y de la circunferencia principal. Las tangentes en esos puntos a dichas curvas tienen como ecuaciones respectivamente ([9] del § 15)

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad ; \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{ab} = 1$$

que, como se deduce inmediatamente, se cortan siempre en un punto del eje OX.

De aquí se deduce la regla para trazar la tangente a la elipse en un punto M: Se traza la perpendicular por M a OX hasta que encuentre en M″ a la circunferencia principal; se traza la tangente a esta circunferencia en M″ hasta que corte en T al eje OX; la recta MT es la tangente pedida. Consideraciones y construcciones análogas pueden hacerse sobre la circunferencia menor principal.

5. **Proyecciones ortogonales de la elipse.** — Consideremos ahora un plano π que pase por el eje mayor de la elipse y forme con el plano de ésta un ángulo α tal que $\cos\alpha = b/a$.

En el plano π describamos una circunferencia cuyo diámetro sea el eje mayor de la elipse. Las coordenadas de un punto M de la circunferencia serán $x_1 = a\cos t$; $y_1 = a \operatorname{sen} t$; las coordenadas de la proyección ortogonal de M sobre el plano de la elipse serán

$$x = x_1 = a\cos t \quad ; \quad y = y_1 \cos\alpha = b \operatorname{sen} t \quad ;$$

es decir las coordenadas de un punto de la elipse. Recíprocamente cada punto M de la elipse es la proyección de un punto de la circunferencia. Se tiene, pues, el siguiente resultado:

La elipse es la proyección ortogonal de una circunferencia que tiene como diámetro su eje mayor.

Si tomamos ahora un plano que pase por el eje menor de la elipse y forme con el de la elipse un ángulo α tal que $\cos\alpha = b/a$ y proyectamos la elipse ortogonalmente sobre dicho plano, un razonamiento análogo al que acabamos de hacer nos probaría:

Se puede elegir un plano tal que la proyección de la elipse sobre dicho plano sea una circunferencia que tiene como diámetro su eje menor.

Consideremos ahora el caso general de la proyección ortogonal de una elipse sobre un plano.

Desplacemos el plano paralelamente a sí mismo, lo que no altera la proyección, hasta que pase por el centro de la elipse; la cortará según un diámetro Δ. Tomemos en el plano de la elipse un sistema de ejes cartesianos cuyos ejes sean Δ y su diámetro conjugado Δ' y en el plano de proyección el sistema que tiene como ejes Δ y la proyección ortogonal Δ_1 de Δ'.

La ecuación de la elipse respecto de los ejes Δ y Δ' es la [15] del § 15

$$[5] \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si x_1 é y_1 son las coordenadas con respecto al sistema de ejes Δ y Δ_1 de un punto (x, y) de la elipse, se tiene

$$x_1 = x \qquad y_1 = y\cos\alpha$$

luego

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2\cos^2\alpha} = 1$$

que es la ecuación de una elipse.

Recíprocamente dado un punto cualquiera $(x_1\ y_1)$ que satisfaga a la relación anterior, es la proyección de un punto cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación [5]. Se tiene, pues:

TEOR. 2. *La proyección ortogonal de una elipse es siempre otra elipse.* (En particular puede ser una circunferencia). Recíprocamente, con un razonamiento análogo al anterior, se prueba que: *Si la proyección ortogonal de una curva plana es una elipse, dicha curva es también una elipse.* (En particular puede ser una circunferencia).

6. **Propiedades métricas de los diámetros.** — Dada la elipse de ecuación [1], referida a un sistema de ejes cartesianos rectangulares, el ángulo α que forman dos diámetros conjugados viene dado por (§ 10-2)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m - m'}{1 + mm'} = \frac{m + \dfrac{a^2}{b^2 m}}{1 - \dfrac{a^2}{b^2}}$$

Hagamos variar m dentro del primer cuadrante. En el numerador tenemos la suma de dos números variables cuyo producto es constante. Es sabido en aritmética que dicha suma es mínima cuando los sumandos son iguales, es decir, para $m = b/a$; por consiguiente el ángulo de dos diámetros conjugados tiene un mínimo cuando dichos diámetros son las diagonales del paralelogramo CC', $C_1C'_1$ (fig. 57). El máximo corresponde naturalmente a los ejes de coordenadas.

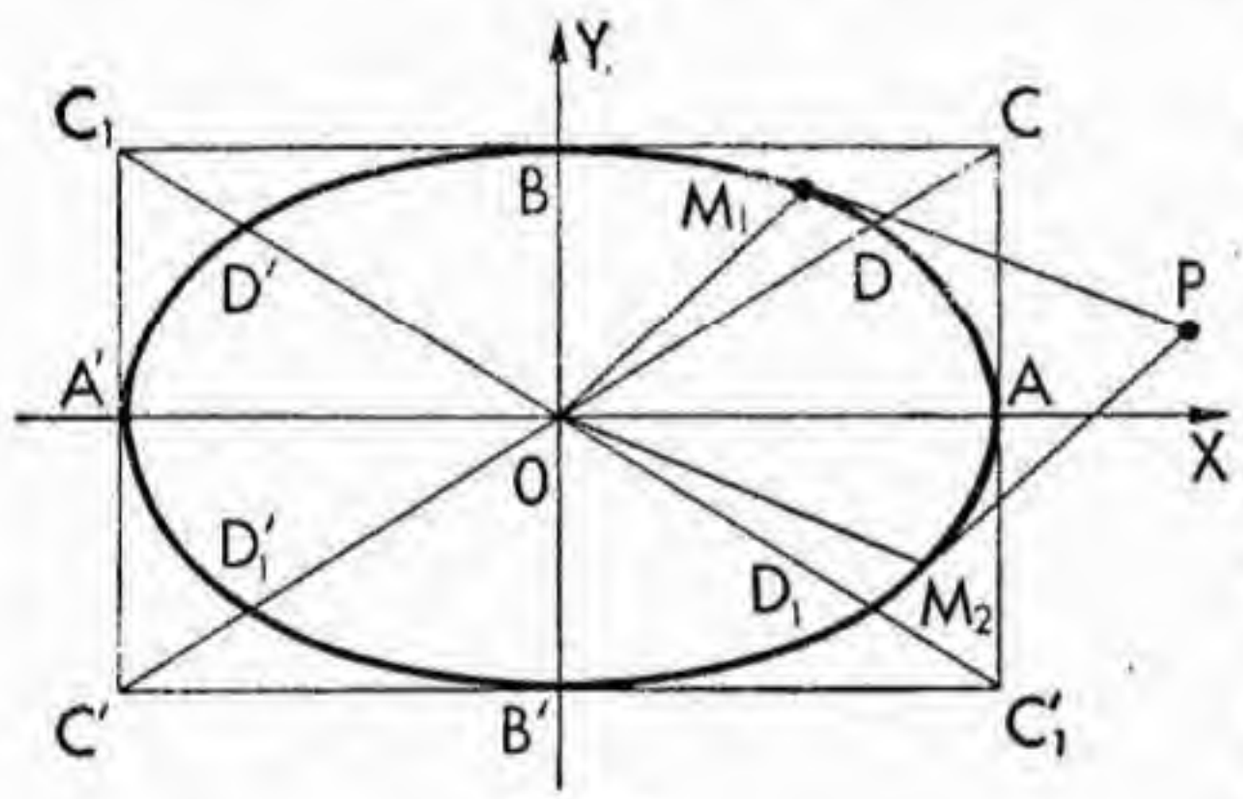

Fig. 57.

Los extremos de dichos diámetros conjugados tienen como coordenadas, las que se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad y = \pm \frac{b}{a}\, x \quad ;$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad ;$$

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} \quad ; \quad y = \pm \frac{b}{\sqrt{2}} \quad ;$$

es decir son:

$$D\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\,,\ \frac{b}{\sqrt{2}}\right) ; \quad D'\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\,,\ \frac{b}{\sqrt{2}}\right) ;$$

$$D'_1\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right) ; \quad D_1\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

Las semilongitudes de estos diámetros son $a^2/2$ y $b^2/2$ y por consiguiente poniendo $c^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2}$ la ecuación de la elipse referida a dichos diámetros es

[6] $$x^2 + y^2 = c^2.$$

TEOR. 3. (*Primer teorema de Apolonio*): *La suma de los cuadrados de las semilongitudes de dos diámetros conjugados es constante.*

En efecto: sean a' y b' las semilongitudes de dos diámetros conjugados y (x_1, y_1), (x_2, y_2) las coordenadas de sus extremos. Se tiene

$$x_1^2 + y_1^2 = a'^2 \qquad x_2^2 + y_2^2 = b'^2$$

y en virtud de las fórmulas de Chasles, § 15-6-[14]

$$a'^2 + b'^2 = x_1^2 + y_1^2 + \frac{b^2}{a^2} x_1^2 + \frac{a^2}{b^2} y_1^2 =$$

$$= x_1^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) + y_1^2\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$= \left(a^2 + b^2\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)$$

Pero como (x_1, y_1) es un punto de la elipse, se tiene

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$$

lo que prueba el teorema.

TEOR. 4. (*Segundo teorema de Apolonio*): *El área del paralelogramo construído sobre dos semidiámetros conjugados es constante.*

En efecto: si $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$ (fig. 57) son los extremos de dos semidiámetros conjugados, el área del paralelogramo OM_1PM_2 es el doble del área del triángulo OM_1M_2, es decir (§ 10-6) el valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = |x_1y_2 - y_1x_2|$$

y por tanto, en virtud de las fórmulas de Chasles, se tiene:

$$A = \left| -\frac{b}{a} x_1^2 - \frac{a}{b} y_1^2 \right| = a \,.\, b\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)$$

y como (x_1, y_1) es un punto de la elipse, se tiene finalmente

$$A = a \,.\, b$$

lo que prueba el teorema.

Una consecuencia del primer teorema de Apolonio es la existencia de un único par de diámetros conjugados de la misma longitud (los que ya encontramos en nº 6). En efecto: por el primer teorema de Apolonio si dos diámetros conjugados tienen la misma semilongitud a', se debe tener

$$2a'^2 = a^2 + b^2 \quad ; \quad a'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} = c^2$$

y por lo tanto sus extremos están en una circunferencia de centro el origen y radio c. Sus coordenadas serán pues las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad x^2 + y^2 = c^2$$

y este sistema tiene cuatro pares de soluciones:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$$

que son los extremos de los diámetros encontrados en nº 6 y que formaban ángulos iguales con los ejes.

7. **Normales a la elipse.** — Dado un punto (x_0, y_0) de la elipse, la normal en dicho punto es la perpendicular a la tangente en (x_0, y_0). Su ecuación será por consiguiente (teniendo en cuenta § 15-3):

[7] $$b^2x_0(y - y_0) = a^2y_0(x - x_0) \quad \text{ó}$$

$$y - y_0 = \frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x - x_0).$$

TEOR. 5. *La tangente y la normal en un punto de la elipse son bisectrices del ángulo formado por las rectas que unen el punto con los focos.*

En efecto: sea (fig. 58) $M(x_0, y_0)$ un punto de la elipse. La propiedad quedará demostrada si probamos que la tangente MT es bisectriz del ángulo externo en M del triángulo MFF', y para ello, según un conocido teorema de geometría, basta probar que se cumple la relación [1]

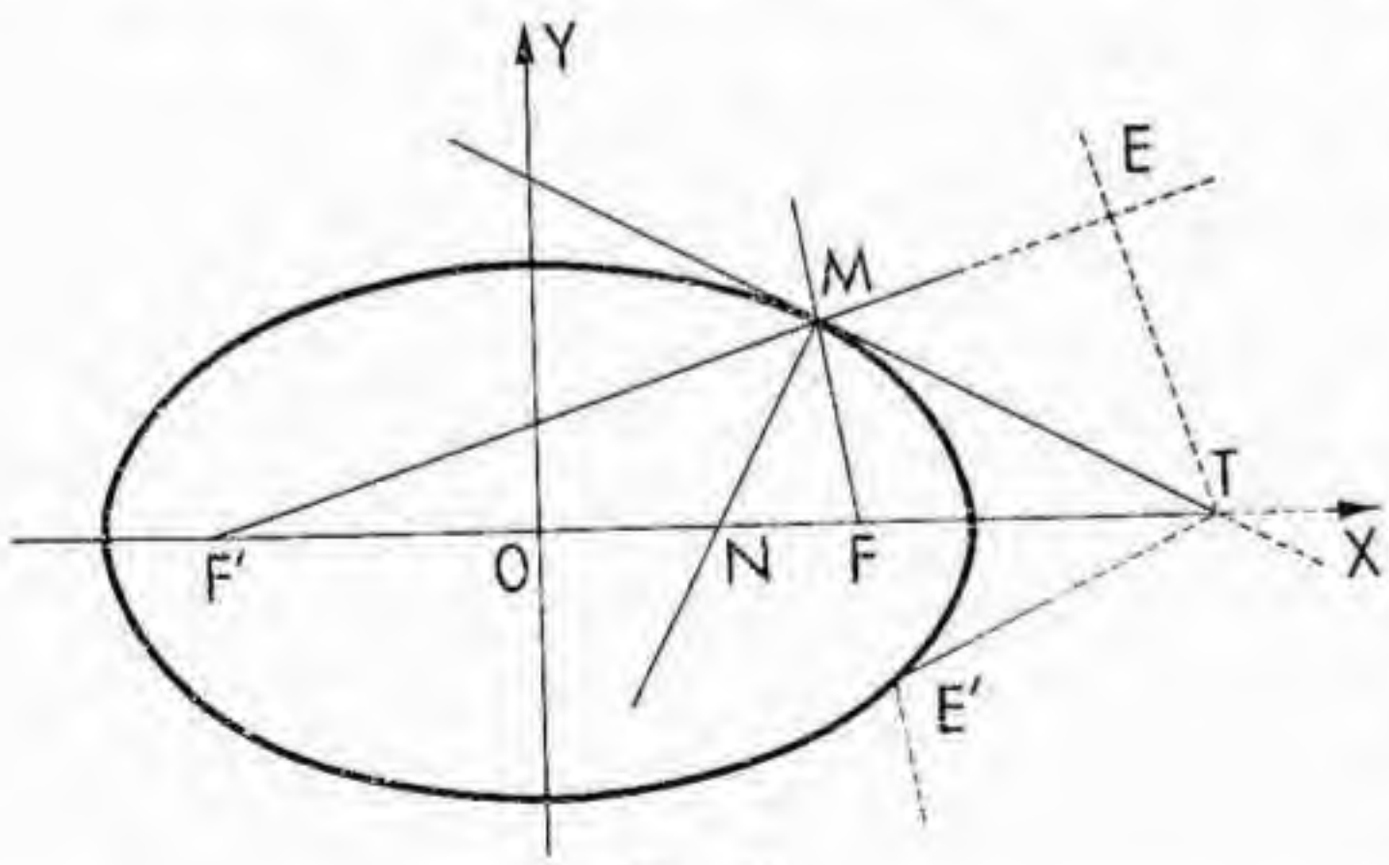

Fig. 58.

[1] En efecto, si MT es la bisectriz exterior, trazando por F una paralela a ella hasta cortar a MF' en un punto M', por ser esta recta normal a la bisectriz interior, es MM' = MF, y por segmentos comprendidos entre paralelas se tiene TF/TF' = MM'/MF', que equivale a la relación del texto. Recíprocamente, si esta relación se cumple, MT debe ser la bisectriz exterior, puesto que sólo hay un punto fuera del segmento FF' tal que la razón TF/TF' tenga un valor dado.

$$TF \times MF' = TF' \times MF.$$

La abscisa x_1 de T se obtiene haciendo $y = 0$ en la ecuación (§ 15, [9]) de la tangente, es decir es $x_1 = a^2/x_0$.

Las distancias de M a los focos son (§ 17, [2])

$$a - \frac{c}{a} x_0 \quad ; \quad a + \frac{c}{a} x_0$$

y se tiene

$$TF \times MF' = \left(\frac{a^2}{x_0} - c\right)\left(a + \frac{c}{a} x_0\right) = \frac{(a^2 - cx_0)(a^2 + cx_0)}{x_0 a}$$

$$TF' \times MF = \left(\frac{a^2}{x_0} + c\right)\left(a - \frac{c}{a} x_0\right) = \frac{(a^2 + cx_0)(a^2 - cx_0)}{x_0 a}$$

como queríamos demostrar.

Para determinar las normales que son paralelas a una dirección dada buscaremos los piés de dicha normal; sean (x_0, y_0) sus coordenadas; por estar sobre la elipse y ser las normales de coeficiente angular dado, se ha de cumplir

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} = m$$

y resolviendo este sistema en x_0 é y_0, tendremos

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{m^2 b^2 x_0^2}{a^4} - 1 = 0 \quad ; \quad x_0^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m^2 b^2}{a^4}\right) = 1$$

$$x_0 = \frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}} \qquad y_0 = \frac{\pm b^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}$$

y las ecuaciones de las normales serán

$$y - \frac{\pm b^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}} = m\left(x - \frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}\right)$$

o en la forma más usual

[8] $$y = mx \pm \frac{(a^2 - b^2)\, m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}$$

El problema de determinar las normales a la elipse que pasan por un punto del plano $M(x_1, y_1)$, puede resolverse buscando los pies de dichas normales; habrá, entonces, que resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad : \quad b^2 x_0 (y - y_1) = a^2 y_0 (x - x_1)$$

la primera de las cuales expresa que el pie (x_0, y_0) está en la elipse, y la segunda que el punto (x_1, y_1) está en la normal que pasa por (x_0, y_0).

Este sistema no es, en general, de fácil solución, salvo en casos particulares. Así, por ejemplo, si queremos determinar las normales a la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$$

que pasa por el punto (1, 0), se nos plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{x_0^2}{6} + \frac{y_0^2}{3} = 1 \quad ; \quad -3x_0y_0 = 6y_0(1 - x_0)$$

la segunda de las cuales se descompone en dos: la $y_0 = 0$, y la $-x_0 = 2(1 - x_0)$, cuya solución es $x_0 = 2$, reemplazando en la ecuación de la hipérbola obtenemos los cuatro pares de soluciones del sistema:

$$(\sqrt{6}, 0) \quad , \quad (-\sqrt{6}, 0) \quad , \quad (2, 1) \quad , \quad (2, -1).$$

Los dos primeros nos dan como solución el eje OX (resultado evidentemente previsible de antemano) y los otros dos nos dan como normales las rectas de ecuaciones

$$3.\ 2(y - 1) = 6(x - 2) \quad ; \quad 3.\ 2(y + 1) = -6(x - 2),$$

es decir que las tres normales que pasan por el punto son las de ecuaciones

$$y = 0 \quad ; \quad y = x - 1 \quad ; \quad y = -x + 1$$

la primera siendo normal en dos puntos a la elipse, puede considerarse como doble.

El problema puede resolverse también, buscando los coeficientes angulares de las normales que pasen por el punto dado; en virtud de [8] ello nos conduce a resolver la ecuación en m

$$y_1 = mx_1 \pm (a^2 - b^2) \frac{m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}}$$

que puede ponerse, en la forma

$$[9] \qquad (y_1 - mx_1)^2 (a^2 + b^2 m^2) - (a^2 - b^2)^2 m^2 = 0$$

Esta ecuación, si $x_1 \neq 0$ es una ecuación de cuarto grado, siendo el coeficiente de m^4, $x_1^2 b^2$, luego para valores de m suficientemente grandes el polinomio en m es positivo, para $m = y_1/x_1$ es negativo si es $y_1 \neq 0$, luego siempre admite por lo menos dos raíces si es $y_1 \neq 0$ é $x_1 \neq 0$.

Para $x_1 = 0$ ó $y_1 = 0$ el problema admite siempre la solución doble del eje OY ó del eje OX respectivamente.

En resumen: *por un punto pueden trazarse siempre por lo menos dos normales a una elipse, y a lo más cuatro.*

Si aplicamos este método al ejemplo anterior obtenemos la ecuación

$$m^2(6 + 3m^2) - 9m^2 = 0$$

que admite la solución doble $m = 0$ y las $m = 1$, $m = -1$, que nos dan las normales que habíamos encontrado.

§ 18. Propiedades métricas de la hipérbola y de la parábola

1. **La hipérbola en coordenadas ortogonales.** — Un razonamiento análogo al hecho en el caso de la elipse nos conduciría a que la condición para que dos diámetros conjugados sean perpendiculares es que sus coeficientes angulares sean las raíces de la ecuación

$$a^2 \cos\theta\, m^2 + (a^2 + b^2)\, m + b^2 \cos\theta = 0$$

cuyo discriminante es

$$(a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 \cos^2\theta > (a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 = (a^2 - b^2)^2 \geqslant 0$$

luego la ecuación tiene siempre dos raíces reales y por tanto

Teorema 1. *Siempre existen un par de diámetros conjugados perpendiculares en la hipérbola.*

Puede llegarse a este resultado en forma más directa observando que, cuando se toma como eje de las abscisas la bisectriz del ángulo de las asíntotas, que corta a la hipérbola, las perpendiculares a este eje determinan, en el ángulo de las asíntotas, segmentos cuyos puntos medios están en el eje, y como estos puntos medios son también puntos medios de las cuerdas de la hipérbola (§ 16-4), se deduce que la perpendicular por el centro al eje de las abscisas es el diámetro conjugado de dicho eje.

Toda hipérbola puede, por consiguiente, referirse a un sistema de ejes cartesianos ortogonales de forma que su ecuación sea del tipo

$$[1] \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2. **Focos y vértices.** — Def. 1. Si ponemos $c^2 = a^2 + b^2$, los puntos F y F′ (fig. 59) de coordenadas $(c, 0)$, $(-c, 0)$ se denominan *focos*. Un razonamiento análogo al que hicimos para el caso de la elipse, nos probaría que las distancias de de un punto a los focos son

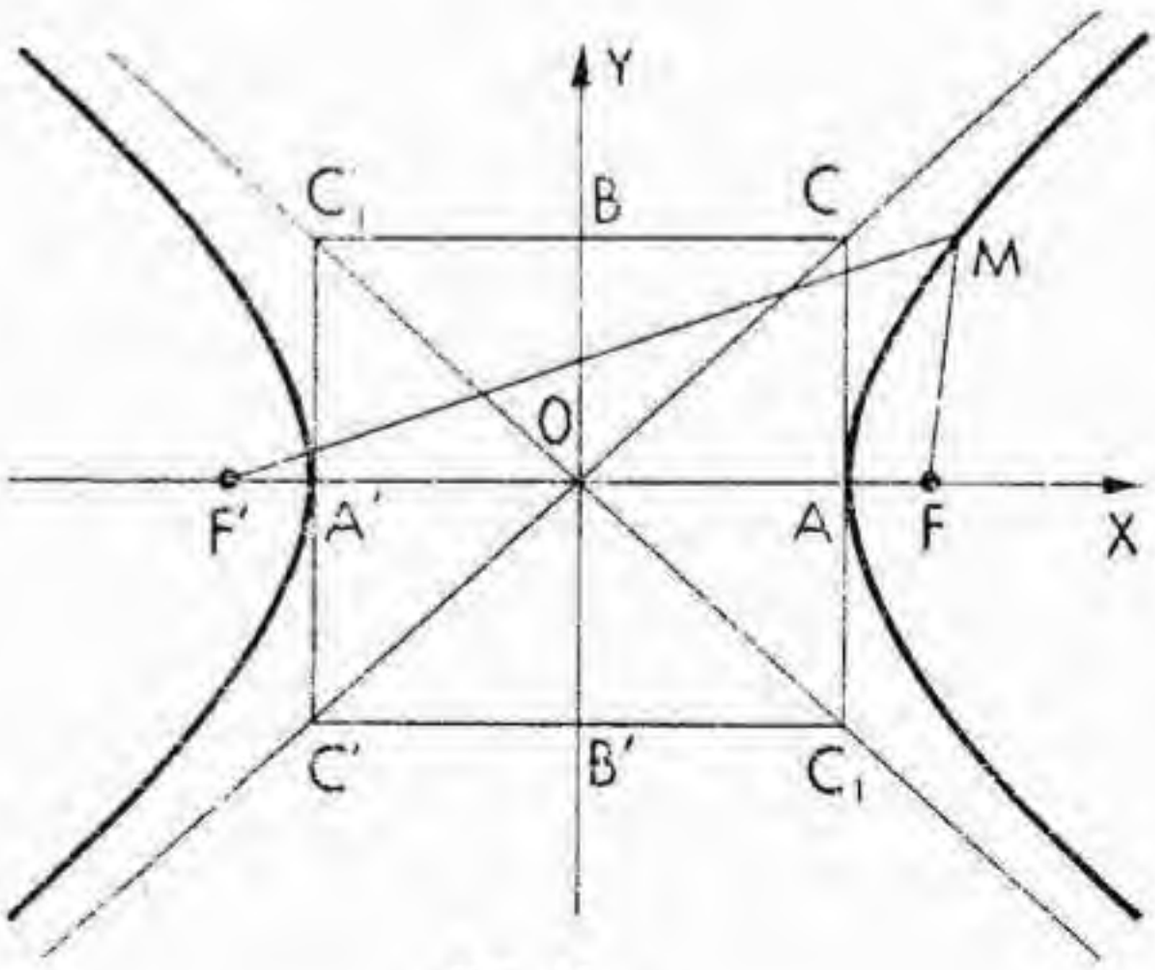

Fig. 59.

$$\frac{c}{a}\,x - a$$

$$\frac{c}{a}\,x + a$$

DEF. 2. Se denomina *excentricidad* de la hipérbola al número $e = c/a$, que es siempre mayor que 1. Con esta notación se tiene; siendo ϱ_1 y ϱ_2 las distancias de un punto $M(x, y)$ a F y F'

$$[2] \qquad \begin{cases} \varrho_1 = ex - a; \ \varrho_2 = ex + a & \text{para } x > 0. \\ \varrho_1 = ex + a; \ \varrho_2 = ex - a & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

En cualquier caso, la diferencia de distancias de un punto de la hipérbola a los focos es igual a $2a$.

Se demuestra la recíproca en forma totalmente análoga a la empleada en el caso de la elipse, y se llega así al resultado siguiente, que constituye una definición geométrica de la hipérbola, independiente de los sistemas de coordenadas:

TEOR. 2. *La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuyas diferencias de distancias a dos puntos fijos es constante.*

Se supone que la constante $2a$ es distinta de cero y de $2c$. En el primer caso el lugar geométrico es el OY, en el segundo está formado por los puntos del eje OX no interiores al segmento FF'.

Como en el caso de la elipse, puede utilizarse esta propiedad para construir la hipérbola por puntos, trazando circunferencias con centros en F y F', cuya diferencia de radios sea $2a$.

Los puntos A y A' de coordenadas $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ en que la hipérbola corta al eje OX se denominan los *vértices* de la hipérbola. Como el eje OY no corta a la hipérbola no existen vértices reales en él; a los puntos B $(0, b)$ y B'$(0, -b)$ extremos del diámetro imaginario se les acostumbra llamar *vértices imaginarios.*

Puesta la ecuación de la hipérbola en la forma

$$b^2(x^2 + y^2) = y^2(a^2 + b^2) + a^2 b^2$$

se ve que el mínimo de la distancia de un punto de la hipérbola al centro se presenta cuando es $y = 0$, es decir que *los vértices de la hipérbola son los puntos de ésta más próximos al origen.*

DEF. 3. Una hipérbola se dice que es *equilátera* cuando sus asíntotas son perpendiculares. Entonces, puesto que los coeficientes angulares de las asíntotas son $m = b/a$, $m' = -b/a$ y la condición de perpendicularidad es $mm' + 1 = 0$, resulta $a^2 = b^2$, es decir que los dos ejes, el real y el imaginario, tienen longitudes iguales y las asíntotas son las bisectrices

del ángulo de los ejes; la ecuación de una hipérbola equilátera es por tanto

[3] $$x^2 - y^2 = a^2$$

3. **Ecuaciones paramétricas de la hipérbola.** — Dada una hipérbola de ecuación [1] está solamente definida para $|x| \geqslant a$, por consiguiente, cualquiera que sea la abscisa x de un punto de la hipérbola, siempre existe un ángulo t tal que $\cos t = a/x$, o lo que es lo mismo $x = a \,.\, \sec t$.

Se tiene, reemplazando en la ecuación de la hipérbola

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = b^2(\sec^2 t - 1) = b^2 \operatorname{tg}^2 t$$

luego las ecuaciones

[4] $$x = a \sec t \qquad y = b \operatorname{tg} t.$$

son las *ecuaciones paramétricas de la hipérbola.*

Como en el caso de la elipse, tomando como nuevo parámetro $u = \operatorname{tg} t/2$ se obtienen las *ecuaciones paramétricas de la hipérbola*

[5] $$x = a\,\frac{1+u^2}{1-u^2}\,; \quad y = b\,\frac{2u}{1-u^2}$$

en funciones racionales de un parámetro u.

Otras ecuaciones paramétricas más útiles e interesantes y que también presentan mucha analogía con las que dimos para el caso de la elipse, se obtienen mediante la utilización de las funciones hiperbólicas [1].

4. **Propiedades métricas de los diámetros y asíntotas.** — Se tienen para la hipérbola los teoremas de Apolonio, que se demuestran de la misma forma que en el caso de la elipse.

TEOR. 3. (*Primer teorema de Apolonio*) : *La diferencia de los cuadrados de las semilongitudes de dos diámetros conjugados es constante.*

(*Segundo teorema de Apolonio*) : *El área del paralelogramo construído sobre dos semidiámetros conjugados es constante.*

El primer teorema de Apolonio, sirve como en el caso de la elipse para determinar los diámetros conjugados de la misma longitud. Siendo $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$, *dos diámetros conjugados de una hipérbola no pueden ser iguales, salvo en el caso en que la hipérbola sea equilátera y entonces son iguales todos.* Una hipérbola equilátera tiene entonces siempre como ecuación respecto de un par de diámetros conjugados

[6] $$x^2 - y^2 = a'^2$$

[1] En efecto, de la relación $\operatorname{ch}^2\varphi - \operatorname{sh}^2\varphi = 1$, se deduce que las ecuaciones paramétricas de la hipérbola son también $x = a \operatorname{ch} \varphi$, $y = b \operatorname{sh} \varphi$.

Consideremos ahora una hipérbola referida a sus asíntotas (fig. 60). Su ecuación es (§ 16, [9]) entonces $xy = k^2$.

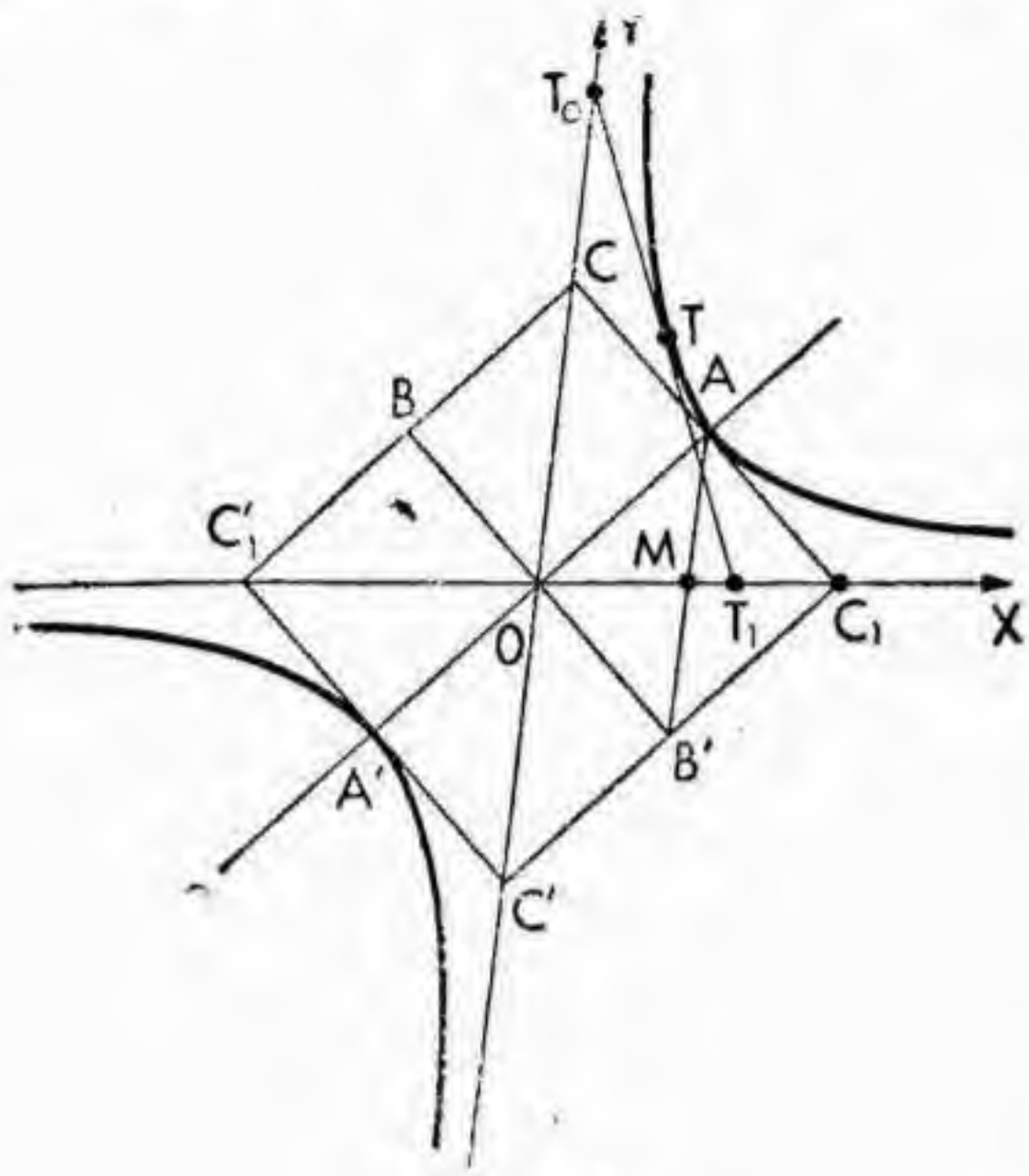

Fig. 60.

Vamos a dar ahora el valor de k en función de las longitudes a y b del eje real y del imaginario.

Sean AA′ y BB′ los ejes, la ecuación de AA′ es $y = x$; la de la hipérbola es $xy = k^2$, luego las coordenadas de A son $x = y = k$; pero $x = \mathrm{OM}$, $y = \mathrm{MA}$, puesto que como dijimos (§ 16-5), el rectángulo $CC'_1C'C_1$ tiene como diagonales las asíntotas. El rectángulo OAC_1B' tiene su diagonal AB′ paralela a OY, luego se tiene

$$k = x = \mathrm{OM} = \frac{\mathrm{OC_1}}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

y obtenemos como ecuación de la hipérbola referida a sus asíntotas la

$$[7] \qquad 4xy = a^2 + b^2$$

Vamos a demostrar ahora la propiedad siguiente:

TEOR. 4. *El triángulo formado por la tangente a la hipérbola en un punto y las asíntotas, tiene área constante.*

Sea en efecto (véase figura 60) T_0OT_1 el triángulo formado por la tangente en T a la hipérbola y las asíntotas. Como (Teor. 1 del § 16-4) T es el punto medio de T_0T_1 si (x, y) son las coordenadas de T, las de T_0 son $(0, 2y)$ y las de T_1 son $(2x, 0)$; el área del triángulo es

$$\mathrm{A} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{OT_0} \times \mathrm{OT_1} \times \operatorname{sen}\alpha = 2x \,.\, y \operatorname{sen}\alpha = 2k^2 \operatorname{sen}\alpha$$

siendo α el ángulo de las asíntotas es, por tanto, constante.

Si tomamos como triángulo COC_1, se ve en seguida que su área es $a \,.\, b$, luego el área de cualquier triángulo formado por una tangente y las asíntotas, tiene por área el producto de las semilongitudes de los ejes.

5. **Normales a la hipérbola.** — El estudio de las normales a la hipérbola se hace en forma completamente análoga al des-

arrollado en el caso de la elipse. Nos limitaremos a dar los resultados e indicar algunas particularidades.

La ecuación de la normal a la hipérbola en un punto dado $M(x_0, y_0)$ de la hipérbola es

$$b^2 x_0 (y - y_0) = - a^2 y_0 (x - x_0) \tag{8}$$

TEOR. 5. *La tangente y la normal a la hipérbola en un punto son bisectrices del ángulo formado por las rectas que unen el punto a los focos* (propiedad que sirve para trazar la tangente a la hipérbola en un punto).

Las ecuaciones de las normales paralelas a una recta dada de coeficiente angular m son:

$$y = mx \pm \frac{m(a^2 + b^2)}{\sqrt{a^2 - b^2 m^2}} \tag{9}$$

luego para que existan normales paralelas a una recta dada debe ser $|m| \leqslant a/b$, lo cual es lógico que suceda ya que sólo existen en la hipérbola tangentes de coeficiente angular m, tal que $|m| \geqslant b/a$.

Las normales que pasan por un punto (x_1, y_1) del plano se obtienen: sea por la determinación de las coordenadas (x_0, y_0) del pié de la normal, que son las soluciones del sistema

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \ , \quad b^2 x_0 (y_1 - y_0) + a^2 y_0 (x_1 - x_0) = 0 \tag{10}$$

sea mediante la determinación de los coeficientes angulares de dichas normales, los cuales deben satisfacer a la ecuación en m

$$(y - mx_1)^2 (a^2 - b^2 m^2) - (a^2 + b^2)^2 m^2 = 0 \tag{11}$$

y se obtiene que, *por un punto pueden trazarse siempre por lo menos dos normales a una elipse y a lo más cuatro.*

6. La parábola en coordenadas ortogonales. — Sea una parábola de ecuación $y^2 = 2px$; la tangente en un punto (x_0, y_0) tiene como coeficiente angular $m = p/y_0$; el ángulo α que forma el eje OX con la tangente viene dado por

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m \operatorname{sen} \theta}{1 + m \cos \theta}$$

siendo θ el ángulo que forman los ejes coordenados. Luego, para que la tangente sea perpendicular al eje OX, debe ser

$$0 = 1 + m \cos \theta = 1 + \frac{p}{y_0} \cos \theta \quad ; \quad y_0 = - p \cos \theta$$

por consiguiente, si referimos la parábola al diámetro y a la tangente que pasan por el punto de ordenada $-p \cos \theta$, tendremos *la parábola referida a un sistema cartesiano ortogonal, de forma que su ecuación sea del tipo*

$$y^2 = 2px \tag{12}$$

DEF. 4. El punto de coordenadas $(p/2, 0)$ se denomina el *foco* de la parábola y la recta de ecuación $x = -p/2$ la *directriz*.

DEF. 5. La parábola tiene el eje OX como eje de simetría ortogonal. El origen O se denomina el *vértice* de la parábola.

Si ϱ es la distancia de un punto $M(x_0, y_0)$ de la parábola, a un foco se tiene

$$\varrho^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

es decir $\varrho = x + p/2$, que es la distancia de M a la directriz.

Por consiguiente: los puntos de la parábola equidistan del foco y de la directriz.

Recíprocamente: si un punto $M(x, y)$ equidista del foco y de la directriz, se tiene:

$$x + \frac{p}{2}\Big)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \quad \text{ó} \quad px = -px + y^2; \quad y^2 = 2px$$

luego, M pertenece a la parábola. Podemos por consiguiente enunciar:

TEOR. 6. *La parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta llamada directriz y de un punto denominado foco.*

7. **Propiedades métricas en la parábola.** — Consideremos un punto $M(x_0, y_0)$ (fig. 61) de la parábola de ecuación $y^2 = 2px$. La tangente que pasa por M tiene como ecuación (§ 16, [10]), $yy_0 = px + y_0^2/2$.

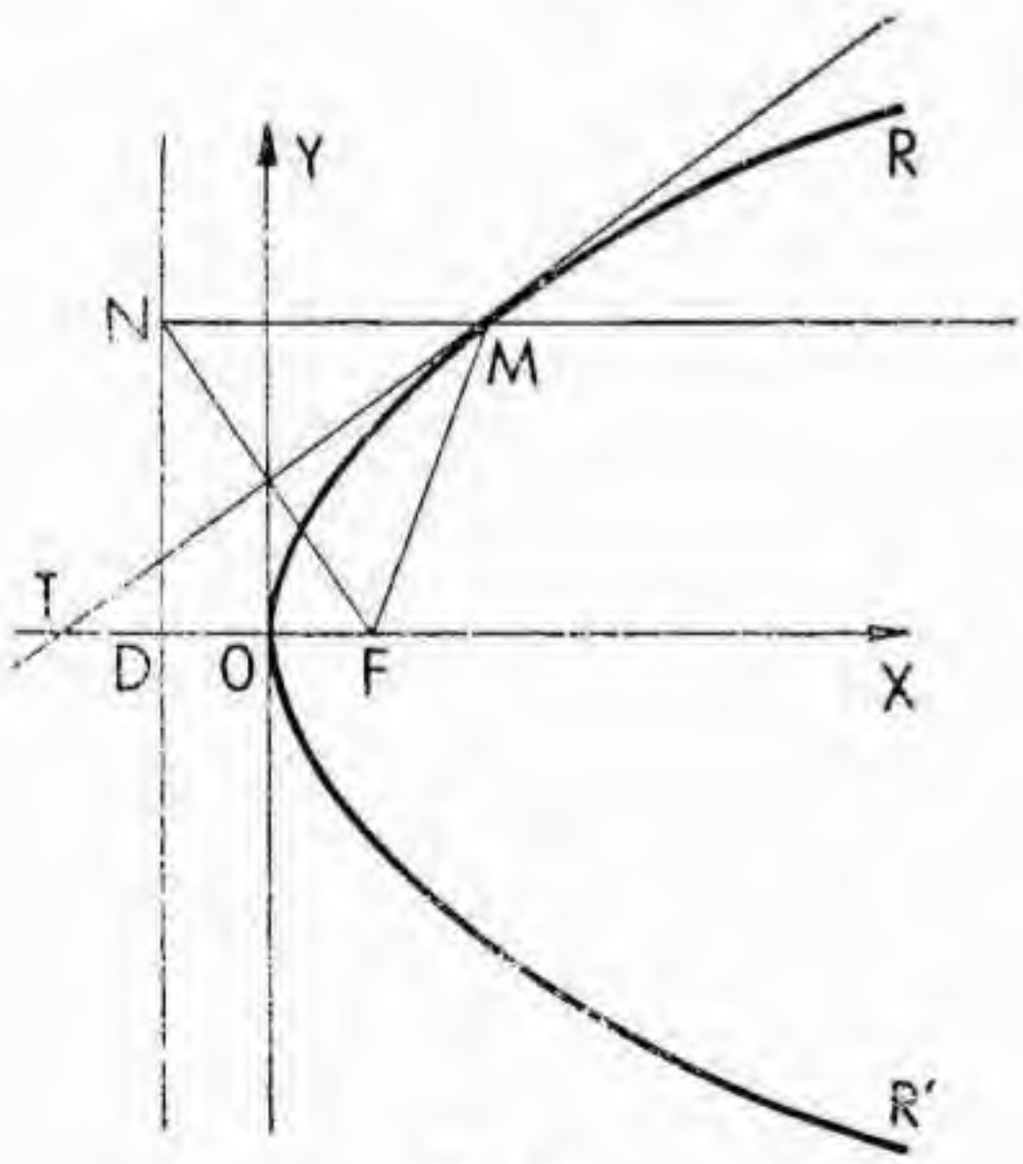

Fig. 61.

Hagamos $y = 0$. Se tiene:

$$0 = px + \frac{y_0^2}{2} = px + px_0$$

luego $x = -x_0$.

Las coordenadas del punto T de intersección de la tangente con OX son $(-x_0, 0)$. El segmento FT tiene como longitud $x_0 + p/2$ que es igual a la longitud de FM. Siendo isósceles el triángulo MFT, son iguales los ángulos que

forma la tangente con el radio vector y con el eje de la curva. Luego tenemos:

TEOR. 7. *La tangente en un punto a una parábola es la bisectriz del ángulo que forma el radio vector con la paralela al eje.*

Resulta de esta propiedad que un rayo interior paralelo al eje, incidente en M, debe reflejarse según el radio vector MF, pues uno y otro forman ángulos iguales con la tangente, y también son iguales, por tanto, los ángulos que forman con la normal. En esta propiedad física se funda el nombre de foco, dado al punto F, donde convergen los rayos reflejados, y por ella se adopta para los reflectores un perfil parabólico.

Vimos en (§ 16-[14]) que la ecuación que nos da los coeficientes angulares de las tangentes que pasan por un punto $M(x_1, y_1)$ era

$$2x_1 m^2 - 2y_1 m + p = 0$$

para que las dos tangentes sean perpendiculares, es necesario y suficiente que su producto sea —1, es decir, que

$$\frac{p}{2x_1} = -1 \quad ; \quad x_1 = -\frac{p}{2}$$

luego:

TEOR. 8. *El lugar de los puntos desde los que se puede trazar dos tangentes a la parábola, perpendiculares entre sí, es la directriz.*

El diámetro que pasa por M corta (véase figura 61) a la directriz en un punto N y se tiene $MN = x + p/2 = MF$, luego el triángulo MFN es isósceles, la tangente MT, que acabamos de ver es la bisectriz del ángulo en M, es por consiguiente también altura y mediana, luego los puntos F y N son simétricos respecto de la tangente. Se tiene así la propiedad: *El lugar geométrico de los puntos simétricos del foco respecto de las tangentes a la parábola es la directriz.*

8. *Normales a la parábola.* — Dada una parábola de ecuación $y^2 = 2px$ la normal en un punto $M(x_0, y_0)$ de la parábola tendrá como ecuación, deducida de la ecuación de la tangente en M,

$$[13] \qquad y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0) \qquad \text{ó} \qquad y - y_0 + \frac{y_0}{p}\left(x - \frac{y^2}{2p}\right) = 0$$

Para determinar las normales paralelas a una recta dada, observemos primero que la recta no puede ser paralela a OY, ya que no hay tangentes paralelas a OX; sea ahora m el coeficiente angular de la recta dada; vamos a determinar las coordenadas (x_0, y_0) del pié de la normal, las cuales deben satisfacer al sistema

$$y_0^2 = 2p\,x_0 \quad ; \quad m = -\frac{y_0}{p}$$

en el que la primera ecuación expresa que (x_0, y_0) está en la parábola.

la segunda que la normal en él tiene como coeficiente angular m. Resolviendo el sistema se tiene:

$$x_0 = \frac{2}{d_{\varepsilon}u_{\iota}}$$

y la ecuación de la *única* normal paralela a la dirección dada es

[14] $$y + mp = m\left(x - \frac{m^2 p}{2}\right) \quad \text{ó} \quad y = mx - pm\left(1 + \frac{m^2}{2}\right).$$

Vamos ahora a resolver el problema de determinar las normales a la parábola que pasan por un punto (x_1, y_1) del plano. Sean (x_0, y_0) las coordenadas de los piés de una de las normales que pasan por el punto. Expresemos que la normal en (x_0, y_0) pasa por (x_1, y_1)

[15]
$$y_1 - y_0 + \frac{y_0}{p}\left(x_1 - \frac{y_0^2}{2p}\right) = 0 \quad \text{ó} \quad y_0^3 + 2p(p - x_1)\, y_0 - 2p^2 y_1 = 0$$

y las raíces de esta ecuación de tercer grado en y_0 nos dan las ordenadas de los pies de las normales que pasan por $(x_1 y_1)$.

Puede también resolverse este problema buscando los coeficientes angulares de las normales que pasan por el punto. Para que una normal de coeficiente angular m pase por (x_1, y_1) se ha de cumplir

[16] $$y_1 = mx_1 - pm\left(1 + \frac{m^2}{2}\right) \quad \text{ó} \quad pm^3 + 2(p - x_1)\, m + 2y_1 = 0$$

y las raíces de esta ecuación de tercer grado en m nos dan los coeficientes angulares de las normales que pasan por el punto (x_1, y_1).

Observemos que se pasa de la ecuación [15] a la ecuación [16] por el cambio de variable $y_0 = -pm$.

Se puede dar una solución geométrica a este problema determinando las intersecciones de la parábola con una circunferencia.

Consideremos la circunferencia de centro $\frac{x_1 + p}{2}, \frac{y_1}{4}$ que pasa por el origen; su ecuación es

$$x^2 + y^2 - (x_1 + p)\, x - \frac{y_1}{2}\, y = 0.$$

Las ordenadas de los puntos de intersección de esta circunferencia con la parábola son las raíces de la ecuación

$$\frac{y^4}{4p^2} + y^2 - (x_1 + p)\, \frac{y^2}{2p} - \frac{y_1}{2}\, y = 0.$$

Suprimiendo la raíz $y = 0$ y simplificando, la ecuación toma la forma

$$y^3 + 2p\,(p - x_1)\, y - 2p^2 y_1 = 0$$

que no es otra que la ecuación [15] luego, los puntos de intersección de la circunferencia con la parábola son los pies de las normales que buscábamos.

De aquí se deduce también la propiedad siguiente:

Teorema 9: *La circunferencia que pasa por los pies de las normales, trazada desde un punto a la parábola pasa también por el vértice de la parábola.*

9. **Forma trinomia común a las ecuaciones de las tres cónicas.** — Vamos a ver que mediante una traslación del origen a un vértice de la cónica, las tres curvas tienen una ecuacion de la forma

[17] $$y^2 = 2px + qx^2$$

siendo siempre p mayor que cero y q, mayor, igual o menor que cero, según que la curva sea hipérbola, parábola o elipse.

El caso de la parábola es la forma que acabamos de estudiar.

Dada una elipse por su ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

si llevamos el origen al vértice $(-a, 0)$, su ecuación toma la forma

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x - \frac{b^2}{a^2} x^2$$

Análogamente si llevamos el origen al vértice $(a, 0)$ de la hipérbola de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

obtenemos la ecuación,

$$y^2 = \frac{2b^2}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2$$

Recíprocamente dada una ecuación de la forma [17], si llevamos el origen al punto $(p/q, 0)$, obtenemos la ecuación de una elipse de semiejes $a = -p/q$; $b = p/\sqrt{-q}$, si es $q < 0$, y si $q > 0$, obtenemos la ecuación de una hipérbola de semiejes $a = p/q$; $p = p/\sqrt{q}$.

Consideremos las cónicas de ecuación $y^2 = 2px + qx^2$; supongamos q variable, pero siempre $q \neq 0$; la ecuación representa entonces una hipérbola o una elipse en las que permanecen fijos el eje y un vértice; si hacemos tender q hacia cero el segundo vértice cuya abscisa es $-2p/q$, se deja indefinidamente sobre el eje OX y la ecuación tiene como límite la de una parábola; puede pues considerarse la parábola como la curva límite de una elipse o de una hipérbola variables en las que un eje y un vértice permanecen constantes, mientras el otro vértice se aleja indefinidamente. Si consideramos p y q variables, existen infinitas maneras de hacer tender una elipse o una hipérbola variables hacia una parábola determinada, basta considerar p y q como funciones de un cierto parámetro, tales que se tenga para un mismo valor de el parámetro $lim\ p = p_0$, (siendo p_0 el coeficiente de la ecuación de la parábola dada) y $lim\ q = 0$. Hay, pues, infinitas posibilidades de hacer tender la hipérbola o la elipse hacia la parábola y se puede imponer alguna condición suplementaria como la de pasar por un punto, etc.

§ 19. Focos y directrices de las cónicas

1. **Definición común a las tres cónicas.** — Las definiciones que hemos dado de las cónicas, sea mediante sus ecuaciones, sea como lugares geométricos, no presentan gran analogía, por lo menos a primera vista. Vamos a ver que puede darse una definición geométrica común a las tres cónicas y para ello vamos a demostrar previamente el siguiente teorema:

Teorema 1. *El lugar geométrico de los puntos tales que la razón de distancias a un punto fijo y a una recta fija es constante, es una elipse, una hipérbola o una parábola, según que la razón sea menor, igual o mayor que la unidad.*

Def. 1. Al valor constante de dicha razón de distancias se denomina la *excentricidad* de la cónica. El punto fijo se denomina *foco* de la cónica y la recta fija *directriz* de la cónica (más adelante veremos que estas definiciones coinciden con las dadas anteriormente).

Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales tal que el eje OX sea la perpendicular trazada por el foco a la directriz y el origen sea el punto O de OX, situado entre el foco y el punto de intersección de OX con la directriz y tal que la razón de distancias de O al foco y a la directriz sea igual a la excentricidad. Sabemos (§§ 17-2; 18-2) que dicho punto existe siempre. Tomemos como semieje positivo de abscisas, el que contiene al foco. Bajo estas hipótesis las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz son

$$\left(\frac{ke}{1+e}, 0\right); \qquad x = -\frac{k}{1+e}$$

(en donde k es la distancia del foco a la directriz).

La ecuación del lugar geométrico se obtendrá expresando que la razón de distancias de un punto $M(x, y)$ del lugar al foco y a la directriz es igual a la excentricidad, o lo que es lo mismo, como todos los elementos son positivos, tomando los cuadrados

$$\left(x - \frac{ke}{1+e}\right)^2 + y^2 = e^2\left(x + \frac{k}{1+e}\right)^2$$

Desarrollando y simplificando esta ecuación se obtiene:

$$y^2 = 2kex + (e^2 - 1)x^2 \tag{1}$$

que es (§ 18-9) la ecuación trinomia de una cónica; elipse si es $e < 1$; parábola si es $e = 1$; hipérbola si es $e > 1$. Queda, pues probado el teorema.

Si el foco está situado en la directriz, se tiene $k = 0$, la ecuación anterior toma la forma $y^2 = (e^2 - 1)\, x^2$ que representa, si $e = 1$, el eje OX como recta doble; si $e > 1$ las dos rectas $y - bx = 0$; $y + bx = 0$, siendo $b^2 = e^2 - 1$; finalmente, si $e < 1$ no existe ningún punto real que satisfaga a la ecuación.

Cuando es $e < 1$, la ecuación [1] representa una elipse cuyos semiejes vienen dados por las relaciones (comparando con § 18-9)

$$a^2 = \frac{p^2}{(e^2 - 1)^2} \quad , \quad b^2 = \frac{p^2}{1 - e^2}$$

y se tiene como $e < 1$

$$\frac{c}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = e^2.$$

Es decir que la definición de excentricidad que dimos (§ 17, Def. 2) para la elipse coincide con la nueva que acabamos de dar. De la misma forma se prueba para el caso de la hipérbola.

Consideremos ahora una elipse de ecuación [1]; un foco de coordenadas $(c, 0)$ y la recta de ecuación $x = a/e$. Teniendo en cuenta la razón de distancias de un punto $M(x, y)$ de la elipse al punto y a la recta es

$$\frac{a - ex}{a/e - x} = e$$

luego el punto y dicha recta son foco y directriz de la elipse. Análogamente se probaría para el punto $(-c, 0)$ y para la recta de ecuación $x = -a/e$.

El mismo razonamiento aplicado a la hipérbola nos probaría que el punto $(c, 0)$ y la recta de ecuación $x = a/e$ son foco y directriz de la parábola, y lo mismo el punto $(-c, 0)$ y la recta de ecuación $x = -a/e$.

DEF. 2. Podemos, por consiguiente, enunciar ahora la definición común a las tres cónicas: *Cónica es una curva lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a un punto y a una recta es contante.*

El razonamiento anterior no es aplicable al caso de la circunferencia, en que la excentricidad es cero. Enseguida vamos a probar que los únicos focos y directrices de la hipérbola y la elipse son los que hemos encontrado, así como que la parábola sólo tiene un foco y una directriz; y veremos igualmente que la circunferencia carece de focos y directrices, es decir, que: *la definición de cónica que acabamos de dar no es aplicable a la circunferencia.*

2. **Ecuación focal de las cónicas.** — Consideremos un sistema cartesiano rectangular, un punto F de coordenadas α y β y una recta d de ecuación $\lambda x + \mu y + \nu = 0$. Una cónica que tenga a F como foco y a d como bisectriz, tendrá como ecuación, si su excentricidad es e,

$$[2] \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = (lx + my + n)^2$$

en donde

$$l = \frac{e\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \qquad m = \frac{e\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} \qquad n = \frac{e\nu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}$$

y que se obtiene expresando que la razón de distancias de un punto cualquiera de la cónica a F y d es e.

DEF. 3. La ecuación [2] se denomina *ecuación focal de la cónica* y toda ecuación de esa forma representa una cónica. En efecto: supongamos una ecuación del tipo [2] siendo α, β, l, m y n números arbitrarios. Si es $l = m = 0$, se obtiene la ecuación de una circunferencia; en caso contrario sea F el punto (α, β) y d la recta de ecuación $lx + my + n = 0$.

Si $M(x, y)$ es un punto cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación, tendremos que los cuadrados de las distancias de M a F y a d son, respectivamente,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \quad \text{y} \quad \frac{(lx + my + n)^2}{l^2 + m^2}$$

y el cuadrado de la razón de distancias es

$$\frac{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}{(lx + my + n)^2} (l^2 + m^2)$$

pero como x e y satisfacen a la ecuación [2], el primer factor es igual a la unidad, luego la razón de distancias es $\sqrt{l^2 + m^2}$, que es constante cualquiera que sea M, luego la curva de ecuación [2] es una cónica de foco $F(\alpha, \beta)$, cuya directriz es la recta $lx + my + n = 0$ y cuya excentricidad es $\sqrt{l^2 + m^2}$.

Puede darse otra forma a la ecuación focal de las cónicas utilizando la ecuación normal de la directriz

$$x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi - d = 0$$

en este caso los coeficientes l, m y n valen

$$l = e \cos \varphi \qquad m = e \operatorname{sen} \varphi \qquad n = -ed$$

y la ecuación toma la forma

$$[3] \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - e^2 (x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi - d)^2 = 0$$

que tiene la ventaja de poner de manifiesto la excentricidad.

3. **Determinacón de los focos y directrices de las cónicas.** — Vamos ahora a determinar los focos y directrices de la elipse, hipérbola y parábola, probando que sólo existen los que encontramos anteriormente, es decir dos focos y dos directrices en la hipérbola y elipse y un solo foco y una sola directriz en el caso de la parábola.

Para que un punto $F(\alpha, \beta)$ y una recta de ecuación $lx + my + n = 0$, sean foco y directriz de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

se tiene que poder poner esta ecuación en la forma

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - (lx + my + n)^2 = 0$$

y para ello tienen que ser proporcionales los coeficientes de ambas ecuaciones, es decir se ha de tener

$$[4] \qquad \begin{gathered} 1 - l^2 = \frac{k}{a^2} \quad , \quad 1 - m^2 = \frac{k}{b^2} \quad , \\ lm = 0 \quad , \quad ln + \alpha = 0 \quad , \quad mn + \beta = 0 \quad , \\ \alpha^2 + \beta^2 - n^2 = - k. \end{gathered}$$

El problema de determinar los focos y directrices de la elipse se reduce por tanto a la solución del sistema [4] de seis ecuaciones con seis incógnitas, α, β, l, m, n y el coeficiente k de proporcionalidad.

De la tercera ecuación se deduce que ó $l = 0$, ó $m = 0$. Tomemos la segunda solución, $m = 0$; reemplazándola en la segunda y quinta se obtiene: $k = b^2$; $\beta = 0$; reemplazando en la primera, tenemos

$$l^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}; \quad l = \pm \frac{c}{a}$$

y reemplazando ahora en cuarta y sexta,

$$\pm \frac{c}{a} n + \alpha = 0 \quad ; \quad \alpha^2 = \frac{c^2}{a^2} n^2 \quad ; \quad \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right) n^2 = - b^2 \quad ;$$

$$- \frac{b^2}{a^2} n^2 = - b^2 \quad ; \quad n^2 = a^2 \quad ; \quad n = \pm a \quad ;$$

como la ecuación de la directriz se puede multiplicar por una constante, en particular por —1, podemos tomar $n = a$, y entonces se tiene:

$$\alpha = \mp \frac{c}{a} a = \mp c.$$

En resumen la solución del sistema, cuando se parte de $m = 0$, es

$$\alpha = \mp c \quad ; \quad \beta = 0 \quad ; \quad l = \pm \frac{c}{a} \quad ; \quad m = 0 \quad : \quad n = a .$$

Consideremos ahora la solución $l = 0$; reemplazando en la primera y cuarta se obtiene $\alpha = 0$, $k = a^2$, y reemplazando en la segunda se obtiene

$$m^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2}$$

y como $a > b$, no existe solución real del sistema. Por consiguiente

TEOR. 2. a) *Los únicos focos reales de la elipse son los ya conocidos* $F(c, 0)$ *y* $F'(-c, 0)$ *que tienen como directrices correspondientes las rectas de ecuaciones* $x = a^2/c$ *y* $x = -a^2/c$.

En el desarrollo anterior hemos supuesto siempre $a \neq b$. Si es $a = b$, es decir $c = 0$, el sistema [4] de ecuaciones admite como único sistema de soluciones

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = 0 \quad , \quad l = 0 \quad , \quad m = 0 \quad , \quad n = \sqrt{k}$$

y como los valores de l, m y n no definen una recta propia del plano, obtenemos el resultado que enunciamos anteriormente:

La circunferencia no está comprendida dentro de la definición de las cónicas como lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a un punto y una recta, ambos fijos, es constante.

Si se consideran elementos imaginarios, el sistema [4] admite como soluciones, además de las dadas, las siguientes (que corresponden al caso $l = 0$):

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = \pm ic \quad , \quad m = \mp i \frac{c}{b} \quad , \quad n = b \quad , \quad l = 0$$

es decir: que además de los dos focos reales, la elipse admite otros dos imaginarios situados sobre el eje OY de coordenadas $(0, ic)$, $(0, -ic)$ y dos directrices imaginarias de ecuaciones $y = -ib^2/c$, $y = ib^2/c$.

Un razonamiento y un cálculo completamente análogos a los que acabamos de desarrollar (se reduce la diferencia a cambiar b^2 en $-b^2$) nos probaría que:

b) *los únicos focos reales de la hipérbola son los* $F(c, 0)$ *y* $F'(-c, 0)$, *y las únicas directrices son las de ecuaciones* $x = a^2/c$, $x = -a^2/c$.

También como en el caso de la elipse, la hipérbola tiene dos focos imaginarios de coordenadas $(0, ic)$ y $(0, -ic)$ y dos directrices imaginarias de ecuaciones $y = -ib^2/c$; $y = ib^2/c$.

Dada ahora una parábola de ecuación $y^2 = 2px$, el mismo

razonamiento empleado para la elipse nos llevaría a la conclusión de que para que un punto (α, β) y una recta de ecuación $lx + my + n = 0$ sean foco y directriz de una parábola se han de cumplir las siguientes condiciones:

$$[5] \quad \begin{cases} 1 - l^2 = 0 \quad ; \quad 1 - m^2 = k \quad ; \quad lm = 0 \\ ln + \alpha = kp \quad ; \quad mn + \beta = 0 \quad ; \quad \alpha^2 + \beta^2 - n^2 = 0. \end{cases}$$

Vamos a resolver este sistema que reemplaza al [4], en el caso de la elipse. La primera ecuación nos da $l = \pm 1$, tomemos $l = +1$, ya que se puede multiplicar por la constante -1 la ecuación de la directriz; la tercera ecuación nos da $m = 0$, la segunda $k = 1$ y la quinta $\beta = 0$. Reemplazando en la cuarta y la sexta se tiene

$$p = n + \alpha \quad ; \quad \alpha^2 - n^2 = 0 \quad ; \quad \alpha = \pm n \quad ;$$

como $\quad p \neq 0 \quad ; \quad \alpha = n = p/2.$

Las únicas soluciones del sistema [5] son, pues,

$$\alpha = \frac{p}{2} \quad , \quad \beta = 0 \quad , \quad l = 1 \quad , \quad m = 0 \quad , \quad n = \frac{d}{2} \quad .$$

se tiene:

c) *La parábola tiene un solo foco* $(p/2, 0)$ *y una sola directriz de ecuación* $x = -p/2$.

4. **Ecuaciones de las cónicas en coordenadas polares.** — Supongamos un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares y una cónica que tenga un foco en el origen y la directriz paralela al eje OY. La ecuación [3] de la cónica toma entonces la forma $x^2 + y^2 - e^2(x - d)^2 = 0$.

Si consideramos ahora un sistema de coordenadas polares con el origen en el foco y con el eje OX como eje polar, la ecuación anterior toma la forma $\varrho^2 - e^2(\varrho \cos \omega - d)^2 = 0$ que se descompone en las dos ecuaciones

$$\varrho = \frac{-ed}{1 - e \cos \omega} \quad ; \quad \varrho = \frac{ed}{1 + e \cos \omega}$$

pero como se pasa de una ecuación a otra por la transformación de ϱ en $-\varrho$ y de ω en $\omega + \pi$, ambas ecuaciones representan la misma curva. Si ponemos $p = -ed$, la ecuación toma la forma

$$[6] \qquad \varrho = \frac{p}{1 - e \cos \omega} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{p} - \frac{e}{p} \cos \omega$$

que es *la ecuación general de las cónicas que tienen un foco en el polo y el eje focal como eje polar.*

Como la directriz tenía en el sistema cartesiano como ecua-

ción la $x = d$, su ecuación en polares es $\varrho \cos \omega = -p/e$ ó

$$[7] \qquad \frac{1}{\varrho} = -\frac{e}{p} \cos \omega .$$

Si ahora tomamos un sistema de coordenadas polares con el mismo polo pero con distinto eje polar, la ecuación [6] toma la forma

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{p} - \frac{e}{p} \cos(\omega - \alpha) .$$

Poniendo

$$[8] \qquad a = -\frac{e}{p} \cos \alpha \quad ; \quad o = -\frac{e}{p} \operatorname{sen} \alpha \quad ; \quad c = \frac{1}{p}$$

la ecuación toma la forma

$$[9] \qquad \frac{1}{\varrho} = a \cos \omega + b \operatorname{sen} \omega + c$$

que es *la ecuación general de las cónicas que tienen un foco en el polo,* que depende de tres parámetros. Recíprocamente toda ecuación de este tipo representa en coordenadas polares una cónica, pues de las fórmulas [8] se pueden deducir los valores de α, p y e en función de a, b y c mediante las fórmulas

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \quad ; \quad p = \frac{1}{c} \quad ; \quad e = \left| \frac{1}{c} \sqrt{a^2 + b^2} \right|$$

y los valores de α, p, e determinan la cónica (α determina el eje focal, p la directriz y e es la excentricidad).

La ecuación de la directriz de una cónica definida por la ecuación [9] se deduce de [7] y es

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{e}{p} \cos(\omega - \alpha) \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\varrho} = a \cos \omega + b \operatorname{sen} \omega$$

es decir, que *la ecuación de la directriz se obtiene suprimiendo en la ecuación de la cónica el término constante.*

5. **Cónicas homofocales con centro.** — DEF. 4. Se llaman *cónicas homofocales con centro* a las elipses o hipérbolas que tienen los mismos focos.

Consideremos un sistema cartesiano ortogonal y dos puntos de coordenadas $(c, 0)$ y $(-c, 0)$. Una elipse o una hipérbola que tengan estos focos tienen respectivamente como ecuaciones

$$\frac{x^2}{c^2 + b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad \frac{x^2}{c^2 - b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que pueden ponerse en la forma general

$$[10] \qquad \frac{x^2}{\lambda + c^2} + \frac{y^2}{\lambda} = 1$$

en donde λ toma los valores siguientes:

a) $\lambda > 0$ y la ecuación representa una elipse.

b) $-c^2 < \lambda < 0$ y la ecuación representa una hipérbola.

La ecuación [10] es la *ecuación de la serie de cónicas homofocales.*

Sea $M(x_0, y_0)$ un punto del plano; la condición necesaria y suficiente para que una cónica de la serie pase por él es

$$\frac{x_0^2}{\lambda + c^2} + \frac{y_0^2}{\lambda} = 1$$

o bien

$$[11] \qquad \lambda^2 + (c^2 - x_0^2 - y_0^2)\lambda - y_0^2 c^2 = 0.$$

Si $y_0 \neq 0$, para $\lambda = 0$ el trinomio es negativo, luego la ecuación tiene dos raíces reales, λ_1 y λ_2 de signos opuestos por ser $\lambda_1 \lambda_2 = -y_0^2 c^2$.

Para $\lambda = -c^2$ el trinomio vale $x_0^2 c^2$, luego si $x_0 \neq 0$ es positivo y la raíz negativa es mayor que $-c^2$.

Por consiguiente: si $M(x_0, y_0)$ no está en los ejes, por él pasan una elipse y una hipérbola de la serie de cónicas homofocales (fig. 62).

Si $y_0 = 0$ la condición para que por ese punto pase una cónica de la serie es

$$\frac{x_0^2}{\lambda + c^2} = 1$$

es decir $\lambda = x_0^2 - c^2$, luego sólo hay una solucion en λ. Analicemos los valores de esta solución.

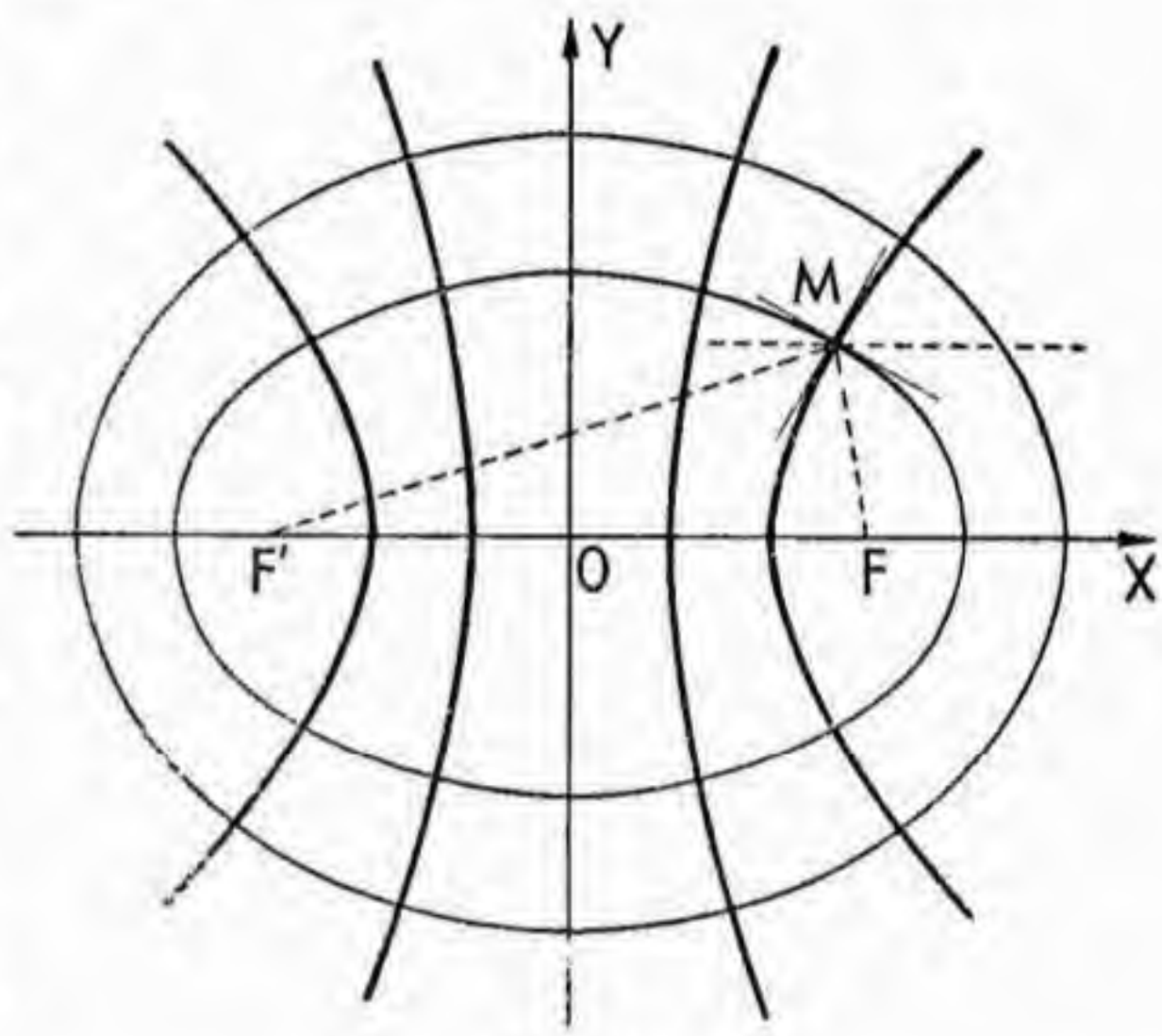

Fig. 62.

Si $x_0 = \pm c$ es $\lambda = 0$, que no corresponde a ninguna cónica de la serie.

Si $x_0 = 0$ es $\lambda = -c^2$ que tampoco corresponde a ninguna cónica de la serie.

Si $|x_0| > c$ es $\lambda > 0$ y si $0 < |x_0| < c$ es $-c < \lambda < 0$.

Pasemos ahora al caso en que sea $x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$; la condición para que por el punto pase una cónica de la serie es $y_0^2 = \lambda$ que nos da una solución única y positiva.

Todos estos resultados se resumen en el teorema siguiente:

TEOREMA 3. *Por todo punto del plano no situado en los ejes, pasan una elipse y una hipérbola de la serie. Por los puntos del eje* OY *distintos del centro pasa una elipse. Por los puntos del eje* OX *interiores al segmento focal y distintos del origen, pasa una hipérbola y por los exteriores una elipse. Por el centro y los focos no pasa ninguna cónica.*

Sea $M(x_0, y_0)$ el punto de intersección de dos cónicas homofocales; dichas cónicas tienen como ecuaciones:

$$\frac{x^2}{\lambda_1 + c^2} + \frac{y^2}{\lambda_1} = 1 \ , \quad \frac{x^2}{\lambda_2 + c^2} + \frac{y^2}{\lambda_2} = 1$$

en donde λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación [11]. Las tangentes en M a las dos cónicas tienen como coeficientes angulares

$$m_1 = -\frac{\lambda_1 x_0}{(\lambda_1 + c^2)\, y_0} \qquad m_2 = \frac{-\lambda_2 x_0}{(\lambda_2 + c^2)\, y_0}$$

y se tiene

$$m_1\, m_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 x_0^2}{y_0^2\, (c^4 + (\lambda_1 + \lambda_2)\, c^2 + \lambda_1 \lambda_2)}$$

Reemplazando ahora $\lambda_1 \lambda_2$ y $\lambda_1 + \lambda_2$ por sus valores dados por la ecuación [11], se tiene:

$$m_1\, m_2 = \frac{-x_0^2\, y_0^2\, c^2}{y_0^2\, (c^4 - c^4 + c^2 x_0^2 + c^2 y_0^2 - c^2 y_0^2)} = -1$$

de donde se deduce la propiedad siguiente:

TEOREMA 4. *Dos cónicas homofocales se cortan ortogonalmente.*

Tomemos ahora una recta del plano definida por su coeficiente angular m_0 y un punto (x_0, y_0), es decir, la recta de ecuación

[12] $$y = y_0 + m_0 x - m_0 x_0.$$

La tangente o asíntota a una cónica del sistema homofocal paralela a esta recta tiene como ecuación [§ 15 nº 4] y [§ 16 nº 3]

$$y = m_0 x \pm \sqrt{(c^2 + \lambda)\, m_0^2 + \lambda}$$

y para que esta recta pase por el punto (x_0, y_0) se ha de cumplir la condición

$$(y_0 - m_0 x_0)^2 = (c^2 + \lambda)\, m_0^2 + \lambda$$

luego se tiene

$$\lambda = \frac{(y_0 - m_0 x_0)^2 - m_0^2 c^2}{1 + m_0^2}$$

y este valor λ cumple la condición

$$\lambda + c^2 = \frac{(y_0 - m_0 x_0)^2 + c^2}{1 + m_0^2} > 0 \quad ; \quad \lambda > -c^2.$$

Luego, con excepción del caso en que se obtenga $\lambda = 0$, siempre hay una cónica de la serie que tiene como tangente o asíntota la recta dada.

El caso de excepción se presenta cuando $\lambda = 0$, es decir, $y_0 - m_0 x_0 \pm m_0 c = 0$ o lo que es lo mismo cuando la recta [12] pasa por el punto $(c, 0)$ o por el $(-c, 0)$.

El punto de intersección de la recta de ecuación [12] con el eje OX tiene como abscisa

$$x = \frac{m_0 x_0 - y_0}{m_0}$$

Las condiciones

$$\left| \frac{m_0 x_0 - y_0}{m_0} \right| < c \quad , \quad (y_0 - m_0 x_0)^2 < c^2 m_0^2.$$

son equivalentes y la última equivale a que el valor de λ sea menor que cero, o lo que es lo mismo, que la cónica sea una hipérbola.

Nos queda ahora el caso de la recta $x = x_0$; como es paralela al eje OY sólo puede ser tangente a una cónica en los puntos de intersección de la recta con el eje OX, luego, salvo en el caso en que la recta pase por los focos o por el origen, es tangente a una cónica de la serie, que será una hipérbola si el punto de intersección es interior al eje focal y una elipse en caso contrario.

Resumiendo todas estas conclusiones se llega al siguiente teorema:

TEOREMA 5. *Toda recta, distinta del eje* OY, *que no pase por los focos, es tangente o asíntota a una y a una sola cónica de la serie. Dicha cónica es una hipérbola si corta al eje* OX *entre los focos y una elipse en caso contrario.*

Observación: cuando λ tiende hacia cero con valores positivos, la cónica es una elipse cuyo eje mayor tiende hacia el segmento FF' y el eje menor hacia cero, la posición límite de dichas elipses es pues, el segmento FF'. Cuando λ tiende hacia cero con valores negativos, la cónica es una hipérbola cuyo eje real tiende hacia FF', la posición límite de dichas hipérbolas es la parte del eje OX exterior al segmento FF'. Finalmente cuando λ tiende hacia $-c^2$ pero conservándose superior a este valor, la curva es una hipérbola cuyo eje real tiende hacia cero y las asíntotas hacia OY, luego la posición límite de dichas hipérbolas es el eje OY.

Pueden considerarse estas tres figuras como casos límites de las cónicas de la serie y pertenecientes a ésta, con lo que se consigue dar una mayor generalidad a los teoremas enunciados en esta teoría, pues bajo estas hipótesis se ve, por ejemplo, fácilmente, que por un punto del plano pasan dos cónicas de la serie de las que una es una hipérbola y la otra una elipse.

6. **Parábolas homofocales.** — DEF. 5. Se denominan *parábolas homofocales* a las que tienen el mismo foco y el mismo eje.

Tomemos un sistema cartesiano ortogonal, con el eje común de las parábolas como eje OX y el foco como origen. Cada parábola quedará determinada por la directriz cuya ecuación es $x + \lambda = 0$. Dando a λ todos los valores reales, salvo el $\lambda = 0$, obtenemos todas las parábolas de foco O y eje OX.

La ecuación de la serie de parábolas homofocales será pues [2]

$$x^2 + y^2 - (x + \lambda)^2 = 0$$

que también puede ponerse en la forma

$$y^2 = 2\lambda \left(x + \frac{\lambda}{2} \right) \tag{13}$$

Si $\lambda > 0$, las parábolas tienen su concavidad hacia la parte positiva del eje OX, y si $\lambda < 0$ hacia la parte negativa (fig. 63).

Sea ahora (x_0, y_0) un punto del plano. Para que una parábola de la serie pase por él, debe cumplise la condición

$$\lambda^2 + 2x_0\lambda - y_0^2 = 0. \tag{14}$$

Esta ecuación en λ tiene como discriminante $x_0^2 + y_0^2$ que es siempre positivo, si $y_0 \neq 0$; luego la ecuación tiene dos raíces reales de signos contrarios por ser $\lambda_1, \lambda_2 = -y_0^2$.

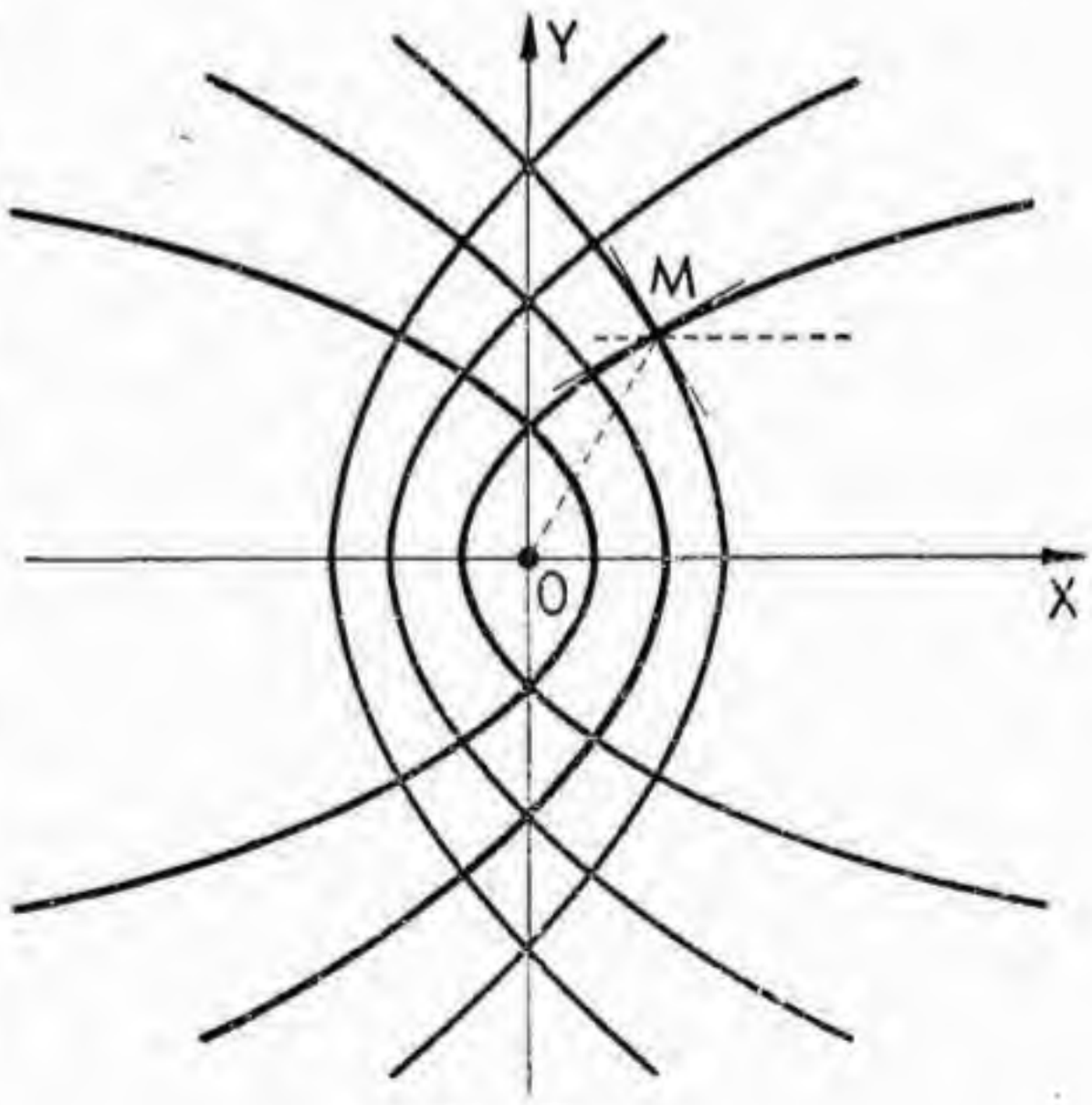

Fig. 63.

Si $y_0 = 0$ la ecuación toma la forma $\lambda(\lambda + 2x_0) = 0$, que dejando de lado la solución $\lambda = 0$, que no corresponde a ninguna parábola de la serie, admite una solución si es $x_0 \neq 0$ y ninguna si es $x_0 = 0$. Tenemos así el teorema siguiente:

TEOREMA 6. *Por cada punto del plano no situado en el eje* OX, *pasan dos parábolas homofocales de concavidades contrarias. Por los puntos del eje* OX *pasa una sola con excepción del foco por el que no pasa ninguna.*

Consideremos ahora dos parábolas homofocales que se cortan en un punto $M(x_0, y_0)$; sus ecuaciones son

$$y^2 = 2\lambda_1 \left(x + \frac{\lambda_1}{2} \right) \; ; \; y^2 = 2\lambda_2 \left(x + \frac{\lambda_2}{2} \right)$$

en donde λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación [14]. Las tangentes en M a ambas parábolas tienen como coeficientes angulares

$$m_1 = \frac{\lambda_1}{y_0} \qquad m_2 = \frac{\lambda_2}{y_0}$$

cuyo producto, reemplazando $\lambda_1 \lambda_2$ por su valor $-y_0^2$ sacado de [14] es -1, luego se deduce la propiedad siguiente:

TEOREMA 7. *Dos parábolas homofocales son siempre ortogonales.*

Tomemos ahora una recta del plano definida por su coeficiente angular m_0 y un punto (x_0, y_0), es decir la recta de ecuación $y = y_0 + m_0 x - m_0 x_0$.

La tangente a una parábola de la serie, paralela a esta recta, tiene como ecuación:

$$y = m \left(x + \frac{\lambda}{2} \right) + \frac{\lambda}{2m}$$

y para que pase por $(x_0 y_0)$ se ha de cumplir la condición:

$$y_0 = m_0 \left(x_0 + \frac{\lambda}{2} \right) + \frac{\lambda}{2m_0}$$

de donde se deduce el valor de λ

$$\lambda = \frac{2m_0(y_0 - m_0 x_0)}{1 + m_0^2}$$

luego si $\lambda \neq 0$ se obtiene una parábola a la que es tangente la recta dada.

Para que sea $\lambda = 0$ tiene que ser ó $m_0 = 0$, ó $y_0 = m_0 x_0$, es decir, o la recta es paralela al eje OX, o, por satisfacer a la relación $y_0 = m_0 x_0$, pasa por el origen. (Su ecuación es $y = m_0 x$).

Nos queda ahora el caso de las rectas paralelas a OY, sólo pueden ser tangentes a una parábola de la serie en los puntos de intersección con el eje OX, luego, salvo el caso del eje OY, la recta es tangente a una parábola de la serie. Se tiene por consiguiente el teorema:

TEOREMA 8. *Toda recta no paralela a* OX *y que no pase por el origen es tangente a una y sólo a una parábola de la serie.*

Observación: Cuando λ tiende hacia cero con valores positivos las parábolas tienden hacia el semieje positivo de las abscisas y si es con valores negativos hacia el semieje negativo de las abscisas. Como en el caso de las cónicas homofocales con centro, pueden considerarse las semirrectas como casos límites de las parábolas de la serie y pertenecientes a ésta, con lo que también se consigue una mayor generalidad en los enunciados de los teoremas; se tiene por ejemplo que por todo punto del plano pasan dos parábolas homofocales.

§ 20. CÓNICAS EN GENERAL

1. **Curvas representables por una ecuación de segundo grado con dos variables.** — Ya vimos, al hacer el estudio de la línea recta, que toda ecuación de primer grado representaba una recta y que recíprocamente toda recta tenía como ecuación una de primer grado. Después hemos dado (§ 15-1) como definición general de cónicas, las curvas cuya ecuación en un sistema de coordenadas cartesianas es un polinomio de segundo grado en las dos variables x é y, igualado a cero.

Entre las cónicas vimos que figuraban la elipse (de la cual la circunferencia es un caso particular), la hipérbola y la parábola. Además vimos que una ecuación de segundo grado podía igualmente darnos uno de los casos siguientes:

a) No existe ningún punto real cuyas coordenadas satisfagan a la ecuación de la curva, tal es el caso de la ecuación

$$ax^2 + by^2 + c = 0$$

siendo a, b y c mayores que 0.

b) Existe un solo punto real cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación de la curva, tal es el caso de la ecuación

$$ax^2 + by^2 = 0$$

siendo a y b mayores que 0.

c) La curva representa dos rectas distintas o confundidas, tal es el caso de las ecuaciones

$$(ax + by + c)(mx + ny + p) = 0 \quad ; \quad (ax + by + c)^2 = 0.$$

Vamos a demostrar ahora que toda cónica, o es una elipse, una hipérbola o una parábola o nos da uno de los tres casos a), b) y c) antes mencionados.

Al mismo tiempo que demostramos esta propiedad, daremos un método muy rápido y práctico para determinar, dada una ecuación de segundo grado, cuál es la curva que representa. Este método es el denominado *de la formación de cuadrados.*

2. **Estudio de las cónicas por el método de formación de cuadrados.** — Sea la ecuación más general posible de segundo grado en dos variables

$$[1] \qquad ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

y vamos a estudiar la curva que representa en un sistema dado cualquiera de coordenadas cartesianas, rectangulares o no.

Supongamos $a \neq 0$, multiplicando por a, reuniendo los términos en x y completando el cuadrado de $ax + hy + g$, la ecuación [1] toma la forma

$$(ax + hy + g)^2 - h^2y^2 - g^2 - 2ghy + aby^2 + 2afy + ac = 0,$$

poniendo

[2] $\delta = ab - h^2 \quad ; \quad \lambda = af - gh \quad ; \quad \mu = ac - g^2$

es decir

[3] $$(ax + hy + g)^2 + \delta y^2 + 2\lambda y + \mu = 0.$$

Supongamos ahora $\delta \neq 0$, multiplicando por δ, reuniendo los términos en y y completando el cuadrado, la ecuación [2] toma la forma

[4] $$\delta(ax + hy + g)^2 + (\delta y + \lambda)^2 - \lambda^2 + \delta\mu = 0.$$

Calculemos el término independiente de esta ecuación:

$$-\lambda^2 + \delta\mu = -a^2f^2 - g^2h^2 + 2afgh + a^2bc - ach^2 - abg^2 + g^2h^2 = a(abc + 2fgh - bg^2 - ch^2 - af^2) = a\Delta$$

siendo Δ el determinante

[5] $$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

Las rectas $ax + hy + g = 0$ y $\delta y + \lambda = 0$, son concurrentes por ser nulo el coeficiente de x en la segunda ecuación y no serlo, por hipótesis, en la primera; tomémoslas como nuevos ejes de coordenadas y se tendrá:

$$ax + hy + g = k_1x' \quad ; \quad \delta y + \lambda = k_2y'$$

luego la ecuación [4] toma la forma

[6] $$\delta k_1^2x'^2 + k_2^2y'^2 = -a\Delta.$$

Consideraremos ahora dos casos distintos según que δ sea mayor o menor que cero.

a) $\delta > 0$. La curva representa entonces (§ 15-2):

Una *elipse*, si es $a \,.\, \Delta < 0$.

Un solo punto real (el origen) si es $\Delta = 0$. En este último caso, cuando se consideran elementos imaginarios representa las dos rectas imaginarias

$$\sqrt{\delta}k_1x' + ik_2y' = 0 \quad \text{y} \quad \sqrt{\delta}k_1x' - ik_2y' = 0.$$

Una curva sin puntos reales, si es $a\Delta > 0$. Se dice entonces que se tiene una *elipse imaginaria*.

b) $\delta < 0$. La curva representa entonces (§ 15-2):

Una *hipérbola* si es $\Delta \neq 0$.

Dos rectas que pasan por el origen (las $\sqrt{-\delta}k_1x' + k_2y' = 0$ y $-\sqrt{-\delta}k_1x' + k_2y' = 0$) si es $\Delta = 0$.

Estos resultados han sido obtenidos en las hipótesis $\delta \neq 0$ y $a \neq 0$; subsisten si es $\delta \neq 0$ y $b \neq 0$ (haciendo un razona-

miento idéntico, o permutando la x con la y. Observaremos por otra parte que el caso $a = 0$ sólo cabe si es $\delta \leqslant 0$.

Pasemos ahora al caso en que suponiendo todavía $\delta \neq 0$, sean $a = b = 0$. Entonces, para que la ecuación sea de segundo grado se debe tener $h \neq 0$. La ecuación [1] toma ahora la forma

$$2hxy = 2gx + 2fy + c = 0$$

[7] $$2(hx = f)\left(y + \frac{g}{h}\right) - \frac{2fg}{h} + c = 0.$$

Como se ve desarrollando esta última y haciendo la traslación

$$x = x' - \frac{f}{h} \quad ; \quad y = y' - \frac{g}{h}$$

toma la forma

[8] $$2x'y' = \frac{2fg - ch}{h^2}.$$

Si observamos que, en la hipótesis $a = b = 0$, el determinante Δ vale $2fgh - ch^2$, la ecuación [8] toma la forma

[9] $$x'y' = \frac{\Delta}{2h^3}$$

que representa una *hipérbola* referida a sus asíntotas (§ 16-7) si es $\Delta \neq 0$, y *dos rectas* (los ejes coordenados) si es $\Delta = 0$, luego subsisten los resultados establecidos.

Pasemos ahora al caso en que es $\delta = 0$. La ecuación [2] toma la forma

[10] $$(ax + hy + g)^2 + 2\lambda y + \mu = 0.$$

Supongamos $a \neq 0$, entonces si es $\lambda \neq 0$, tomando como nuevos ejes coordenados las rectas concurrentes $ax + hy + g = 0$ y $2\lambda y + \mu = 0$, la ecuación [10] toma la forma

[11] $$k_1^2 x'^2 + k_2 y' = 0$$

que representa (§ 15-1) *una parábola*.

Si fuese $\lambda = 0$, la ecuación [10] toma la forma

$$(ax + hy + g + \sqrt{-\mu})\,(ax + hy + g - \sqrt{-\mu}) = 0$$

que representa *dos rectas paralelas, reales y distintas* si es $\mu < 0$, *una recta doble* si es $\mu = 0$ y *dos rectas imaginarias paralelas* si es $\mu > 0$.

Si fuese $a = 0$, tendría que ser $b \neq 0$, pues si no, tendríamos también, por la hipótesis $\delta = 0$, $h = 0$ y la ecuación no sería de segundo grado. Entonces subsisten los resultados obtenidos; basta hacer un razonamiento idéntico, o permutar la x por la y.

Queda así probado el teorema siguiente:

TEOREMA 1. *Una ecuación de segundo grado sólo puede representar en un sistema de coordenadas cartesianas (ortogonales u oblicuas) las siguientes curvas:*

a) *Una hipérbola, una parábola o una elipse (real o imaginaria).*

b) *Dos rectas reales que se cortan, dos rectas paralelas (reales y distintas, reales y confundidas o imaginarias y distintas) o dos rectas imaginarias con un punto real común.*

DEFINICIÓN 1. En el caso b), cuando la cónica se reduce a dos rectas, se dice que es una *cónica degenerada.*

3. **Clasificación de las cónicas.** — Para clasificar una cónica dada por su ecuación, pueden utilizarse las funciones Δ y δ de los coeficientes que hemos considerado. La clasificación surge de las consideraciones que acabamos de hacer, con la única restricción, en los casos $\delta < 0$ y $\delta = 0$, de ver lo qué ocurre cuando, por ser $a = 0$, hemos tenido que permutar la variable x por la y en la ecuación [1]. Al permutar x por y, las funciones Δ y δ toman la forma:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} b & h & f \\ h & a & g \\ f & g & c \end{vmatrix} \qquad \delta' = ba - h^2$$

y es inmediato que se tiene $\Delta' = \Delta$ y $\delta = \delta'$, luego los resultados obtenidos son totalmente válidos en el caso en que es $\delta < 0$.

Pasemos al caso $\delta = 0$. Si es $a \neq 0$, se tiene, desarrollando por los elementos de la tercera columna, el determinante Δ

$$\Delta = -bg^2 + 2fgh - af^2$$
$$-a\Delta = abg^2 + a^2f^2 - 2afgh = g^2h^2 + a^2f^2 - 2afgh = \lambda^2$$

luego, Δ y λ son simultáneamente o nulos o distintos de cero.

Si es $a = 0$, obtenemos al permutar la x por la y en lugar de $\lambda = af - gh$ la función $\lambda' = bg - fh$, mientras que Δ, como acabamos de ver, permanece invariante; además se tiene $h = 0$, luego los valores de Δ y λ' son $-bg^2$ y bg, es decir $-b\Delta = \lambda'^2$, luego también en este caso Δ y λ' sólo pueden anularse simultáneamente.

Podemos resumir entonces los resultados obtenidos en el cuadro siguiente que nos da la clasificación general de las cónicas.

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta < 0$	Hipérbola.	Dos rectas reales que se cortan.
$\delta = 0$	Parábola.	Dos rectas paralelas (reales y distintas, reales y confundidas o imaginarias y distintas).
$\delta > 0$	Elipse (real si $a\Delta < 0$ é imaginaria si $a\Delta > 0$).	Dos rectas imaginarias con un punto real común.

En el caso de la parábola degenerada ($\delta = 0$ y $\Delta = 0$), si es $a \neq 0$, tendremos dos rectas reales distintas si $\mu = ac - g^2$ es < 0, una recta real doble si es $\mu = 0$ y dos rectas imaginarias distintas si es $\mu > 0$. Cuando sea $a = 0$, hay que reemplazar en los resultados anteriores μ por $\mu' = bc - f^2$.

Puede comprobarse fácilmente que si son $a \neq 0$ y $b \neq 0$, en el caso de la parábola degenerada se tiene que μ y μ' son simultáneamente positivos, nulos o negativos (basta ver que se tiene $a^2\mu' = h^2\mu$). En cambio si es $a = 0$ ó $b = 0$, esta propiedad no se cumple (basta considerar la ecuación $y^2 + 4y + 3 = 0$).

Si consideramos coordenadas homogéneas, la ecuación [1] toma la forma

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gxt + 2fyt + ct^2 = 0 \qquad [12]$$

que puede considerarse como de segundo grado, aún cuando se tenga: $a = h = b = 0$. En este caso la ecuación toma la forma

$$t(2gx + 2fy + ct) = 0 \qquad [13]$$

que representa una recta propia y la impropia si es $g \neq 0$ ó $f \neq 0$ y la recta impropia doble si es $g = f = 0$.

La introducción de las coordenadas homogéneas nos da también una interpretación clara de la clasificación de las cónicas. Si determinamos la intersección de la cónica con la recta impropia $t = 0$, obtenemos la ecuación $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, y se obtienen dos puntos reales de intersección si es $h^2 - ab = -\delta$ mayor que cero (es decir si la curva es del género hipérbola), un solo punto real si $h^2 - ab = 0$ (es decir si la curva es del género parábola) y ninguno si $h^2 - ab < 0$ (es decir si la curva es del género elipse).

4. **Aplicación práctica del método de formación de cuadrados.** — En la práctica, resulta más cómodo para clasificar las cónicas, aplicar directamente la formación de los cuadrados, en lugar de buscar los valores de δ y Δ y aplicar la clasificación del cuadro del parágrafo anterior. Daremos algunos ejemplos para mostrar la forma de aplicarlo.

1º Sea la curva de ecuación:

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 2ax - 2ay + 4a^2 = 0$$
$$(x - y - a)^2 + y^2 - 4ay + 3a^2 = 0$$
$$(x - y - a)^2 + (y - 2a)^2 = a^2.$$

La curva es una elipse, las rectas $x - y - a = 0$ é $y - 2a$ son diámetros conjugados y el centro es el punto $(3a, 2a)$.

2º Sea la curva de ecuación:

$$2xy + 3x - y + 1 = 0$$
$$(2x - 1)\left(y + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} + 1 = 0 \quad ;$$
$$(2x - 1)\left(y + \frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{2}.$$

La curva es una hipérbola; sus asíntotas tienen como ecuaciones

$$x = \frac{1}{2} \quad ; \quad y = -\frac{3}{2}$$

y el centro es el punto

$$\frac{1}{2} \ , \ -\frac{3}{2}$$

3º Sea la curva de ecuación

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$$
$$(x + 2y + 1)^2 - 6y = 0.$$

La curva es una parábola.

4º Sea la curva de ecuación

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 + 3x + 3y + 1 = 0$$
$$4x^2 + 10xy + 4y^2 + 6x + 6y + 2 = 0$$
$$\left(2x + \frac{5}{2}y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}y^2 - \frac{3}{2}y - \frac{1}{4} = 0$$
$$\left(2x + \frac{5}{2}y + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

La curva se compone de las dos rectas

$$2x + 4y + 2 = 0 \quad ; \quad 2x + y + 1 = 0.$$

5º Sea la curva de ecuación

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$$
$$(x + 2y - 1)^2 + 1 = 0.$$

La curva se compone de las dos rectas imaginarias paralelas

$$x + 2y - 1 + i = 0 \quad ; \quad x + 2y - 1 - i = 0.$$

6º Sea la curva de ecuación

$$5x^2 + 2xy + 10y^2 - 12x - 22y + 17 = 0$$
$$25x^2 + 10xy + 50y^2 - 60x - 110y + 85 = 0$$
$$(5x + y - 6)^2 + 49y^2 - 98y + 49 = 0$$
$$(5x + y - 6)^2 + (7y - 7)^2 = 0.$$

La curva se compone de las dos rectas imaginarias

$$5x + (1 + 7i)y - 6 - 7i = 0 \quad ;$$
$$5x + (1 - 7i)y - 6 + 7i = 0$$

que tienen común el punto real (1, 1), único punto real cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación de la curva.

7º Sea la curva de ecuación

$$4x^2 - 20xy + 25y^2 + 4x - 10y + 1 = 0$$
$$(2x - 5y + 1)^2 = 0.$$

La ecuación representa una recta doble.

5. **Centro de las cónicas.** — Vamos a ocuparnos ahora del problema de *determinar los centros de una cónica, es decir, sus centros de simetría.* El método de formación de los cuadrados nos determina, para las elipses, reales o imaginarias, o para las hipérbolas, las ecuaciones de un par de diámetros conjugados, y el punto de intersección de dichos diámetros conjugados es el único centro de simetría de la cónica. Cuando la cónica se reduce a dos rectas que se cortan, el mismo método de la formación de los cuadrados nos da las ecuaciones de las dos rectas y su punto de intersección es el único centro de la cónica.

Cuando la cónica es una parábola no degenerada, ya sabemos que carece de centro de simetría; si es degenerada todos los puntos de la recta cuyos puntos equidistan de las dos rectas paralelas que constituyen la cónica son centros de la cónica. En particular, si la cónica se reduce a una recta doble, todos los puntos de ella son centros.

El problema de determinar los centros puede igualmente hacerse en forma directa. Supongamos que la cónica tenga su ecuación referida a un sistema de coordenadas cartesianas cuyo origen sea un centro de la cónica; su ecuación no ha de cambiar cuando se cambie x por $-x$, ó y por $-y$, y por consiguiente, como se ve inmediatamente, han de ser nulos los coeficientes de los términos de primer grado; recíprocamente, si dichos coeficientes son nulos, el origen es un centro de simetría. Por consiguiente, el problema de determinar los centros se reduce al de hacer una traslación de ejes que conduzca a la anulación de los términos de primer grado.

Sea pues, la cónica de ecuación

$$[14] \qquad f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

y hagamos el cambio de coordenadas $x = x' + x_0$; $y = y' + y_0$. Se tiene, aplicando la fórmula de Taylor (o reemplazando y desarrollando)

$$[15] \quad \begin{aligned} & f(x' + x_0, y' + y_0) = f(x_0, y_0) + x'f'_x(x_0, y_0) + \\ & + y'f'_y(x_0, y_0) + \tfrac{1}{2}(x'^2 f''_{x^2}(x_0, y_0) + 2x'y'f''_{xy}(x_0, y_0) + \\ & + y'^2 f''_y(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) + 2(ax_0 + hy_0 + g)x' + \\ & + 2(hx_0 + by_0 + f)y' + ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 \end{aligned}$$

y como han de ser nulos los coeficientes de los términos de primer grado, se ha de cumplir

$$[16] \quad \begin{cases} ax_0 + hy_0 + g = 0 \\ hx_0 + by_0 + f = 0. \end{cases}$$

El problema de determinar los centros de la cónica se reduce por consiguiente a la resolución del sistema anterior, es decir a encontrar el punto de intersección de las rectas de ecuaciones [16].

El determinante de los coeficientes es el δ del nº 2, luego las rectas serán concurrentes, si, y sólo si, es $\delta \neq 0$ (género elipse o hipérbola). Si es $\delta = 0$ y $\lambda = af - gh \neq 0$, las rectas son paralelas y no existe ningún centro de simetría (parábola no degenerada); en cambio si es $\lambda = 0$ (parábola degenerada), las dos rectas se reducen a una sola, cuyos puntos son todos centros de la cónica.

Ejemplos: Apliquemos los resultados anteriores a los ejemplos del nº 4.

En el primero obtenemos las ecuaciones $x - y - a = 0$ y $-x + 2y - a = 0$, que admiten como solución $x = 3a$ é $y = 2a$, coordenadas del centro de la elipse.

En el segundo obtenemos las eceuaciones

$$y + \frac{3}{2} = 0 \quad ; \quad x - \frac{1}{2} = 0$$

que admiten como solución las coordenadas del centro de la hipérbola.

En el tercero se obtiene el sistema de ecuaciones

$$x + 2y + 1 = 0 \quad ; \quad 2x + 4y - 1 = 0$$

que carece de solución.

En el cuarto las ecuaciones son

$$2x + \frac{5}{2}y + \frac{3}{2} = 0 \quad : \quad \frac{5}{2}x + 2y + \frac{3}{2} = 0$$

que tienen como solución

$$x = -\frac{1}{3} \quad ; \quad y = -\frac{1}{3}$$

éstas son las coordenadas del punto de intersección de las dos rectas que componen la cónica.

En el quinto se obtienen las ecuaciones $x + 2y - 1 = 0$; $2x + 4y - 2 = 0$, que representan ambas la misma recta paralela a las dos imaginarias que componen la cónica.

En el sexto se obtienen las ecuaciones $5x + y - 6 = 0$ y $x + 10y - 11 = 0$ cuya solución $x = 1$, $y = 1$, nos da el único punto real de la cónica.

En el séptimo se obtienen las ecuaciones $4x - 10y + 2 = 0$; $-10x + 25y - 5 = 0$, que representan ambas la recta que, considerada como doble, forma la cónica.

En lo expuesto hemos considerado los elementos imaginarios; se sobreentiende que el concepto de simetría que sólo es aplicable en su primera definición a los elementos reales, se extiende a los imaginarios, generalizando el significado analítico de la simetría, es decir que se considerará como simétrico del punto (x, y), de coordenadas reales o complejas, respecto del origen al punto de coordenadas $(-x, -y)$ y en general el simétrico de (x, y) con respecto al punto (x_0, y_0) es $(-x + 2x_0, -y + 2y_0)$.

En el caso de la parábola no degenerada, como las rectas [16] son paralelas puede considerarse el punto impropio que ellas tienen común como un centro impropio de la parábola.

Cuando se ha trasladado el origen al centro de una cónica del tipo hipérbola o elipse, la ecuación [14] toma la forma

$$ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + f(x_0, y_0) = 0.$$

Vamos a calcular el valor del término independiente:

$$z_0 = f(x_0, y_0) = ax^2_0 + 2hx_0y_0 + by^2_0 + 2gx_0 + 2fy_0 + c =$$
$$= x_0(ax_0 + hy_0 + g) + y_0(hx_0 + by_0 + f) + gx_0 + y_0 + c =$$
$$= gx_0 + fy_0 + c.$$

Pero entonces el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} ax + hy \quad &= -g \\ hx + by \quad &= -f \\ gx + fy - z &= -c \end{aligned}$$

tiene como soluciones $x_0, y_0, z_0 = 0$.

La solución z_0 se puede obtener aplicando la regla de los determinantes de Cramer, es decir:

$$z_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & h & -g \\ h & b & -f \\ g & f & -c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & h & 0 \\ h & b & 0 \\ g & f & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-\Delta}{-\delta} = \frac{\Delta}{\delta}$$

y por tanto la *ecuación en el centro* de la cónica (es decir la

ecuación de la cónica en un sistema de ejes paralelos a los dados y con origen en el centro de la cónica) es

$$ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

6. **Diámetros en las cónicas.** — La teoría de los diámetros que hemos desarrollado para la elipse, hipérbola y parábola, puede hacerse en forma general que abarca los resultados obtenidos en los casos particulares mencionados y se aplica también a las cónicas imaginarias o degeneradas.

Consideremos la cónica de ecuación [14] y tomemos una recta cuyas ecuaciones paramétricas sean

[17] $$x = x_0 + p\lambda \quad ; \quad y = y_0 + q\lambda.$$

Los puntos de intersección de la recta con la cónica están dados por las raíces de la ecuación en λ

$$\varphi(\lambda) = f(x_0 + p\lambda,\ y_0 + q\lambda) = 0.$$

Desarrollando $\varphi(\lambda)$ por la fórmula de Mac-Laurin, se tiene, por ser un polinomio de segundo grado

[18] $$\varphi(\lambda) = \varphi(0) + \lambda\varphi'(0) + \frac{\lambda^2}{2}\varphi''(0).$$

Para calcular $\varphi'(\lambda)$ apliquemos la fórmula de la derivada de función

$$\varphi'(\lambda) = f'_x \frac{dx}{d\lambda} + f'_y \frac{dy}{d\lambda} =$$
$$= 2(ax + hy + g)p + 2(hx + by + f)q$$

y volviendo a derivar se tiene

$$\varphi''(\lambda) = 2(ap + qh)p + 2(hp + bq)q = 2(ap^2 + 2hpq + bq^2).$$

La ecuación que nos da los puntos de intersección de la cónica con la recta es por consiguiente

[19] $$f(x_0, y_0) + 2\lambda[p(ax_0 + hy_0 + g) + q(hx_0 + by_0 + f)] + \\ + \lambda^2\alpha(p, q) = 0$$

en donde $\alpha(p, q)$ es el conjunto de los términos de segundo grado en la ecuación de la cónica. A la fórmula [19] puede llegarse, sin usar la teoría de la derivación, reemplazando en la ecuación de la cónica x é y por $x_0 + p\lambda$, $y_0 + q\lambda$, y ordenando el desarrollo con respecto a λ.

Si $\alpha(p, q) \neq 0$, la ecuación será de segundo grado y la recta cortará a la cónica en dos puntos reales, en dos imaginarios conjugados o en un punto real doble. Las rectas paralelas a la dada determinan cuerdas en la cónica.

Si $\alpha(p, q) = 0$, y el coeficiente de λ es $\neq 0$, la recta cortará a la cónica en un solo punto; si dicho coeficiente es cero,

entonces, según que $f(x_0, y_0)$ sea distinto o igual a cero, la recta no tiene ningún punto común (real o imaginario) con la cónica o forma parte de la cónica.

Para que se tengan valores de p y q que hagan nula

$$\alpha(p, q) = ap^2 + 2hpq + bq^2$$

debe ser $h^2 - ab \geqslant 0$, es decir, la curva ha de ser del género hipérbola o parábola; en el primer caso hay dos direcciones que no definen cuerdas en la cónica (las rectas paralelas a las asíntotas si se trata de una hipérbola no degenerada, o las paralelas a las rectas que la componen, si la cónica se compone de un par de rectas concurrentes).

Si la cónica es del género parábola hay una sola dirección que no define cuerdas (las rectas paralelas al eje si la curva es una parábola no degenerada o las paralelas a las rectas que la forman si la parábola es degenerada).

Vamos ahora a introducir la siguiente definición:

DEF. 2. *Diámetro de una cónica es el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas paralelas a una recta dada.*

Cuando los puntos de intersección sean imaginarios conjugados, se entenderá naturalmente por punto medio el punto real cuyas coordenadas son la semisuma de las coordenadas de los puntos de intersección, y cuando el punto sea doble, el punto medio coincide con el mismo punto (punto de contacto de la recta tangente a la cónica).

Se tiene ahora el siguiente teorema fundamental:

TEOR. 2. *Los diámetros de una cónica son líneas rectas.*

En efecto, sea la cónica de ecuación [14] y tomemos una recta de ecuaciones paramétricas $x = x_0 + p\lambda$; $y = y_0 + q\lambda$, tal que $\alpha(p, q) \neq 0$. Dejando constante p y q y haciendo variar x_0 é y_0 se obtienen las rectas paralelas a la dada. Por otra parte, para cada una de estas rectas pueden tomarse como valores de x_0 é y_0 las coordenadas de un punto cualquiera de la recta. Tomemos entonces las coordenadas del punto medio de la cuerda que cada recta determina con la cónica (que siempre existe por ser $\alpha(p, q) \neq 0$).

La condición necesaria y suficiente para que (x_0, y_0) sea el punto medio de la cuerda es que los valores de λ correspondientes a los dos puntos de intersección sean iguales y de signo contrario, es decir que sea nulo el coeficiente de λ en la ecuación [19]. Por consiguiente dichos puntos deben satisfacer a la ecuación

$$[20] \quad pf'_x + qf'_y = 2p(ax + hy + g) + 2q(hx + by + f) = 0$$

que ordenándola toma la forma

$$[21] \quad (ap + hq)x + (hp + bq)y + pg + qf = 0$$

que es la ecuación de una recta, lo que prueba el teorema.

De la ecuación [20] y de las ecuaciones [16] que determinan el centro de la cónica se deduce que las coordenadas del centro, cuando éste existe, satisfacen a la ecuación, cualesquiera que sea p y q. Por consiguiente se deduce el siguiente

TEOR. 3. *Los diámetros de una cónica con centro pasan todos por el centro.*

Si la cónica es del género parábola, las rectas de ecuación [20] son, cualesquiera que sean p y q, paralelas a las rectas de ecuaciones [16], que sabemos son paralelas entre sí, luego podemos enunciar el siguiente

TEOR. 4. *En las cónicas del género parábola los diámetros son rectas paralelas entre sí.*

DEF. 3. *Dos diámetros se dice que son conjugados, cuando cada uno de ellos el lugar de los puntos medios de las cuerdas paralelas al otro.*

Es claro que para que existan diámetros conjugados la cónica no puede ser del género parábola ya que en este caso todos los diámetros son paralelos entre sí. Vamos a ver que en las curvas del género elipse o hipérbola todo diámetro tiene siempre un diámetro conjugado.

El diámetro lugar de los puntos medios de las cuerdas de coeficientes directores p y q tiene a su vez como coeficientes directores, según [21]

$$[22] \qquad q' = ap + hq \quad ; \quad p' = -hp - bq$$

y el diámetro lugar de los puntos medios de las cuerdas de coeficientes directores p' y q' tiene como coeficientes directores

$$p_1 = -hp' - bq' = h^2p + hbq - abp - hbq = p(h^2 - ab)$$
$$q_1 = ap' + hq' = -ahp - abq + ahp + h^2q = q(h^2 - ab)$$

es decir proporcionales a p y q; por consiguiente queda así probado que todo diámetro tiene siempre un diámetro conjugado.

Si consideramos ahora el coeficiente angular del diámetro $m = q/p$ en lugar de los coeficientes directores p y q, de [22] se deduce que el coeficiente angular del diámetro conjugado es

$$m' = -\frac{ap + hq}{hp + bq} = -\frac{a + hm}{h + bm}$$

de donde se deduce

$$[23] \qquad bmm' + h(m + m') + a = 0$$

que nos da *la ecuación de los coeficientes angulares de dos diámetros conjugados.*

Consideremos una cónica con centro. Tomemos el centro como origen de coordenadas, su ecuación es del tipo

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c = 0.$$

Si suponemos que los ejes son diámetros conjugados, se debe tener para el eje OX: $p \neq 0$ y $q = 0$; para el eje OY: $p' = 0$ y $q' \neq 0$; teniendo en cuenta las relaciones [22] se ve que tiene que ser $h = 0$, y por consiguiente la ecuación toma la forma

$$ax^2 + by^2 + c = 0 \tag{24}$$

que es *la ecuación de una cónica referida a dos diámetros conjugados.*

Si la curva es del género parábola dejemos invariable el eje OY y tomemos como eje OX el diámetro lugar de los puntos medios de las cuerdas paralelas al eje OY. La ecuación del eje OX viene dada por [21] siendo $p = 0$ y $q \neq 0$; para que esta ecuación sea la del eje OX se tiene que cumplir $hq = 0$; $bq \neq 0$; $qf = 0$, y por consiguiente se tiene $h = 0$; $b \neq 0$; $f = 0$; además, como $\delta = 0$, se tiene $a = 0$, es decir que la ecuación de la cónica toma la forma

$$by^2 + 2gx + c = 0.$$

En esta ecuación es $\Delta = -bg^2$, luego como $b \neq 0$ Δ y g se anulan simultáneamente. Si $g \neq 0$, es decir si la parábola no es degenerada, la cónica corta al eje OX en un punto de abcisa $-c/2g$; llevando el origen a este punto, desaparece el término independiente y la ecuación de la parábola toma la forma

$$by^2 + 2gx = 0 \tag{25}$$

que es la ecuación de la parábola referida a un diámetro y la tangente en su extremo.

Si es $g = 0$, es decir si la parábola es degenerada, la ecuación toma la forma $by^2 + c = 0$. En este caso es indiferente la posición del eje OY.

7. **Ejes de las cónicas.** — Consideraremos aquí únicamente sistemas de coordenadas cartesianas rectangulares, y nos ocuparemos del problema de la determinación de los *ejes de las cónicas*, es decir de sus *ejes de simetría ortogonal.*

Un eje de simetría ortogonal de una cónica corta en su punto medio a las cuerdas que le son perpendiculares, luego, el problema de la determinación de los ejes de una cónica con centro se reduce a la determinación de los diámetros conjugados que son perpendiculares entre sí.

Si p y q son los coeficientes directores de un diámetro y p' y q' los de su conjugado, la condición de perpendicularidad

es $qq' = -pp'$, y teniendo en cuenta [22] se ha de cumplir

$$apq + hq^2 = hp^2 + bpq$$
$$h(q^2 - p^2) + pq(a - b) = 0.$$

Si $h \neq 0$, esta condición no puede ser satisfecha ni por $p = 0$, $q \neq 0$, ni por $p \neq 0$, $q = 0$, es decir que los ejes no pueden ser paralelos a los ejes de coordenadas. Dividiendo por p^2 y poniendo $m = q/p$ se tiene la relación

[26] $$hm^2 + (a - b)m - h = 0 \quad ,$$

ecuación de los coeficientes angulares de los ejes, la cual puede también deducirse directamente de [23].

Esta ecuación tiene dos raíces reales y de signo contrario que son los coeficientes angulares de los ejes. Para determinarlos basta determinar el centro o también aplicar directamente la ecuación [21].

Cuando sea $h = 0$, se tiene la condición $pq(a - b) = 0$, que si $a \neq b$, admite como soluciones $p = 0$ ó $q = 0$, es decir que en este caso los ejes son paralelos a los ejes coordenados. Si además fuera $a = b$, la condición se satisface cualesquiera que sean p y q, es decir que todos los diámetros conjugados son perpendiculares, lo que se podría preveer de antemano por ser en ese caso la cónica una circunferencia.

Ejemplo: Sea la cónica de ecuación

$$x^2 - 8xy + 7y^2 - 4x - 2y - 1 = 0.$$

Se ve inmediatamente que es una cónica con centro del género hipérbola. La ecuación de los coeficientes angulares de los ejes es $-4m^2 - 6m + 4 = 0$ cuyas raíces son $\frac{1}{2}$ y -2.

Podemos determinar ahora el centro de la cónica resolviendo el sistema de ecuaciones [16]

$$x - 4y - 2 = 0 \quad ; \quad -4x + 7y - 1 = 0$$

cuya solución es $x = -2$, $y = -1$; las ecuaciones de los ejes son por lo tanto

$$2x + y + 5 = 0 \quad ; \quad x - 2y = 0.$$

Estas ecuaciones pueden obtenerse aplicando directamente [21]. Se tiene para $m = -2$: $q = -2$, $p = 1$

$$9x - 18y = 0 \quad \text{ó} \quad x - 2y = 0$$

y para $m = \frac{1}{2}$: $q = 1$, $p = 2$

$$-2x - y - 5 = 0 \quad \text{ó} \quad 2x + y - 5 = 0.$$

En coordenadas oblicuas los coeficientes angulares de los ejes se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones

$$bmm' + h(m + m') + a = 0$$
$$1 + mm' + (m + m')\cos\theta = 0$$

que indican la primera que los ejes son diámetros conjugados y la segunda que son perpendiculares, siendo θ el ángulo de los ejes de coordenadas.

Conocidos los ejes se pueden determinar los *vértices*, intersecciones de los ejes con la cónica. Basta para ello resolver el sistema de ecuaciones formado por la ecuación de la cónica y la de uno de los ejes.

Ejemplo: En el ejemplo anterior para encontrar los vértices de la cónica, hay que resolver primero el sistema formado por las ecuaciones

$$x^2 - 8xy + 7y^2 - 4x - 2y - 1 = 0 \quad ; \quad x - 2y = 0$$

que nos conduce a la ecuación

$$5y^2 + 10y + 1 = 0$$

con dos raíces reales que nos dan las abscisas de dos vértices de la cónica. Luego buscamos la solución del sistema

$$x^2 - 8xy + 7y^2 - 4x - 2y - 1 = 0 \quad ; \quad 2x + y + 5 = 0$$

que nos conduce a la ecuación

$$45x^2 + 180x + 184 = 0$$

que no tiene raíces reales. La cónica tiene por consiguiente un solo par de vértices reales.

Consideremos ahora el caso de una cónica del género parábola; para determinar su eje bastará determinar la dirección de sus diámetros (Teorema 4) que viene dada por una de las ecuaciones [16], después determinar la dirección perpendicular a la de los diámetros y el diámetro correspondiente a esta dirección es el eje de la parábola.

Dada la cónica por su ecuación [14], los diámetros tienen como ecuación $ax + hy + \mu = 0$, una recta perpendicular a ellos es la de ecuación $hx - ay = 0$, cuyos coeficientes directores son $p = a$; $q = a$, luego según [20] la ecuación del eje es

$$af'_x + hf'_y = 0. \tag{27}$$

Para determinar el vértice basta determinar la intersección del eje con la parábola.

Si en lugar de partir de la ecuación $ax + hy + \mu = 0$, hubiéramos partido de la $hx + by + \mu = 0$, hubiéramos obtenido como ecuación del eje

$$hf'_x + bf'_y = 0. \tag{27'}$$

Es además inmediato comprobar que ambas ecuaciones representan la misma recta, pero puede suceder que por ser nulos a y h, ó b y h, una de estas ecuaciones no tenga sentido y entonces hay que aplicar la otra.

Ejemplo: Sea la cónica de ecuación

$$x^2 + 6x + 4y + 1 = 0.$$

El eje tiene como ecuación $x = -3$, y el vértice es el punto $(-3, 2)$.

8. **Ecuación en S.** — Vamos a dar otro método para determinar los ejes de una cónica que tiene además utilidad por su generalización a teorías de gran interés del dominio de la matemática superior.

DEF. 4. *Diremos que una dirección es "principal" si es perpendicular al diámetro lugar de los puntos medios de las cuerdas paralelas a dicha dirección.*

Dada una dirección por sus coeficientes directores p y q. La ecuación de la paralela por el origen al lugar de los puntos medios de las cuerdas paralelas a la dirección es, según [21]

$$(ap + hq)x + (hp + bq)y = 0.$$

La recta perpendicular por el origen a la dirección dada tiene como ecuación

$$px + qy = 0.$$

La condición necesaria y suficiente para que la dirección dada sea principal es que ambas ecuaciones representen una misma recta y para ello tiene que existir un factor S de proporcionalidad entre sus coeficientes, es decir que se ha de cumplir para algún valor de S

[28] $$\begin{aligned} ap + hq &= Sp \\ hp + bq &= Sq \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo, que el sistema de ecuaciones en p y q

[29] $$\begin{aligned} (a - S)p + hq &= 0 \\ hp + (b - S)q &= 0 \end{aligned}$$

admita una solución distinta de la $p = 0$ y $q = 0$. Para ello sabemos que es necesario y suficiente que se anule el determinante de los coeficientes, es decir que se cumpla

[30] $$(a - S)(b - S) - h^2 = 0$$

que es la denominada *ecuación en S* de la cónica, que sólo depende de los términos de segundo grado de la ecuación de la cónica; esta ecuación puede ponerse también en la forma

[30'] $$S^2 - (a + b)S + ab - h^2 = 0.$$

Vamos a estudiar sus propiedades.

TEOR. 5. *Las raíces de la ecuación en S son siempre reales y son iguales, sí y sólo si la cónica es una circunferencia.*

Basta, en efecto, ver que el discriminante de la ecuación es $(a - b)^2 + 4h^2$.

TEOR. 6. *Si la raíz de la ecuación en S, es doble, todas las direcciones son principales. Si las dos raíces son simples y no nulas, a cada raíz corresponde una dirección principal y ambas direcciones son perpendiculares entre sí, siendo por consiguiente, las direcciones de los ejes de la cónica.*

En efecto, si la raíz es doble se tiene $h = 0$, y la raíz es $S_0 = a = b$, luego las ecuaciones [29] se satisfacen cualesquiera que sean p y q.

Si las raíces son simples y es $h \neq 0$, las raíces son distintas de a y de b; las dirección principal correspondiente a una raíz S_1 queda determinada por la relación $(a - S_1)p + hq = 0$, que determina p y q, salvo un factor de proporcionalidad; además se tiene $p \neq 0$ y $q \neq 0$. Si es

$h = 0$, las dos raíces son a y b, que tienen que ser distintas; a la raíz a le corresponde según [29] $q = 0$, y a la raíz b le corresponde $p = 0$, es decir que las dos direcciones principales son las de los ejes de coordenadas. En este caso es inmediata la perpendicularidad de las dos direcciones principales, en el caso $h \neq 0$, sean p_1 y q_1 los coeficientes directores de la dirección principal correspondientes a la raíz S_1 y p_2 y q_2 los correspondientes a la raíz S_2; se tiene [28]:

$$ap_1 + hq_1 = S_1p_1 \qquad ap_2 + hq_2 = S_2p_2$$
$$hp_1 + bq_1 = S_1q_1 \qquad hp_2 + bq_2 = S_2q_2$$

multipliquemos la primera igualdad del primer sistema por p_2, la segunda por q_2 y sumemos; multipliquemos la primera igualdad del segundo sistema por p_1, la segunda por q_1 y sumemos; se tiene

$$ap_1p_2 + hq_1p_2 + hp_1q_2 + bq_1q_2 = S_1(p_1p_2 + q_1q_2)$$
$$ap_1p_2 + hp_1q_2 + hq_1p_2 + bq_1q_2 = S_2(p_1p_2 + q_1q_2)$$

y restando miembro a miembro

$$0 = (S_1 - S_2)(p_1p_2 + q_1q_2)$$

pero como las raíces son distintas se tiene $p_1p_2 + q_1q_2 = 0$, que prueba la perpendicularidad de las dos direcciones principales.

Los coeficientes del diámetro perpendicular a la dirección principal son, según [21] y [28], Sp y Sq, luego para que dicho diámetro sea una recta propia es necesario que el valor de S no sea nulo.

La condición necesaria y suficiente para que una raíz de la ecuación en S sea nula es que $ab - h^2 = 0$, es decir que la curva sea del género parábola. Por consiguiente el teorema 6 nos sirve para determinar los ejes de las cónicas con centro; en el caso de la cónica de género parábola, la raíz de la ecuación en S, distinta de cero, nos da la única dirección principal y el diámetro correspondiente es el eje de la parábola.

EJEMPLOS: Retomemos los ejemplos del número anterior.

La ecuación en S correspondiente a la cónica de ecuación

$$x^2 - 8xy + 7y^2 - 4x - 2y - 1 = 0$$

es

$$S^2 - 8S - 9 = 0$$

cuyas raíces son $S_1 = 9$, $S_2 = -1$.

Reemplazando en una ecuación de [29] se tiene

$$-8p_1 - 4q_1 = 0 \quad ; \quad 2p_2 - 4q_2 = 0$$

que nos da los coeficientes angulares de las direcciones principales, es decir de los ejes: $m_1 = -2$; $m_2 = \frac{1}{2}$. La determinación de las ecuaciones de los ejes se hace, bien determinando el centro, bien aplicando directamente [21], como en el número anterior.

Consideremos ahora la cónica de ecuación

$$x^2 + 6x + 4y + 1 = 0.$$

La ecuación en S es: $S^2 - S = 0$, que tiene la raíz no nula $S = 1$. Reemplazando en la segunda ecuación de [29] se tiene $q = 0$. La dirección principal es por consiguiente la del eje de ordenadas. El diámetro correspondiente a esta dirección tiene como ecuación, aplicando [21], $x + 3 = 0$.

§ 21. Polaridad en las cónicas

1. Polar de un punto con respecto de una cónica. — Consideremos una cónica de ecuación

[1] $$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

en un sistema cualquiera cartesiano, y la recta de ecuaciones paramétricas $x = p\lambda$; $y = q\lambda$, en donde el parámetro λ es la distancia orientada de un punto de la recta al origen. (Basta para obtener estas ecuaciones tomar p y q iguales a las coordenadas del punto de la recta situado a la distancia $+1$ del origen).

Vamos a determinar las coordenadas del conjugado armónico P del origen con respecto a los dos puntos de intersección M_1 y M_2 de la recta con la cónica, que supondremos existen y son reales. Sean λ_0, λ_1 y λ_2 los valores del parámetro correspondientes respectivamente a los puntos P, M_1 y M_2. Para que P sea conjugado armónico de O respecto de M_1 y M_2 se debe tener

$$\frac{OM_1}{OM_2} = -\frac{PM_1}{PM_2}$$

es decir

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_2 - \lambda_0}, \quad \text{es} \quad \lambda_0 = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

pero λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación en λ,

[2] $$(ap^2 + 2hpq + bq^2)\lambda^2 + 2(gp + fq)\lambda + c = 0$$

luego se tiene, si $gp + fq \neq 0$, aplicando las fórmulas de la suma y del producto de las raíces de una ecuación de segundo grado

$$\lambda_0 = \frac{-c}{gp + fq}.$$

Si $gp + fq = 0$, la ecuación en λ tiene dos raíces iguales y de signo contrario, es decir que el origen es el punto medio del segmento M_1M_2; su conjugado armónico es impropio, lo que corresponde al valor infinito que toma entonces el parámetro λ_0.

Las coordenadas de P son

$$x = \frac{-cp}{gp + fq} \quad ; \quad y = \frac{-cq}{gp + fq}$$

que satisfacen a la relación

[3] $$gx + fy + c = 0$$

que es independiente de p y de q, es decir que las coordena-

das del conjugado armónico del origen respecto de los dos puntos de intersección, pertenecen a la recta de ecuación [3], cualquiera que sea la secante escogida que pase por O.

Consideremos ahora en lugar del origen un punto cualquiera de coordenadas (x_0, y_0). Traslademos los ejes de forma que el origen sea dicho punto; las fórmulas de cambio de coordenadas son:

$$x = x' + x_0 \quad ; \quad y = y' + y_0$$

y la ecuación de la cónica en el nuevo sistema de ejes es, según vimos en (§ 20-5),

$$ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2(ax_0 + hy_0 + g)x' + \\ + 2(hx_0 + by_0 + f)y' + \mathrm{f}(x_0y_0) = 0.$$

La recta de ecuación [3] toma ahora la forma

$$(ax_0 + hy_0 + g)x' + (hx_0 + by_0 + f)y' + \mathrm{f}(x_0y_0) = 0$$

y en el primer sistema de coordenadas tiene como ecuación

$$[4] \qquad (ax_0 + hy_0 + g)(x - x_0) + \\ + (hx_0 + by_0 + f)(y - y_0) + \mathrm{f}(x_0y_0) = 0$$

y desarrollando y simplificando

$$[4'] \qquad (ax_0 + hy_0 + g)x + (hx_0 + by_0 + f)y + \\ + gx_0 + fy_0 + c = 0$$

que puede ponerse también en la forma

$$[4''] \qquad (ax + hy + g)x_0 + (hx + by + f)y_0 + \\ + gx + fy + c = 0.$$

DEFINICIÓN 1. La recta de ecuación [4] se denomina la *polar* del punto (x_0, y_0) con respecto a la cónica de ecuación [1]. Para que exista la polar es necesario y suficiente que los coeficientes de x é y en la ecuación no sean ambos nulos, o lo que es lo mismo (§ 20-5), que (x_0, y_0) *no sea un centro de la cónica.*

Acabamos de ver que la polar de un punto contiene a todos los conjugados armónicos del punto con respecto a los puntos de intersección de la cónica con una secante cualquiera que pase por el punto, lo que prueba la independencia de la definición respecto del sistema de coordenadas.

Si el punto (x_0, y_0) está sobre la cónica, se tiene $\mathrm{f}(x_0, y_0) = 0$, y la ecuación [4] toma la forma

$$\mathrm{f}'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \mathrm{f}'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

que es la forma de la ecuación de la tangente a una curva de ecuación $\mathrm{f}(x, y) = 0$ en un punto (x_0, y_0) de la misma, luego: *si el punto está sobre la cónica su polar se confunde con la tangente a la cónica en dicho punto.*

Si consideramos coordenadas homogéneas, la ecuación de la polar de un punto (x_0, y_0, t_0) con respecto a la cónica de ecuación

[5] $$f(x, y, t) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gxt + 2fyt + ct^2 = 0$$

es

[5'] $$xf'_x(x_0, y_0, t_0) + yf'_y(x_0, y_0, t_0) + t_0f'_t(x, y, t) = 0$$

ó

[5''] $$x_0f'_x(x, y, t) + y_0f'_y(x, y, t) + t_0f'_t(x_0, y_0, t_0) = 0$$

como se ve inmediatamente.

Cuando el punto es propio y centro de la cónica, la ecuación [5'] representa, si $f'(x_0, y_0, t_0) \neq 0$, la recta impropia. Consideremos el sistema de ecuaciones homogéneas

$$\begin{aligned} f'_x &= ax + hy + gt = 0 \\ f'_y &= hx + by + ft = 0 \\ f'_t &= gx + fy + ct = 0 \end{aligned}$$

cuyo determinante es el Δ de la cónica (§ 20-2). Si $\Delta \neq 0$, es decir, si la cónica no es degenerada, no puede haber un sistema de soluciones no todas nulas del sistema, por lo tanto, si $f'_x(x_0, y_0, z_0)$ y $f'_y(x_0, y_0, t_0)$ son nulas no puede ser nula $f'_t(x_0, y_0, t_0)$, es decir que *la polar del centro es la recta impropia.*

Si la cónica es degenerada, toda solución de las dos primeras ecuaciones es solución de la tercera, luego *la polar del centro es indeterminada.*

Podemos ahora considerar el caso en que el punto sea impropio $(x_0, y_0, 0)$. La ecuación [5''] toma la forma

$$x_0f'_x(x, y, t) + y_0f'_y(x, y, t) = 0.$$

Si la cónica no es del tipo parábola, esta ecuación representa una recta que pasa por el centro de la cónica, puesto que si (x_1, y_1, t_1) es el centro se tiene $f'_x(x_1, y_1, t_1) = 0$; $f'_y(x_1, y_1, t_1) = 0$; es fácil ver que esta polar es el diámetro conjugado del que pasa por el punto impropio dado, puesto que el conjugado armónico del punto impropio de una recta con respecto a dos puntos de la misma es el punto medio del segmento que determinan dichos dos puntos.

Este razonamiento es también válido en el caso de la parábola; la polar de un punto impropio, distinto del de los diámetros, es el diámetro correspondiente a las rectas que pasan por el punto impropio. La polar del punto impropio de los diámetros es la recta impropia, como se ve, de la forma de la ecuación [5'] de la polar, que se reduce en este caso a $t = 0$.

Si la parábola es degenerada en dos rectas, la polar de un punto impropio es la paralela media.

2. **Polo de una recta con respecto de una cónica.** — DEF. 2. Se dice que un punto es *polo* de una recta con respecto de una cónica si la recta es la polar del punto con respecto a la cónica. Vamos ahora a estudiar el problema de la determinación del polo de una recta. Consideraremos dos casos distintos:

a) *La cónica es del tipo elipse o hipérbola.* Referida a dos diámetros conjugados su ecuación es (§ 20-[24]):

$$ax^2 + by^2 + c = 0$$

siendo $a \neq 0$, $b \neq 0$ y, según que la cónica sea o no degenerada, es $c = 0$ ó $c \neq 0$. Supondremos primeramente $c \neq 0$.

La polar de un punto cualquiera (x_0, y_0) tiene como ecuación [4']

$$ax_0x + by_0y + c = 0. \tag{6}$$

Dada ahora una recta cualquiera de ecuación

$$mx + ny + p = 0 \tag{7}$$

para que (x_0, y_0) sea su polo, es necesario y suficiente que sean proporcionales los coeficientes de [6] y [7], es decir que exista $k \neq 0$, tal que

$$ax_0 = mk \quad ; \quad by_0 = nk \quad ; \quad c = pk.$$

Si $p \neq 0$, quedan determinados unívocamente k, x_0 é y_0, y por consiguiente la recta tiene un polo y uno solo. Si es $p = 0$, tiene que ser forzosamente $k = 0$, y por lo tanto no existe ningún punto que sea polo de la recta. Tenemos por consiguiente el teorema siguiente:

TEOREMA 1. *Con respecto a una cónica con centro, no degenerada, toda recta que no pase por el centro de la cónica tiene un polo y uno solo.* Este teorema se complementa utilizando coordenadas homogéneas.

En coordenadas homogéneas la ecuación de la cónica es

$$ax^2 + by^2 + ct^2 = 0$$

y la de la polar de un punto (x_0, y_0, t_0) es

$$ax_0x + by_0y + ct_0t = 0.$$

Dada ahora una recta que pase por el centro, de ecuación

$$mx + ny = 0$$

para que un punto (x_0, y_0, t_0) sea polo de la recta se debe tener

$$ax_0 = m \quad , \quad by_0 = n \quad , \quad ct_0 = 0 \quad ,$$

y como este sistema tiene siempre solución, siendo por lo menos uno de los dos valores de x_0 ó y_0 no nulos, se deduce que: *toda recta que pasa por el centro tiene un polo impropio y uno solo.*

Si consideramos ahora la recta impropia $t = 0$, para que un punto (x_0, y_0, t_0) sea polo de la recta es necesario y suficiente que sea $x_0 = 0$; $y_0 = 0$; $t_0 \neq 0$; es decir que: *la recta impropia tiene como polo el centro de la cónica.*

Supongamos ahora que sea $c = 0$, es decir que la cónica sea degenerada; la ecuación de la polar de un punto (x_0, y_0) es

$$ax_0x + by_0y = 0$$

que pasa siempre por el centro, luego, *para que una recta tenga polo, ha de pasar por el centro.*

Consideremos entonces una recta de ecuación

$$mx + ny = 0$$

que pase por el centro.

Para que un punto (x_0, y_0) sea polo de esta recta es condición necesaria y suficiente que se tenga, con $k \neq 0$:

$$m = akx_0 \quad ; \quad n = bky_0$$

y eliminando k se tiene como condición necesaria y suficiente

$$anx_0 = bmy_0$$

luego: *todos los puntos de la recta* $anx - bmy = 0$ *son polos de la recta* $mx + ny = 0$.

b) *La cónica es del tipo parábola.* Si no es degenerada, su ecuación puede ponerse en un sistema conveniente de coordenadas en la forma (§ 20-[25])

$$by^2 + 2gx = 0$$

siendo $b \neq 0$ y $g \neq 0$.

La ecuación de la polar del punto (x_0, y_0) es [4']

$$gx + by_0y + gx_0 = 0.$$

Dada ahora una recta de ecuación

$$mx + ny + p = 0$$

su polo se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones en k, x_0 é y_0

$$kg = m \quad ; \quad kby_0 = n \quad ; \quad kgx_0 = p$$

debiendo ser además $k \neq 0$. En estas condiciones el sistema admite una solución y una sola si es $m \neq 0$.

Si $m = 0$, la recta es un diámetro y el sistema no tiene solución; luego:

TEOR. 2. *Con respecto a una parábola no degenerada, cualquier recta que no sea un diámetro tiene un polo y uno solo.*

Consideremos ahora coordenadas homogéneas; la ecuación de la parábola es

$$by^2 + 2gtx = 0$$

y la de la polar de un punto (x_0, y_0, t_0) es

$$gt_0x + by_0y + gx_0t = 0.$$

Consideremos un diámetro de ecuación

$$ny + pt = 0$$

para que $(x_0, y_0 t_0)$ sea polo de este diámetro se debe tener

$$gt_0 = 0 \quad ; \quad by_0 = n \quad ; \quad gx_0 = p$$

sistema que admite siempre una solución siendo $t_0 = 0$ y por lo menos uno de los dos valores x_0 ó y_0 no nulos, luego, *con respecto a una parábola no degenerada, los diámetros tienen un polo impropio.*

Consideremos ahora la recta impropia $t = 0$; para que (x_0, y_0, t_0) sea polo de la recta se debe de cumplir

$$gt_0 = 0 \quad ; \quad by_0 = 0 \quad ; \quad gx_0 = 1$$

sistema que admite solución, siendo nulos y_0 y t_0 y $x_0 \neq 0$, luego: *el polo de la recta impropia es el punto impropio de los diámetros.*

Resumiendo ahora los resultados obtenidos en el caso de cónicas no degeneradas obtenemos el TEOREMA FUNDAMENTAL siguiente:

TEOR. 3. *Con respecto a una cónica no degenerada, todo punto propio o impropio del plano tiene una polar y una sola, propia o impropia, y toda recta propia o impropia del plano tiene un polo, y uno solo, propio o impropio.*

Si la parábola se reduce a dos rectas paralelas distintas su ecuación puede ponerse en la forma (§ 20-6)

$$by^2 + c = 0$$

siendo los dos coeficientes distintos de cero.

La ecuación de la polar de un punto (x_0, y_0) es

$$by_0y + c = 0$$

es decir, *paralela a las dos rectas que componen la cónica*, luego *sólo las rectas paralelas a las que componen la cónica pueden tener polo.*

Sea $y + m = 0$ una de estas rectas; para que (x_0, y_0) sea polo de esta recta se debe cumplir $by_0 = k$; $c = mk$, y eliminando k, $bmy_0 = c$; luego, si $m \neq 0$, *todos los puntos de la recta de ecuación* $y = c/bm$ *son polos de la recta* $y + m = 0$. Si $m = 0$, el sistema no tiene solución, es decir, *la línea de los centros no tiene polo.*

Tomando coordenadas homogéneas la ecuación es

$$by^2 + ct^2 = 0$$

y la de la polar de un punto (x_0, y_0, t_0) es

$$by_0y + ct_0t = 0.$$

De aquí se ve que la línea de los centros cuya ecuación es $y = 0$, tiene como polos los puntos de la recta impropia y que la recta impropia tiene como polos los puntos de la línea de los centros.

Finalmente, si la cónica se reduce a una recta doble, esta recta es la polar de cualquier punto del plano, y por consiguiente es la única recta que tiene polos, siéndolo cualquier punto del plano.

En la práctica para determinar el polo de una recta no hay necesidad de realizar el cambio de coordenadas. Si la ecuación de la recta es

$$mx + ny + p = 0$$

la condición para que un punto (x_0, y_0) sea el polo de la recta es que los coeficientes de la ecuación de ésta, sean proporcionales a los de la recta [4′], es decir que basta resolver el sistema

$$\begin{aligned} ax_0 + hy_0 + g &= km \\ hx_0 + by_0 + f &= kn \\ gx_0 + fy_0 + c &= kp \end{aligned}$$

cuyas incógnitas son k, x_0 é y_0, con la condición de ser $k \neq 0$.

Ejemplo: Sea la cónica de ecuación

$$2xy + 3x - y + 1 = 0$$

y vamos a determinar el polo de la recta de ecuación

$$5x + y + 4 = 0.$$

Para ello planteamos el sistema

$$y_0 + \frac{3}{2} = 5k$$

$$x_0 - \frac{1}{2} = k$$

$$\frac{3}{2} x_0 - \frac{1}{2} y_0 + 1 = 4k$$

y resolviéndolo se ve que tiene las soluciones $x_0 = 1$; $y_0 = 1$; $k = \frac{1}{2}$; luego el polo de la recta es el punto (1, 1).

Consideremos ahora la recta de ecuación

$$x - y - 2 = 0$$

el sistema a resolver es el

$$y_0 + \frac{3}{2} = k$$

$$x_0 - \frac{1}{2} = - k$$

$$\frac{3}{2} x_0 - \frac{1}{2} y_0 + 1 = - 2k$$

del que eliminando k se deduce

$$x_0 + y_0 + 1 = 0$$

$$\frac{3}{2} x_0 + \frac{3}{2} y_0 + 4 = 0$$

sistema que evidentemente no tiene solución.

Ello es debido a que la recta pasa por el centro de la cónica, que es (§ 20-[4], Ej. 2º) el punto $\left(\frac{1}{2}, \ -\frac{3}{2}\right)$.

Si tomamos coordenadas homogéneas tenemos el sistema

$$y_0 + \frac{3}{2} t_0 = 1$$

$$x_0 - \frac{1}{2} t_0 = - 1$$

$$\frac{3}{2} x_0 - \frac{1}{2} y_0 + t_0 = -2$$

que admite como solución $x_0 = -1$, $y_0 = 1$, $t_0 = 0$, luego el polo de la recta es el punto impropio (—1, 1, 0).

3. **Propiedades de los polos y polares.** — TEOR. 4. *Si la polar de un punto* M_0 *pasa por el punto* M_1, *la polar del* M_1 *pasa por el punto* M_0.

DEF. 3. Los puntos M_0 y M_1 tales que cada uno de ellos está en la polar del otro, se dice que son *conjugados respecto de la cónica.*

Vamos a demostrar el teorema: La ecuación de la polar de M_0 es [4']. Como por hipótesis el punto M_1 está en la polar, se tiene

$$(ax_0 + hy_0 + g)x_1 + (hx_0 + by_0 + f)y_1 + (gx_0 + fy_0 + c) = 0$$

pero esta relación indica, teniendo en cuenta la forma [4''] de la ecuación de la polar, que M_0 pertenece a la polar de M_1, como queríamos probar.

De aquí se deduce que cuando un punto P recorre una recta p, su polar describe el haz de rectas de vértice el polo de p, y recíprocamente cuando una recta recorre un haz, su polo describe la polar del vértice del haz.

Otra consecuencia inmediata del teorema 4 es

TEOR. 5. *La polar de un punto* P *respecto de una cónica, pasa por los puntos de contacto de las tangentes a la cónica que pasan por* P.

En efecto, basta ver que si T es el punto de contacto de la tangente, la polar de T es la misma tangente que pasa por P, luego la polar de P pasa por T.

DEF. 4. Un triángulo ABC se dice *autopolar* respecto de una cónica no degenerada si cada lado es la polar del vértice opuesto.

Es claro que la condición de que la cónica no sea degenerada es necesaria, puesto que las polares respecto de una cónica degenerada pasan todas por un mismo punto (el centro) o son paralelas (si la cónica es una parábola).

Para construir un triángulo autopolar basta tomar un punto arbitrario A y otro punto B cualquiera, pero sobre la polar de A. El tercer vértice C está sobre la intersección de las polares de A y de B.

DEF. 5. Dos rectas se dicen *conjugadas respecto de una cónica cuando cada una de ellas contiene el polo de la otra.*

Dadas dos rectas para ver si son conjugadas se determina el polo de una de ellas y se ve si sus coordenadas satisfacen a la ecuación de la otra recta.

Utilizando coordenadas homogéneas puede darse una forma elegante a la condición para que dos rectas sean conjugadas. Sean

$$mx + ny + pt = 0 \quad ; \quad qx + ry + st = 0$$

las ecuaciones de las dos rectas; para que el polo de la primera esté so-

bre la segunda es condición necesaria y suficiente que sea compatible el sistema de ecuaciones homogéneas en x_0, y_0, t_0 y k.

$$\begin{aligned} ax_0 + hy_0 + gt_0 + mk &= 0 \\ hx_0 + by_0 + ft_0 + nk &= 0 \\ gx_0 + fy_0 + ct_0 + pk &= 0 \\ qx_0 + ry_0 + st_0 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

es decir que se tenga

$$\begin{vmatrix} a & h & g & m \\ h & b & f & n \\ g & f & c & p \\ q & r & s & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si una recta es tangente a la cónica, es conjugada de sí misma. Aplicando la condición anterior para que dos rectas sean conjugadas obtenemos como *condición de tangencia de la recta* $mx + ny + pt = 0$ *a la cónica.*

$$\begin{vmatrix} a & h & g & m \\ h & b & f & n \\ g & f & c & p \\ m & n & p & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4. **Construcción de la polar de un punto.** — Supuesta dibujada una cónica, vamos a ver cómo se puede construir con el sólo uso de la regla, la polar de un punto cualquiera P (fig. 64).

Tracemos por P las secantes arbitrarias PA_1A y PB_1B que cortan a la cónica en los puntos A_1 y A, y B_1 y B respectivamente. Sea Q el punto de intersección de las rectas AB y A_1B_1, y R el de las rectas A_1B y AB_1. La polar de P es la recta QR.

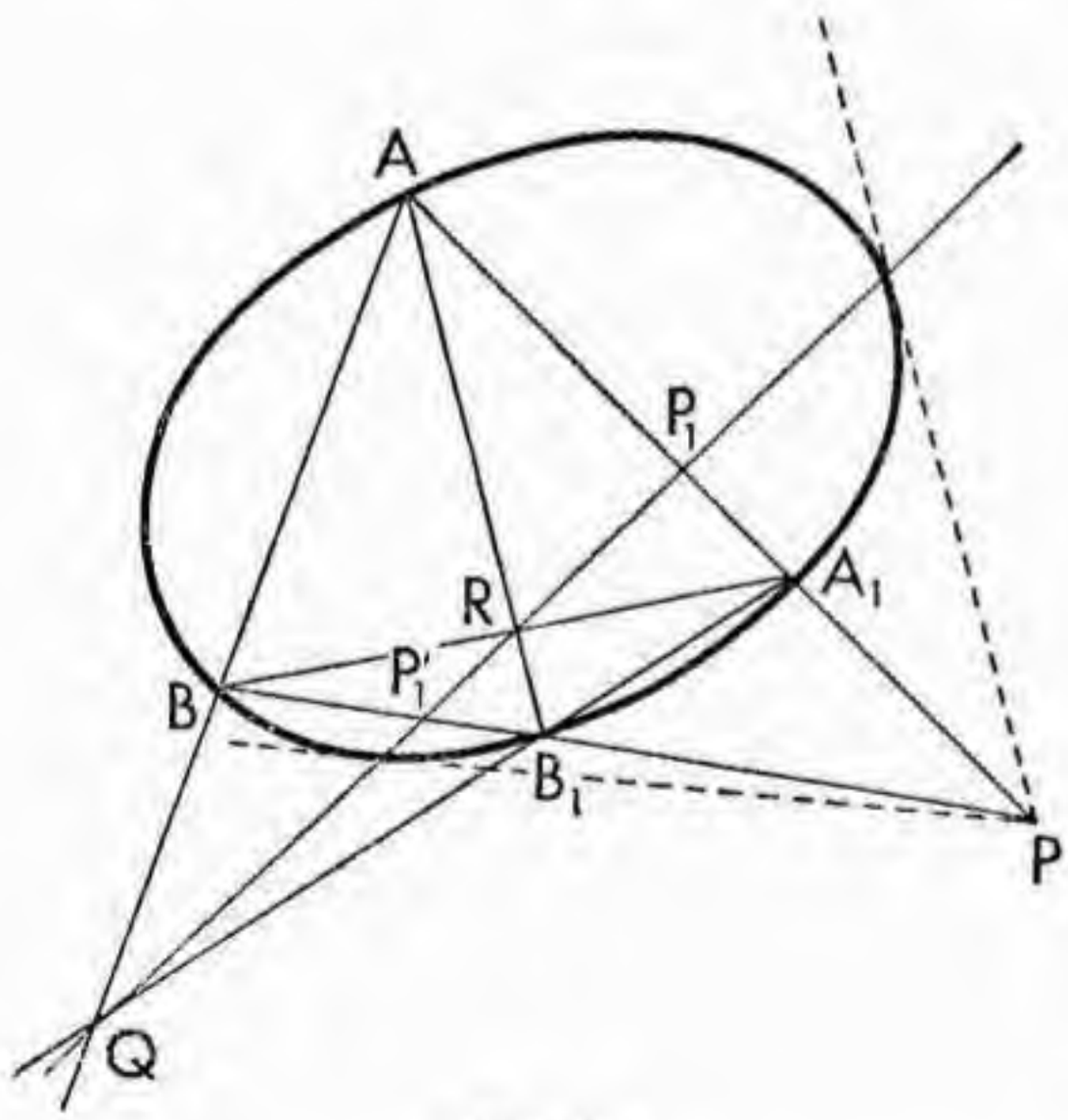

Fig. 64.

En efecto: sean P_1 y P'_1 los conjugados armónicos de P respecto de los puntos A_1 y A y a los B_1 y B respectivamente. La polar de P, respecto de la cónica dada, es $P_1P'_1$, pero dicha recta es también la polar de P respecto de la cónica formada por las dos rectas RA y RA_1 y también respecto de la cónica formada por las rectas QA y QA_1; como la polar de un punto respecto de una cónica formada por dos rectas pasa por el punto de intersección, se ve que la polar pasa por los puntos Q y R, como queríamos probar.

Determinada la polar, si se unen los puntos en que corta a la cónica con P, se obtienen las tangentes a la cónica que

pasan por P. *Tenemos así un método para construir las tangentes desde un punto a una cónica con el sólo empleo de la regla.*

§ 22. Determinación y construcción de cónicas

1. **Condiciones que determinan una cónica.** — La ecuación general de las cónicas

$$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

tiene seis coeficientes; como se pueden dividir todos ellos por una constante distinta de cero, no contiene más que cinco parámetros arbitrarios. Por lo tanto, para determinar una cónica será necesario dar relaciones que liguen los cinco parámetros, de forma que éstos queden determinados. Habrá que dar cinco ecuaciones con las seis incógnitas a, h, b, f, g, c, de las cuales una de ellas puede tomar un valor arbitrario distinto de cero [1].

Cuando las cinco ecuaciones sean de primer grado, el sistema admitirá, en general, una sola solución (o ninguna si es incompatible, o infinitas si es indeterminado), pero cuando algunas de las ecuaciones sean de un grado superior al primero, el sistema puede admitir un número finito de soluciones distintas.

Las ecuaciones se obtienen, naturalmente, expresando en forma analítica las condiciones geométricas impuestas a la cónica. Así, por ejemplo: la condición de que la cónica pase por el punto (x_0, y_0) se expresa mediante la ecuación

$$ax^2_0 + 2hx_0y_0 + by^2_0 + 2 \qquad + 2fy_0 + c = 0.$$

La condición de que una recta sea tangente a una cónica se obtiene reemplazando en la ecuación de la cónica una de las variables por su valor en función de la otra, deducido de la ecuación de la recta y expresando que la ecuación así obtenida tiene una raíz doble

La condición de que un punto (x_0, y_0) sea centro de la cónica se expresa (§ 20-[16]), mediante dos ecuaciones

$$ax_0 + hy_0 + g = 0$$
$$hx_0 + by_0 + f = 0.$$

La condición de que una recta de ecuación $mx + ny + p = 0$, sea tangente a la cónica en un punto (x_0, y_0) de la recta, se expresa poniendo que los coeficientes de x é y en la ecuación

[1] Este valor arbitrario no se puede dar sin estar seguro de que ese coeficiente no va a tomar el valor de cero. En general se puede hacer al ir eliminando incógnitas, como se verá en los ejemplos.

de la recta dada y en la ecuación general de la tangente a la cónica en (x_0, y_0) sean proporcionales, es decir

$$\frac{m}{ax_0 + hy_0 + g} = \frac{n}{hx_0 + by_0 + f},$$

y además expresando que el punto (x_0, y_0) está en la cónica.

La condición de ser una parábola se traduce por la ecuación $h^2 - ab = 0$, y la de ser circunferencia por las condiciones $a = b \neq 0$ y $h = 0$ (en coordenadas rectangulares).

Vemos así que una condición geométrica puede equivaler a una o a varias condiciones analíticas. Se dice que una condición geométrica equivale a p condiciones analíticas si ella se traduce por un sistema de p ecuaciones entre los coeficientes de la cónica.

Entre las condiciones para determinar una cónica, la más corriente es la de dar lo que se denominan elementos *notables* de la cónica, es decir, un elemento que está determinado, cuando lo está la cónica; por ejemplo el centro, los focos, los vértices..., entre los puntos; las asíntotas, los ejes, las directrices..., entre las rectas, los círculos principales, etc.

Un elemento notable equivale al número de condiciones analíticas necesarias y suficientes que sirven para determinarlo, dos para un punto o una recta, tres para un círculo, etc. Cuando nos dan dos o más elementos notables, el número de condiciones que ello implique, será igual o menor que la suma de condiciones de los elementos; es claro que no puede ser mayor, pero puede muy bien ser menor, ya que la determinación de un elemento notable puede disminuir la indeterminación del otro. Así por ejemplo, dar un eje y el centro equivale a tres condiciones (dos para determinar el eje y una para determinar el centro sobre el eje); dar los dos ejes equivale a tres condiciones por estar obligados a ser perpendiculares; los dos focos equivalen a cuatro condiciones, pero si nos dan los dos focos y el centro seguimos con cuatro condiciones, ya que los dos focos determinan el centro.

2. **Determinación de cónicas en casos concretos.** — Para aclarar las ideas que acabamos de expresar vamos a dar una serie de casos concretos de determinación de cónicas.

1º Determinar la ecuación de la cónica que pasa por los puntos $(0, 0)$; $(0, 1)$; $(1, 0)$; $(1, 1)$ y $(-1, -2)$.

La condición de pasar por el origen nos indica que debe ser $c = 0$.

Las otras cuatro condiciones se expresan mediante las ecuaciones

$$b + 2f = 0$$
$$a + 2g = 0$$
$$a + 2h + b + 2f + 2g = 0$$
$$a + 4h + 4b - 2g - 4f = 0$$

reemplazando en las dos últimas f y g por los valores obtenidos en las dos primeras se obtiene $h = 0$ y la ecuación

$$2a + 6b = 0.$$

Demos a a un valor arbitrario, por ejemplo $a = 3$, y la solución del sistema es la siguiente

$$a = 3; \quad b = -1; \quad h = 0; \quad 2f = 1; \quad 2g = -3; \quad c = 0$$

luego la cónica buscada tiene como ecuación

$$3x^2 - y^2 - 3x + y = 0.$$

Puede comprobarse fácilmente que ésta es la solución, reemplazando en la ecuación x é y por las coordenadas de los puntos que nos han dado.

2º Determinar la ecuación de la cónica que pasa por los puntos $(0, 1)$; $(0, 2)$; $(0, 3)$; $(0, 4)$ y $(1, 1)$.

Las cinco ecuaciones que obtenemos son:

$$b + 2f + c = 0$$
$$4b + 4f + c = 0$$
$$9b + 6f + c = 0$$
$$16b + 8f + c = 0$$
$$a + 2h + b + 2g + 2f + c = 0$$

las cuatro primeras nos dan las soluciones $b = 0$; $f = 0$; $c = 0$, y la última toma la forma

$$a + 2h + 2g = 0$$

lo que nos indica que hay indeterminación, pues se puede dar valores arbitrarios a dos coeficientes en vez de a uno solo. Poniendo $a = -2(h + g)$, la ecuación de la cónica que buscamos es

$$-2(h + g)x^2 + 2hxy + 2gx = 0$$

o lo que es lo mismo,

$$x[h(y - x) + g(1 - x)]$$

es decir, que la cónica se compone de la recta $x = 0$ y de la $h(y - x) + g(1 - x) = 0$ que representa una recta cualquiera que pasa por el punto $(1, 1)$.

Este resultado podía preverse desde un principio, ya que la cónica pedida teniendo más de dos puntos comunes con el eje OX, tenía que contenerlo, y como la única condición que faltaba era la de pasar por el punto $(1, 1)$, era claro que la cónica debía de componerse de una recta cualquiera que pase por ese punto y del eje OX.

Si en el enunciado del problema cambiamos el punto (1, 1) por otro punto del eje OX, por ejemplo el (0, —1), las cinco ecuaciones nos dan únicamente los valores $b = f = c = 0$, quedando los otros indeterminados. La ecuación de la cónica es por lo tanto

$$ax^2 + 2hxy + g = 0 \quad \text{ó} \quad x(ax + 2hy + g) = 0$$

es decir que la cónica se compone del eje OX y de una recta cualquiera del plano, resultado que, como en el caso anterior, podía preverse desde un principio.

3º Determinar la parábola tangente a la recta $x + 4y + 1 = 0$, en el punto (—1, 0), y a la recta $x - 3y + 2 = 0$, en el punto (—2, 0).

Las ecuaciones son:

$$h^2 - ab = 0$$
$$a - 2g + c = 0$$
$$\frac{-a+g}{1} = \frac{-h+f}{4} \quad \text{ó} \quad -4a + 4g + h - f = 0$$
$$\frac{-2a+g}{1} = \frac{-2h+f}{-3} \quad \text{ó} \quad 6a - 3g + 2h - f = 0$$
$$4a - 4g + c = 0 \quad ,$$

eliminando c y f se obtiene el sistema

$$h^2 - ab = 0$$
$$3a - 2g = 0$$
$$10a - 7g + h = 0.$$

Demos ahora a g el valor 3, la solución del sistema es

$$g = 3; \quad a = 2; \quad h = 1; \quad b = \tfrac{1}{2}; \quad c = 4; \quad f = 5$$

y por lo tanto la ecuación de la parábola es

$$2x^2 + 2xy + \frac{y^2}{2} + 6x + 10y + 4 = 0.$$

4º Determinar una hipérbola sabiendo que sus asíntotas son las rectas de ecuaciones

$$x = \frac{1}{2} \quad ; \quad y = -\frac{3}{2}$$

y que pasa por el punto (1, —4).

Si tomamos como ejes las asíntotas, es decir, hacemos el cambio de coordenadas

$$x' = x - \frac{2}{1} \quad ; \quad y' = y + \frac{3}{2} \quad ;$$

la ecuación de la hipérbola es del tipo $x'y' = k$, y como ella pasa por el punto

$$x'_0 = 1 - \frac{2}{1} = \frac{2}{1} \quad ; \quad y'_0 = -4 + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} \; ;$$

se tiene

$$k = -\frac{5}{4}$$

es decir que la ecuación de la hipérbola es

$$x'y' = -\frac{5}{2}.$$

Volviendo ahora al sistema dado de coordenadas se tiene como ecuación

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{4}$$

ó

$$xy + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} = 0$$

que es la solución del problema.

El método empleado en este caso de buscar un sistema distinto de coordenadas para dar una forma más simple a las relaciones que debe cumplir la cónica, es de gran aplicación.

Vamos a ver, a título de aclaración, cómo se podría resolver este problema sin utilizar el cambio de coordenadas. La condición de la recta $x = \frac{1}{2}$ de ser asíntota, indica que no tiene ningún punto real o imaginario propio común con la cónica, luego reemplazando x por $\frac{1}{2}$ en la ecuación de la cónica, tenemos que la ecuación en y

$$\frac{a}{4} + hy + by^2 + g + 2fy + c = 0,$$

no debe tener ninguna raíz real ni imaginaria, es decir que deben ser nulos los coeficientes de y^2 y de y; se tienen pues, las ecuaciones

$$b = 0 \quad ; \quad 2f + h = 0.$$

Un razonamiento análogo para la otra asíntota nos daría las ecuaciones

$$a = 0 \quad ; \quad 2g - 3h = 0$$

y expresando que pasa por el punto $(1, -4)$

$$a - 8h + 16b + 2g - 8f + c = 0.$$

Dando a h el valor 1 se obtiene como solución del sistema

$$a = 0; \quad b = 0; \quad h = 1; \quad 2f = -1; \quad 2g = 3; \quad c = 1$$

y por lo tanto como ecuación de la cónica

$$2xy + 3x - y + 1 = 0.$$

5º Determinar una cónica sabiendo que su centro es el punto (3, 2) y que pasa por los puntos (4, 2) y (2, 1) admitiendo como tangente en este punto la recta de ecuación $y = 1$.

Llevemos el origen al centro; se tienen las fórmulas de cambio de coordenadas

$$x' = x - 3 \quad ; \quad y' = y - 2.$$

La ecuación de la cónica en el nuevo sistema es (§ 20-5):

$$ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + c' = 0:$$

las relaciones de pasar por esos dos puntos y de tangencia a la recta nos dan las tres ecuaciones

$$a + c' = 0$$
$$a + 2h + b + c' = 0$$
$$-a - h = 0.$$

Dando a a el valor 1 se obtiene como solución del sistema

$$a = 1; \quad h = -1; \quad c' = -1: \quad b = 2$$

la ecuación de la cónica es por consiguiente:

$$x'^2 - 2x'y' + 2y'^2 - 1 = 0$$

y volviendo al sistema dado de coordenadas

$$(x-3)^2 - 2(x-3)(y-2) + 2(y-2)^2 - 1 = 0$$

ó

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 4 = 0,$$

que es la solución del problema.

NOTA: Supongamos que en vez de darnos el punto (4, 2) nos hubieran dado el (4, 3), es decir en el nuevo de sistema de coordenadas el (1, 1). El sistema tomaría la forma

$$a + 2h + b + c' = 0$$
$$a + 2h + b + c' = 0$$
$$-a - h = 0$$

de dos ecuaciones con cuatro incógnitas, lo que permite dar valores arbitrarios a dos coeficientes en vez de a uno. Hay pues, indeterminación; veamos la causa. El punto (4, 3) es simétrico del (2, 1) respecto del centro (3, 2), luego el dato del punto (4, 3) no nos añade ninguna condición, pues va incluída en las de pasar por el punto (2, 1) y en la de ser (3, 2) centro de la cónica. Las cinco condiciones se reducen en realidad a cuatro y por eso hay indeterminación.

6º Determinar una cónica que tiene como foco el origen, la directriz es la recta de ecuación $x + 2y + 2 = 0$ y pasa por

el punto $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \upsilon\right)$

Sabemos que la ecuación general de las cónicas que tienen ese foco y esa directriz es

$$x^2 + y^2 = \lambda(x + 2y + 2)^2$$

y expresando que pasa por el punto dado, se tiene

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2\right)^2 = \lambda\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$\frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \lambda\,\frac{30+10\sqrt{5}}{4} \quad ; \quad \lambda = \frac{1}{5}$$

la ecuación de la cónica es por lo tanto

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{5}(x + 2y + 2)^2$$

ó

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$$

que es la solución del problema.

7º Si quisiéramos determinar una cónica conocidos los dos focos y un punto, tomaríamos un sistema de ejes rectangulares que tuviera como eje OX la línea de los focos y como origen el punto medio del segmento focal. El problema se reduce entonces al de determinar en un sistema de cónicas homofocales con centro (§ 19-5) la que pasa por un punto, problema que vimos (teorema 3 del § 19) tiene, en general, dos soluciones.

3. **Intersección de cónicas.** — El teorema fundamental de la intersección de cónicas es el siguiente:

TEOREMA 1. *Dos cónicas distintas tienen a lo más cuatro puntos comunes, con excepción del caso en que ambas sean degeneradas y tengan una recta común.*

Sean C_1 y C_2 las dos cónicas. Para probar el teorema consideraremos primero el caso de que una de ellas sea degenerada, por ejemplo que la C_1 se componga de dos rectas D_1 y D_2. La recta D_1 corta a la cónica C_2 a lo más en dos puntos, pues si tuviera más de dos puntos pertenecería a la cónica (§ 20-6), y lo mismo sucede con la D_2, lo que prueba el teorema en este caso particular.

Pasemos al caso general. Siempre podemos suponer que las dos cónicas C_1 y C_2 no son degeneradas. Sean sus ecuaciones

[1] $f_1(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

[2] $f_2(x, y) = a'x^2 + 2h'xy + b'y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$

y consideremos la cónica C_λ de ecuación

$$[3] \quad f_1 + \lambda f_2 = (a + \lambda a')x^2 + 2(h + \lambda h')xy + (b + \lambda b')y^2 + \\ + 2(g + \lambda g')x + 2(f + \lambda f')y + c + \lambda c' = 0$$

siendo λ un parámetro variable no nulo. Es inmediato que los puntos comunes a C_1 y C_2 son los mismos que los comunes a C_1 y C_λ; por lo tanto si consiguiésemos determinar λ de forma que C_λ fuese una cónica degenerada, el teorema estaría demostrado.

La condición para que C_λ sea degenerada es que su determinante Δ sea igual a cero, es decir que se tenga

$$[4] \quad \begin{vmatrix} a + \lambda a' & h + \lambda h' & g + \lambda g' \\ h + \lambda h' & b + \lambda b' & f + \lambda f' \\ g + \lambda g' & f + \lambda f' & c + \lambda c' \end{vmatrix} = 0.$$

Ésta es una ecuación de tercer grado, que se denomina la *ecuación en* λ de la cónica; de las propiedades de los determinantes se deduce que el coeficiente de λ^3 en la ecuación es el Δ de la cónica C_2, y el término independiente es el Δ de C_1; luego, como por hipótesis C_1 y C_2 no son degeneradas, la ecuación en λ tiene siempre una raíz real y distinta de cero. Las cónicas C_1 y C_λ tienen a lo más cuatro puntos comunes, puesto que la cónica C_1 no es degenerada. Queda así probado el teorema.

Cuando se consideran elementos impropios, el teorema toma una forma más precisa. Como una recta corta siempre a una cónica en dos puntos distintos o confundidos, reales o imaginarios, propios o impropios, de la demostración anterior surge: *dos cónicas que no tengan una recta común se cortan siempre en cuatros puntos, distintos o confundidos, reales o imaginarios, propios o impropios.*

Así por ejemplo, consideremos las cónicas de ecuaciones $x^2 - y^2 - 1 = 0$ é $y^2 - x^2 - 1 = 0$. La ecuación en λ es

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

que se ve, admite la raíz $\lambda = -1$. La cónica C_λ tiene como ecuación $x^2 - y^2 = 0$, y por lo tanto se compone de las dos rectas $x + y = 0$, $x - y = 0$ que no tienen, ninguna, puntos comunes con las cónicas dadas; en cambio, si consideramos coordenadas homogéneas la recta $x + y = 0$, tiene común con la cónica $x^2 - y^2 - t^2 = 0$ el punto impropio $(1, -1, 0)$, y la recta $x - y = 0$ tiene común con la cónica el punto $(1, 1, 0)$; en ambos casos los puntos son dobles, luego las dos cónicas tienen comunes dos puntos dobles, los $(1, -1, 0)$ y $(1, 1, 0)$.

Consideremos ahora dos cónicas C_1 y C_2 que tengan cuatro puntos comunes únicamente. Consideremos las cónicas de ecuación

$$[5] \quad \lambda f_1(x, y) + \mu f_2(x, y) = 0$$

siendo $f_1(x, y) = 0$ la ecuación de C_1 y $f_2(x, y) = 0$ la de C_2, y λ, μ números reales cualesquiera. Vamos a ver, la ecuación [5] representa *todas las cónicas que pasan por los puntos comunes a las cónicas* C_1 *y* C_2.

Es inmediato que toda cónica de la familia [5] pasa por la intersección de C_1 y C_2.

Recíprocamente supongamos una cónica C que pase por la intersección y sea (x_0, y_0) un punto de C que no pertenezca a la intersección. Siempre se pueden determinar dos valores λ_0 y μ_0 de λ y μ tales que

$$[6] \qquad \lambda_0 f_1(x_0, y_0) + \mu_0 f_2(x_0, y_0) = 0.$$

Llamemos C′ a la cónica de ecuación

$$\lambda_0 f_1(x, y) + \mu_0 f_2(x, y) = 0.$$

Las dos cónicas C y C′ tienen cinco puntos comunes, los cuatro de intersección de C_1 y C_2 y el (x_0, y_0). Por consiguiente, o coinciden o tienen una recta común R.

Veamos que la segunda hipótesis es imposible: en efecto, teniendo común una recta R y no siendo la misma cónica, C y C′ sólo tienen comunes los puntos de R y el de intersección de las otras dos rectas que las componen; luego, de los cuatro puntos comunes a C_1 y C_2, tres por lo menos tienen que estar en R; entonces C_1 y C_2 tienen que tener común R contra la hipótesis.

Consideremos ahora un cuadrilátero ABCD y sean

$$r_1(x, y) = 0; \quad r_2(x, y) = 0; \quad r_3(x, y) = 0; \quad r_4(x, y) = 0$$

las ecuaciones de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente.

Las cónicas C y C′ de ecuaciones

$$r_1(x, y) \,.\, r_3(x, y) = 0 \quad ; \quad r_2(x, y) \,.\, r_4(x, y) = 0$$

tienen únicamente comunes los cuatro puntos A, B, C y D; luego, en virtud de lo que acabamos de decir, la ecuación de las cónicas que pasan por esos cuatro puntos, es decir *la ecuación de las cónicas circunscritas al cuadrilátero*, es

$$[7] \qquad \lambda r_1 r_3 + \mu r_2 r_4 = 0.$$

4. **Cónica que pasa por cinco puntos.** — Vamos a hacer un estudio del problema de la determinación de una cónica por cinco puntos. El teorema fundamental es el siguiente:

TEOR. 2. *Por cinco puntos, de los cuales cuatro no están en línea recta, pasa siempre una cónica y una sola.*

En efecto, sean A, B, C, D, E los cinco puntos; no habiendo cuatro en línea recta, siempre se pueden determinar cuatro de ellos que formen un cuadrilátero; supongamos que sean los A, B, C y D. La ecuación general de las cónicas circunscritas al cuadrilátero es [7] y siempre se pueden determinar λ y μ de modo que la cónica pase por E. Tenemos así una cónica que pasa por los cinco puntos y esta cónica es única, pues si hubiese otra, ambas tendrían una recta común y

entonces sólo podrían tener común fuera de esa recta, otro punto, el de intersección de las otras dos rectas que las forman, lo que está en contradicción con la hipótesis.

En la práctica, en lugar de utilizar la forma [7] que sólo determina λ y μ, salvo un factor de proporcionalidad, es preferible utilizar la forma

$$[8] \qquad r_1 \cdot r_3 + \lambda r_2 r_4 = 0$$

que determina unívocamente λ; el único caso en que λ no queda determinado, es cuando las coordenadas del quinto punto anulan a $r_2 \cdot r_4$, pero entonces, es claro que $r_2(x, y) \cdot r_4(x, y) = 0$, es la ecuación de la cónica que pasa por los cinco puntos.

Si cuatro de los cinco puntos estuviesen en línea recta, la cónica se compone, como ya lo indicamos en el ejemplo 2º de 2, de dicha recta y de otra cualquiera que pase por el quinto punto, y si los cinco puntos están alineados la cónica se compone de dicha recta y de otra cualquiera del plano.

En la práctica, el método de formar la ecuación general de las cónicas inscriptas en el cuadrilátero y determinar después la que pasa por el quinto punto es, en general, el que conduce más fácilmente a la ecuación.

EJEMPLOS: 1. Tomemos la cónica del caso 1º de 2. Los cinco puntos son A(0, 0), B(0, 1), C(1, 0), D(1 1), E(—1, —2). Las ecuaciones de AB, CD, AC y BD son respectivamente

$$x = 0 \quad ; \quad x = 1 \quad ; \quad y = 0 \quad ; \quad y = 1.$$

La ecuación de las cónicas circunscritas al cuadrilátero ABCD es

$$x(x-1) + \lambda(y-1)y = 0.$$

Determinando λ para que pase por (—1, —2), tenemos

$$2 + 6\lambda = 0 \quad ; \quad \lambda = -1/3$$

y la ecuación de la cónica es

$$x^2 - x - \frac{y^2}{3} + \frac{y}{3} = 0 \quad \text{ó} \quad 3x^2 - y^2 - 3x + y = 0.$$

2. Consideremos ahora un caso de tipo más general que el anterior, en el que la existencia de coordenadas nulas simplificaba los cálculos. Sean los cinco puntos

A(1, 2); B(—3, 1); C(—2, —1); D(4, —3); E(5, —6).

Las ecuaciones de las rectas AB, CD, AC y BD son, respectivamente,

$$\frac{x-1}{4} = y - 2 \quad \text{ó} \quad x - 4y + 7 = 0$$

$$\frac{x+2}{-6} = \frac{y+1}{2} \quad \text{ó} \quad 2x + 6y + 10 = 0$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{3} \quad \text{ó} \quad x - y + 1 = 0$$

$$\frac{x+3}{-7} = \frac{y-1}{4} \quad \text{ó} \quad 4x + 7y + 5 = 0.$$

La ecuación de las cónicas circunscritas al cuadrilátero ABCD es

$$(x - 4y + 7)(2x + 6y + 10) + \lambda(x - y + 1)(4x + 7y + 5) = 0$$

y haciendo $x = 5$, $y = -6$, se tiene

$$-576 - 204\lambda = 0 \quad ; \quad \lambda = -\frac{576}{204} = -\frac{48}{17}$$

y la ecuación de la cónica es

$$17(x - 4y + 7)(2x + 6y + 10) - 48(x - y + 1)(4x + 7y + 5) = 0$$

ó

$$79x^2 + 89xy + 36y^2 + 12x + 31y - 475 = 0.$$

Otra forma de la ecuación de la cónica que pasa por los cinco puntos $M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$; $M_3(x_3, y_3)$; $M_4(x_4, y_4)$; $M_5(x_5, y_5)$ es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x^2_1 & x_1y_1 & y^2_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x^2_2 & x_2y_2 & y^2_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x^2_3 & x_3y_3 & y^2_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x^2_4 & x_4y_4 & y^2_4 & x_4 & y_4 & 1 \\ x^2_5 & x_5y_5 & y^2_5 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Se ve, en efecto, que esta ecuación es la de una cónica; al poner en vez de x, y las cordenadas de uno cualquiera de los puntos se satisface la ecuación por tener, el determinante, dos filas iguales, luego la cónica pasa por los cinco puntos.

Para completar este razonamiento sería necesario probar que si cuatro de los puntos no están en una línea recta, no se anulan los coeficientes de los términos de segundo grado, pero no haremos este estudio que no presenta interés especial, dado el poco valor práctico de esta forma de la ecuación, que exige el desarrollo de seis determinantes numéricos de orden cinco.

5. Construcción de cónicas. — Nos limitaremos a dar las que se apoyan en los teoremas de Pascal y Brianchon.

TEOR. 3. (Teor. de Pascal): *Sea* (fig. 65) $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ *un exágono inscripto en una cónica y sean* P, Q *y* R *los puntos de intersección de los lados* M_1M_2 *y* M_4M_5, M_2M_3 *y* M_5M_6, M_3M_4 *y* M_6M_1, *respectivamente. Los tres puntos* P, Q *y* R *se encuentran en una misma recta.* Esta *recta se denomina la recta de Pascal.*

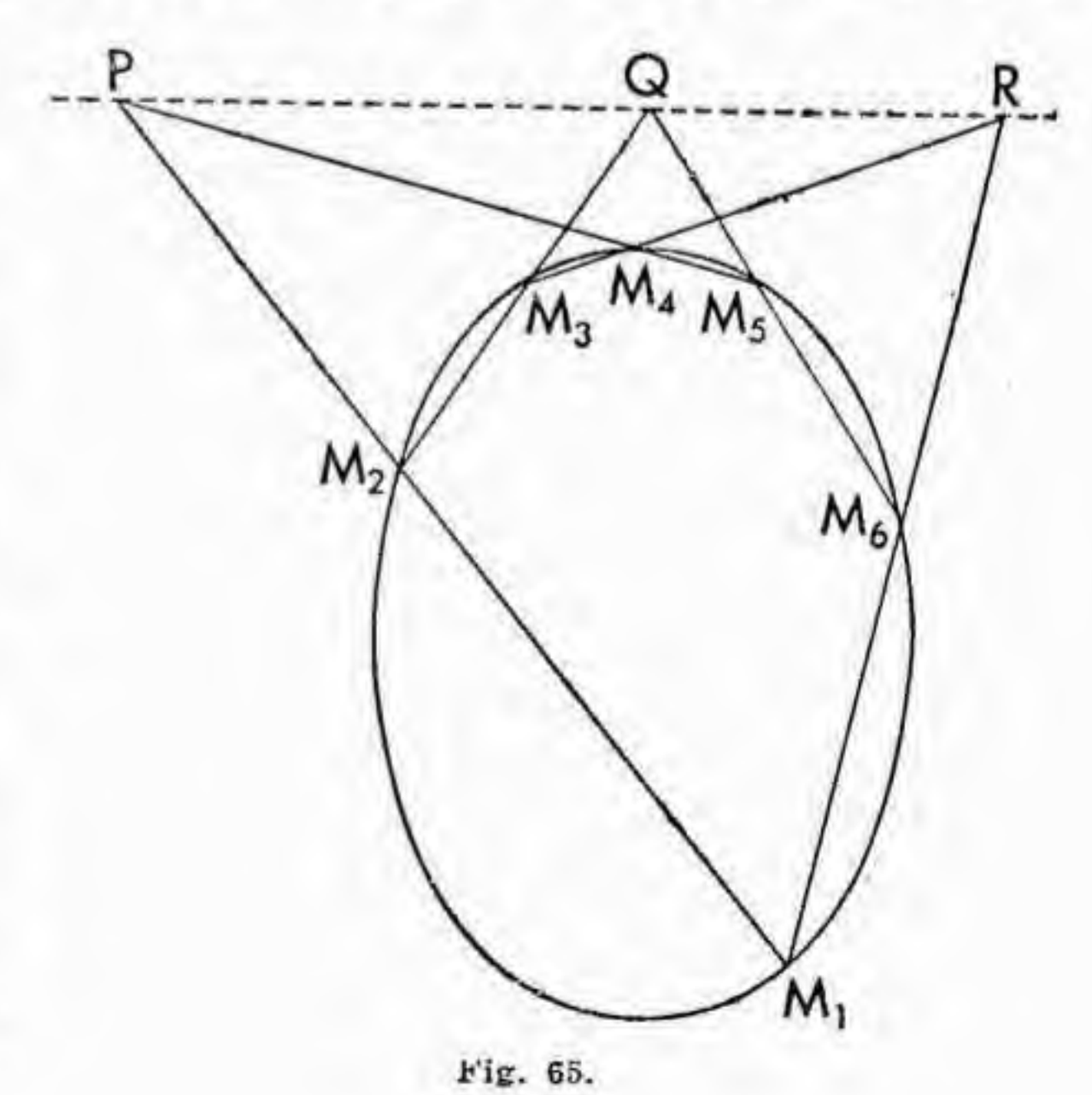

Fig. 65.

En efecto, la cónica, siendo circunscrita al cuadrilátero $M_1M_2M_3M_4$, tiene una ecuación de la forma

[10] $$\lambda_0 r_1 r_3 = - \mu_0 r r_2$$

siendo $r_1(x, y) = 0$; $r_2(x, y) = 0$ y $r_3(x, y) = 0$ las ecuaciones de las rectas M_1M_2, M_2M_3 y M_3M_4 respectivamente, y $r(x, y) = 0$ la ecuación de la recta M_1M_4.

La cónica es igualmente circunscrita al cuadrilátero $M_1M_4M_5M_6$, y por lo tanto su ecuación tiene también la forma

[11] $$\mu_1 r r_5 = - \lambda_1 r_4 r_6$$

siendo $r_4(x,y) = 0$; $r_5(x, y) = 0$; $r_6(x, y) = 0$ las ecuaciones de las rectas M_4M_5, M_5M_6 y M_6M_1, respectivamente.

Multiplicando miembro a miembro [10] y [11]

$$\lambda_0 \mu_1 r r_1 r_3 r_5 = - \mu_0 \lambda_1 r r_2 r_4 r_6$$

que se satisface para todos los puntos de la cónica; también se seguirá satisfaciendo si dividimos por el factor común r; es decir que la cúbica (curva de tercer grado) de ecuación

$$\lambda_0 \mu_1 r_1 r_3 r_5 + \mu_0 \lambda_1 r_2 r_4 r_6 = 0$$

contiene a la cónica. En consecuencia (ver por ejemplo § 26, nº 2), la cúbica se descompone en la cónica y en una recta; ahora bien, los puntos P (que está en las rectas r_1 y r_4), Q (que está en las rectas r_2 y r_5) y R (que está en las rectas r_3 y r_6) están en la cúbica, y como no están en la cónica, tienen que estar en la recta; esta recta es, pues, la recta de Pascal y el teorema está demostrado.

Este teorema se aplica para la construcción de una cónica

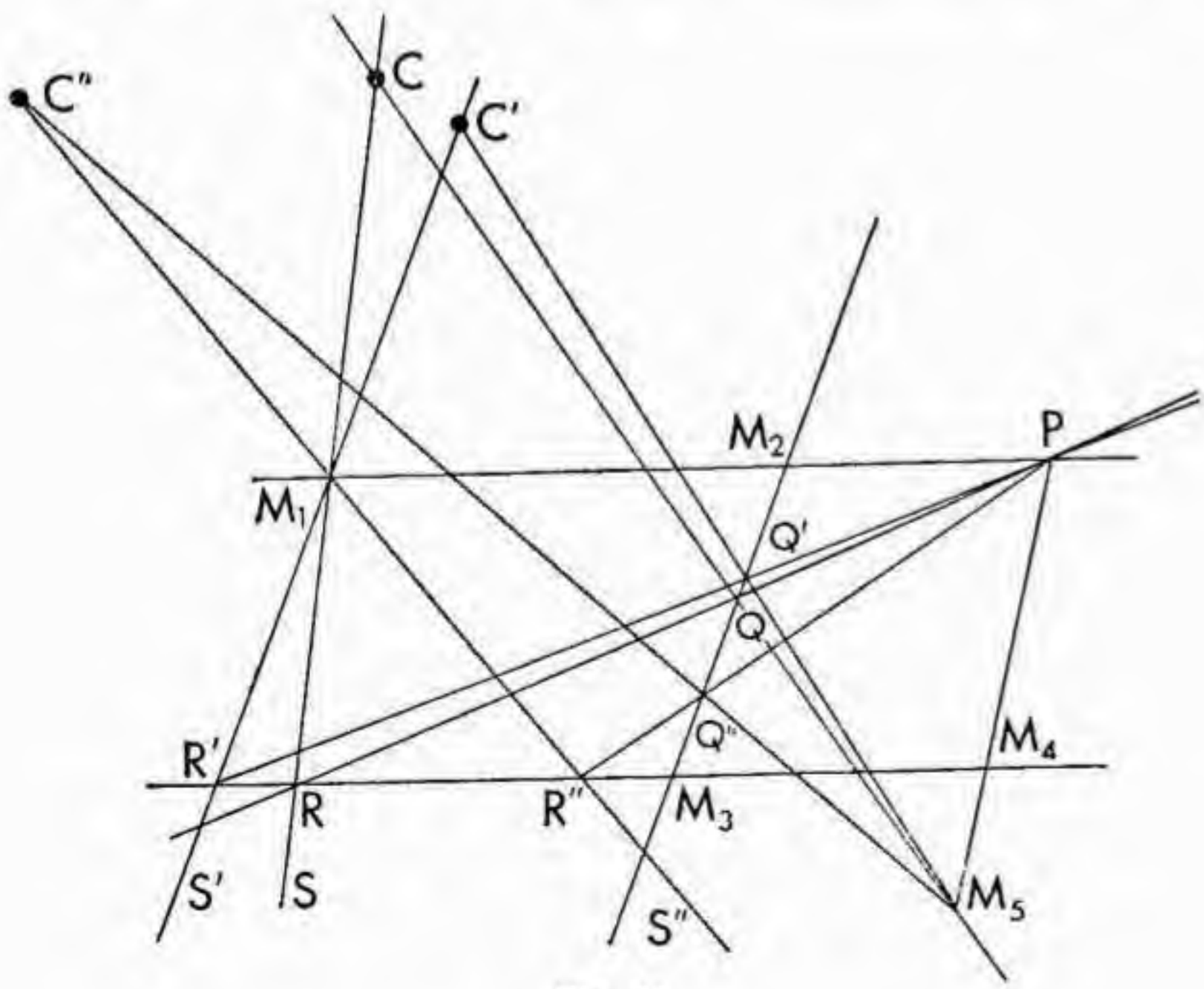

Fig. 66.

por puntos cuando se conocen cinco puntos de la cónica, con el solo empleo de la recta. Veamos cómo se procede:

Sean M_1, M_2, M_3, M_4 y M_5 los cinco puntos dados de la cónica (fig. 66), y vamos a determinar puntos de ésta en las rectas que pasan por M_1. Sea M_1S una recta cualquiera que pasa por M_1; P el punto de intersección de M_1M_2 y M_4M_5 y R el punto de intersección de M_3M_4 con M_1S.

La recta de Pascal del exágono cuyos vértices son M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 y el punto (desconocido) de la cónica situado sobre M_1S es la recta PR; sea Q el punto en que PR corta a M_2M_3; Q debe estar en la recta que une M_5 con el punto desconocido de la cónica; luego, trazando la recta M_5Q, el punto C en que corta a la M_1S será un punto de la cónica. Variando la secante M_1S obtendremos nuevos puntos de la cónica C′, C″, . . .

Vamos a dar ahora un teorema dual del de Pascal:

TEOR. 4. (Teorema de Brianchon): *Sea* (fig. 67) *el exágono circunscrito a la cónica* $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$. *Las rectas* M_1M_4, M_2M_5 *y* M_3M_6 *se cortan en un mismo punto* B. Este punto se denomina *punto de Brianchon.*

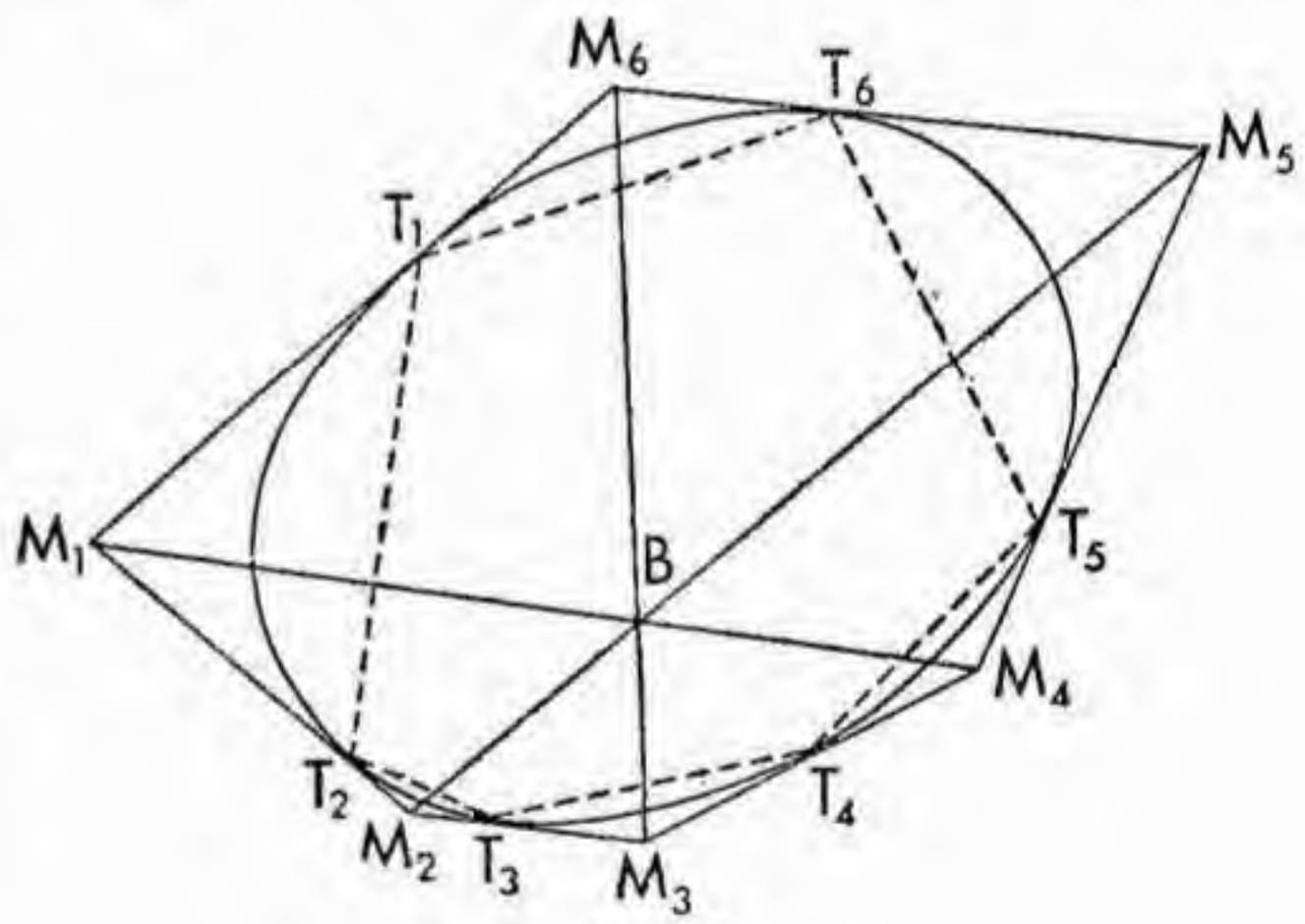

Fig. 67.

Consideremos el exágono $T_1T_2T_3T_4T_5T_6$ inscripto en la cónica cuyos vértices son los puntos de contacto con la cónica de los lados del exágono circunscrito.

Sea P[1] el punto de intersección de T_1T_2 con T_4T_5; como T_1T_2 es la polar de M_1 (§ 21, teorema 5) y T_4T_5 es la polar de M_4, entonces (§ 21, teorema 4) P es el polo de M_1M_4.

De una manera análoga se ve que los puntos Q, intersección de T_2T_3 con T_5T_6, y R, intersección de T_3T_4 con T_6T_1, son los polos de M_2M_5 y de M_3M_6, respectivamente.

Por el teorema de Pascal los tres puntos P, Q y R están en una recta, sea B el polo de esta recta; por él pasan las polares de P, Q y R, es decir las rectas M_1M_4, M_2M_5 y M_3M_6; luego, el teorema está probado.

Como en el caso del teorema de Pascal, el teorema de Brian-

[1] Los puntos P, Q y R no están señalados en la figura.

chon se usa para determinar tangentes a una cónica cuando se conocen cinco tangentes a la misma. Sean, en efecto (fig. 68), t_1, t_2, t_3, t_4 y t_5 las cinco tangentes; M_2, M_3, M_4 y M_5 los puntos de intersección de t_1 y t_2, t_2 y t_3, t_3 y t_4 y t_4 y t_5; vamos a determinar tangentes que pasen por puntos de t_1.

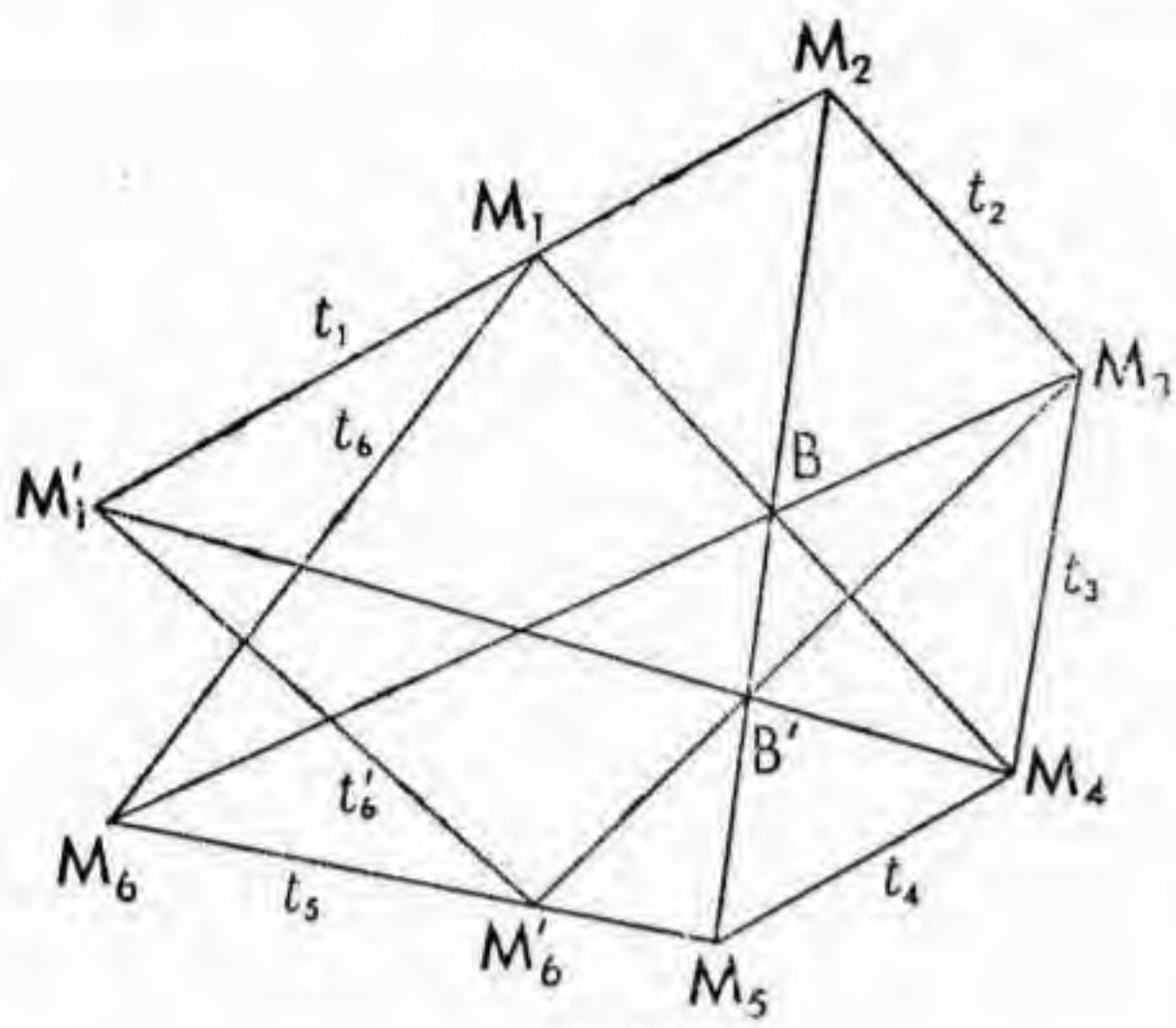

Fig. 68.

Sea M_1 un punto de t_1; el punto de Brianchon del exágono formado por las cinco tangentes dadas y la que buscamos es el punto B, intersección de M_1M_4 con M_2M_5; luego, uniendo M_3 con B y determinando la intersección de esta recta con t_5 obtenemos el punto M_6; la recta M_1M_6 es la tangente buscada. Variando el punto M se obtienen nuevas tangentes a la cónica $M'_1M'_6$, . . .

EJERCICIOS SOBRE CÓNICAS

En los ejercicios con un asterisco los datos se dan en un sistema cartesiano rectangular.

* 1º Encontrar la ecuación de una elipse sabiendo que uno de sus vértices es el punto (0, —7), que su centro está en el origen y que pasa por el punto (1, 14/3).

R.: $x^2/9 + y^2/49 = 1$.

* 2º Una elipse tiene su centro en el origen, su eje menor coincide con el eje OX y la longitud de su eje mayor es el doble de la del menor. Sabiendo que la elipse pasa además por el punto ($\sqrt{7}/2$, 3) determinar su ecuación.

R.: $x^2/4 + y^2/16 = 1$.

* 3º Lugar geométrico de los puntos tales que su distancia a la recta de ecuación $y + 8 = 0$ es el doble de la distancia al punto (0, —2).

R.: $4x^2 + 3y^2 = 48$.

4º El punto medio de la cuerda de una elipse de ecuación $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$ es (5, 2). Determinar la ecuación de la cuerda.

R.: $x + 2y - 9 = 0$.

* 5º Determinar la ecuación del lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a las dos circunferencias de ecuaciones $x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$ y $x^2 + y^2 = 1$.

R.: $100x^2 + 84y^2 - 168y - 441 = 0$;
$36x^2 + 20y^2 - 40y - 25 = 0$.

* 6º Determinar la ecuación de una hipérbola sabiendo que sus focos son los puntos (3, 4) y (3, —2) y su excentricidad es igual a 2.

R.: $\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{27} = 1.$

* 7º Una hipérbola tiene su centro en el origen y su eje focal es el OX. Sabiendo que pasa por el punto (3, —1) y que una de sus asíntotas es la línea recta de ecuación $2y = 6\sqrt{2x}$, determinar su ecuación.

R.: $2x^2 - 9y^2 = 9.$

8º Determinar las tangentes a la hipérbola de ecuación $x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$, que son paralelas a la recta de ecuación $4x - 4y + 11 = 0$.

R.: $x = y - 1;\ \ x = y + 1.$

9º Determinar las tangentes a la hipérbola de ecuación $4x^2 - 9y^2 = 36$, que pasan por el punto (0, —1).

R.: $y = \pm\sqrt{5}/3x - 1.$

* 10º Determinar la longitud del segmento determinado por la parábola de ecuación $y^2 = 4x$ en la recta de ecuación $x = 2y - 3$.

R.: $4\sqrt{5}.$

* 11º Los puntos (—4, 3) y (—1, 3) son el vértice y el foco respectivamente de una parábola. Determinar la ecuación de la parábola, la de su directriz y la de su eje.

R.: $(y-3)^2 = 12(x+4);\ \ x = -7;\ \ y = 3.$

* 12º Encontrar la ecuación de una parábola cuyo eje es paralelo al eje OX y que pasa por los puntos (0, 0), (8, —4) y (3, 1).

R.: $y^2 - x + 2y = 0.$

* 13º Encontrar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (4, —1), cuyo eje es la recta de ecuación $y + 1 = 0$ y que pasa por el punto (3, —3).

R.: $y^2 + 4x + 2y - 15 = 0.$

* 14º Demostrar que las parábolas de ecuaciones $x^2 - 4x + 8y - 20 = 0$ y $x^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, se cortan ortogonalmente en sus puntos de intersección.

* 15º Deducir la fórmula del área encerrada por una elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$A = \pi . ab$, basándose en la propiedad de la elipse de ser proyección ortogonal de una circunferencia.

16º Demostrar que en una elipse o hipérbola la distancia de una tangente al centro es inversamente proporcional a la longitud del diámetro paralelo a la tangente.

17º Demostrar que en una elipse o hipérbola el producto de las distancias de un punto variable a los dos focos es constante e igual al cuadrado de la longitud del semieje no focal.

18º Demostrar que el lugar de los pies de las perpendiculares trazadas desde un foco de una elipse o hipérbola a las tangentes a la curva, es la circunferencia que tiene como diámetro el segmento del eje focal comprendido entre los vértices.

19º Demostrar que en una elipse o hipérbola el lugar de los puntos simétricos del foco respecto de las tangentes a la curva es la circunferencia que tiene por centro el otro foco y por radio la longitud del segmento del eje focal comprendido entre los vértices.

20º Demostrar que el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se puede trazar un par de tangentes perpendiculares a una elipse es una circunferencia de centro el de la cónica y radio $\sqrt{a^2+b^2}$. Extender este resultado a la hipérbola.

21º Sea un triángulo en que la base BC es fija y el vértice A varía de forma que la diferencia de los ángulos B y C es constante. Demostrar que el punto A describe una hipérbola equilátera.

22º Dar bajo forma de determinante la ecuación de la cónica que pasa por cinco puntos (análoga a la dada para la circunferencia).

23º Clasificar cónicas cuyas ecuaciones son:

a) $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0$.
R.: Hipérbola.

b) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 19x - 17y + 11/4 = 0$.
R.: Parábola.

c) $3x^2 - 4xy - 4y^2 + 16x + 16y - 12 = 0$.
R.: Dos rectas que se cortan.

d) $4x^2 + 2xy + y^2 - 2x + y + 3 = 0$.
R.: Elipse imaginaria.

e) $5x^2 + 2xy + 10y^2 - 12x - 22y + 17 = 0$.
R.: Dos rectas imaginarias que se cortan.

f) $x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 3y + 2 = 0$.
R.: Una hipérbola.

g) $x^2 + 8xy + 16y^2 - 4x - 16y + 7 = 0$.
R.: Elipse imaginaria.

h) $2x^2 - 12xy + 18y^2 + x - 3y - 6 = 0$.
R.: Dos rectas paralelas.

i) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$.
R.: Una elipse real.

j) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$.
R.: Una elipse real.

k) $4x^2 - 20xy + 25y^2 + 4x - 10y + 1 = 0$.
R.: Una recta doble.

24º Dada la cónica de ecuación $2x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y + 16 = 0$, clasificarla y determinar su centro y sus ejes.

R.: Elipse: (4, 6); ecuación del eje focal

$$y - 6 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(y-4).$$

25º Dada la cónica de ecuación $7x^2 - 8xy + y^2 + 2x + 4y - 1 = 0$, clasificarla y determinar su centro y sus ejes.

R.: Hipérbola: (1, 2); ejes: $y = 2x$, $x + 2y - 5 = 0$.

26º Dada la cónica de ecuación $4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 8y + 4 = 0$, probar que es una parábola y determinar su vértice y su eje.

R.: $(23/50,\ 3/2)$; $10x - 5y - 4 = 0$.

27º Discutir, según los distintos valores de λ, la cónica de ecuación $\lambda x^2 - 2xy + \lambda y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$.

R.: $\lambda < -1$, elipse real; $\lambda = -1$, parábola; $-1 < \lambda < -1/3$, hipérbola; $\lambda = -1/3$, dos rectas reales; $-1/3 < \lambda < 1$, hipérbola; $\lambda = 1$, dos rectas imaginarias paralelas; $\lambda > 1$, elipse imaginaria.

28º Discutir la naturaleza de la cónica de ecuación $\alpha x^2 + 2\beta xy + y^2 + (\alpha - 2)y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$, en donde α y β son las coordenadas de un punto P del plano.

R.: Se llega a la consideración de dos circunferencias de ecuaciones $C_1: x^2 + y^2 - 2x = 0$; $C_2: x^2 + y^2 - 2x - y - 1 = 0$ tangentes en un punto M y se tiene: P interior a C_2, elipse imaginaria; P en C_2, pero no en M, dos rectas imaginarias que se cortan; P coincide con M, dos rectas imaginarias paralelas; P exterior a C_2 pero interior a C_1, elipse real; P en C_1 pero no en M, parábola; P exterior a C, hipérbola.

29º Determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de contacto de las tangentes a las cónicas de ecuación $x^2 - 2\lambda xy - y^2 - 2\lambda x + 1 = 0$ que son paralelas al eje OY.

R.: $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$.

30º Determinar el lugar geométrico de los centros de las cónicas que pasan por los puntos $(2, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 3)$ y $(0, 1)$.

R.: La cónica de ecuación $6x^2 + 4y^2 - 3x - 8y = 0$.

31º Determinar una cónica sabiendo que es tangente a los ejes OX y OY en los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$ y que pasa por el punto $(1, 2)$.

R.: $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

32º Encontrar la ecuación de la cónica que pasa por el punto $(2, -1)$ y por los puntos de intersección de las cónicas $x^2 + 2xy - 2y^2 + 2x + y + 1 = 0$ y $2x^2 + xy + y^2 - 5x + 3y - 4 = 0$.

R.: $7x^2 + 11xy - 9y^2 + 5x + 8y + 1 = 0$.

33º Encontrar la ecuación de la cónica que pasa por los cinco puntos $(-1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 1)$ y $(-5, 4)$.

R.: $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$.

34º Encontrar la ecuación de la parábola que pasa por los cuatro puntos $(1, 0)$, $(-1/4, -5/4)$, $(4/9, -10/9)$ y $(-4, 10)$.

R.: Dos soluciones: $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y - 4 = 0$;
$169x^2 + 26xy + y^2 + 27x - 146y - 196 = 0$.

35º Encontrar las cónicas del sistema de cónicas homofocales

$$\frac{x^2}{\lambda + 9} + \frac{y^2}{\lambda + 5} = 1$$

que pasan por el punto $(2, 3)$.

R.: $3x^2 + 4y^2 = 48$; $3x^2 - y^2 = 3$.

36º Hallar la ecuación de la parábola que pasa por el origen, tiene

en él la tangente $y - 2x = 0$, pasa por A(5,0) y tiene el eje paralelo a la recta $y - 6x = 0$.

R.: $90(y - 2x) + (y - 6x)^2 = 0$.

37º De una hipérbola se sabe que: *a*) pasa por el origen y la tangente en él es $y - x = 0$; *b*) pasa por A(4,0); *c*) tiene por asíntota la recta $x - 6 = 0$. Se pide la ecuación de la hipérbola y la ecuación de la otra asíntota.

R.: $3x^2 - 2xy + 12y - 12x = 0$; $3x - 2y + 6 = 0$.

38º Hallar las ecuaciones de las cónicas que cumplen: *a*) pasan por A(0,1) y en este punto son tangentes al eje y; *b*) pasan por B(1,0), C(2,0); *c*) son tangentes a la recta $x = 3$. Hallar también los puntos de contacto con esta última tangente.

R.: *a*) $3x^2 + 8xy + 6y^2 - 9x - 12y + 6 = 0$;

b) $x^2 + 2y^2 - 3x - 4y + 2 = 0$; *c*) $P_1(3,1)$, $P_2(3,-1)$.

CAPÍTULO V

CURVAS PLANAS

§ 23. CURVAS NOTABLES DE TERCERO Y CUARTO GRADO

1. **Definición de curva algebraica.** — Hemos visto que la ecuación general de las rectas es de la forma $ax + by + c = 0$, es decir, se obtiene igualando a cero un polinomio de primer grado en las variables x, y. Análogamente, la ecuación general de las cónicas es de la forma $f(x, y) = 0$, donde $f(x, y)$ es ahora un polinomio de segundo grado en las variables x, y.

La generalización a otros tipos de curvas se presenta de manera natural e inmediata. Bastará considerar ecuaciones de la forma $f(x, y) = 0$, donde $f(x, y)$ sea un polinomio en x, y de tercero, cuarto, quinto, ..., grado. Se llega así al concepto de curva algebraica.

DEFINICIÓN 1. Se llama curva algebraica al conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas cartesianas (rectangulares u oblicuas) x, y satisfacen a una ecuación de la forma

$$f(x, y) = 0$$

donde $f(x, y)$ es un polinomio en las dos variables x, y.

El grado del polinomio $f(x, y)$ se llama *grado* u *orden* de la curva.

Las curvas de primer grado son las rectas; las de segundo grado las cónicas; las de tercer grado se llaman cúbicas, las de cuarto grado, cuárticas, etc.

No todas las curvas son algebraicas. Por ejemplo, la curva $y - \operatorname{sen} x = 0$, llamada *sinusoide*, no es algebraica, puesto que el primer miembro $y - \operatorname{sen} x$ no es ningún polinomio en x, y. Tampoco son algebraicas las curvas.

$$y - a^x = 0 \quad , \quad y - \log x = 0 \quad , \quad y^x - x = 0 .$$

Las curvas que no son algebraicas se llaman *trascendentes*.

Dejamos para más adelante (§ 26 y sig.) el estudio general de las curvas algebraicas. Por el momento, como introducción, vamos a estudiar algunas curvas notables de tercero y cuarto grado.

2. La parábola cúbica $y = ax^3$. — Es una curva que pasa por el origen de coordenadas. Las intersecciones con una recta $y = \lambda x$, tendrán por abscisas las soluciones de la ecuación

$$\lambda x - ax^3 = 0 \tag{1}$$

o sea, $x_1 = 0$, $x_2 = +\sqrt{\lambda/a}$, $x_3 = -\sqrt{\lambda/a}$. Por lo tanto, si λ tiene el mismo signo que a, la recta corta a la curva en dos puntos, además del origen, simétricamente colocados respecto del mismo. Si λ es de signo opuesto a a, la recta corta a la curva en el origen como único punto real, más otros dos puntos imaginarios.

Para $\lambda = 0$, caso del eje x, la ecuación [1] se reduce a $ax^3 = 0$, la cual tiene $x = 0$ como raíz triple. Esto nos dice que el eje x tiene con la curva tres puntos de intersección confundidos en el origen. Se dice que es una *tangente de inflexión.*

Si $a > 0$, y es positivo y creciente para $x > 0$ y negativo y creciente para $x < 0$, caso de la fig. 69. Si $a < 0$ la curva tiene la forma simétrica de la anterior respecto al eje y.

Veamos una propiedad curiosa de la tangente a la parábola cúbica. Sea $P(x_0, y_0)$ un punto de la misma, o sea un punto tal que $y_0 = ax_0^3$. Una recta general por P será

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0) \tag{2}$$

y las abscisas de los puntos de intersección de esta recta con la curva serán las soluciones de la ecuación $y_0 + \lambda(x - x_0) = ax^3$, o sea,

$$ax^3 - \lambda(x - x_0) - y_0 = 0. \tag{3}$$

Para que $x = x_0$ sea raíz doble de esta ecuación, ella debe serlo también de la derivada

$$3ax^2 - \lambda = 0$$

o sea, debe ser $\lambda = 3ax_0^2$. La recta con este coeficiente angular será la tangente en el punto P. Su ecuación será la [2] para $\lambda = 3ax_0^2$, o sea,

$$y - y_0 = 3ax_0^2\ (x - x_0).$$

Esta tangente corta al eje y en el punto $y = y_0 - 3ax_0^3 = -2ax_0^3 = -2y_0$. Es decir, para trazar la tangente a la parábola cúbica en un punto $P(x_0, y_0)$ basta unir este punto con el $E(0, -2y_0)$.

Esta propiedad generaliza la de la parábola ordinaria $y = ax^2$ según la cual para trazar la tangente a esta curva en el punto $P(x_0, y_0)$ basta unirlo con el punto $E(0, -y_0)$. En general, para la curva $y = ax^m$ (m = entero positivo), llamada *parábola de orden m*, la tangente en el punto $P(x_0, y_0)$ se obtiene uniendo este punto con el $E(0, -(m-1)y_0)$.

3. La parábola cúbica completa $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. — La curva corta al eje y en el único punto $x = 0$, $y = d$. Las intersecciones con el eje x son las raíces de la ecuación $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, la cual, si los coeficientes son reales, siempre tendrá por lo menos una raíz real. Los máximos y mínimos de la curva corresponden a los valores de x para los cuales es $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$; por lo tanto hay dos de ellos, que pueden ser reales o imaginarios. Para $x \to -\infty$ el término predominante en el segundo miembro de la ecuación de la curva es el ax^3 y por tanto también $y \to -\infty$ si $a > 0$, o bien $y \to +\infty$ si $a < 0$. Para $x \to +\infty$, resulta $y \to +\infty$ si $a > 0$, $y \to -\infty$ si $a < 0$.

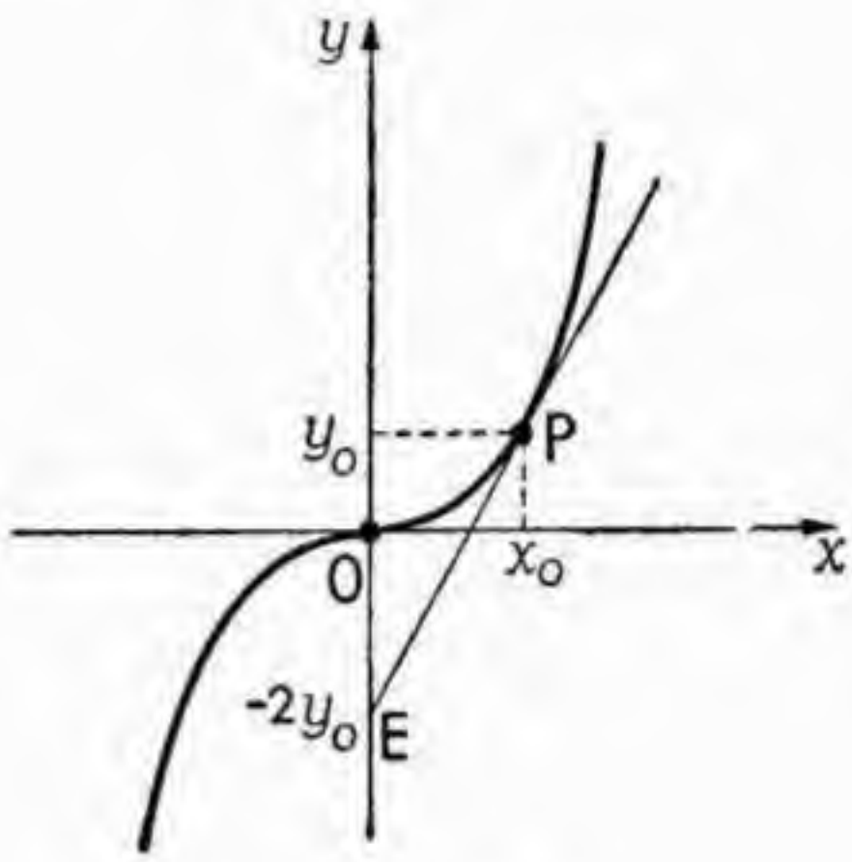

Fig. 69.

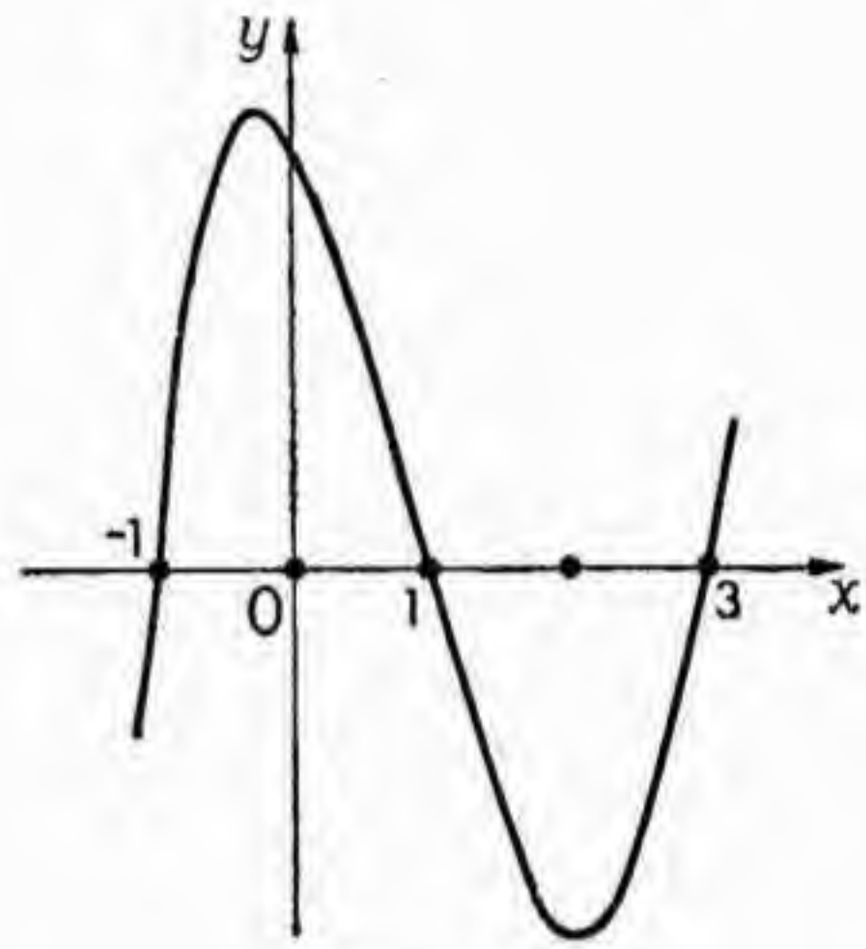

Fig. 70.

La fig. 70 representa el caso

$$y = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

en que el segundo miembro tiene las tres raíces reales $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$.

Una parábola cúbica completa queda determinada por 4 puntos. En efecto, si estos son los $A_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, bastará hallar los coeficientes a, b, c, d, de manera que se satisfagan las cuatro ecuaciones

$$y_i - ax_i^3 - bx_i^2 - cx_i - d_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

que son cuatro ecuaciones lineales respecto de las incógnitas a, b, c, d. Resolviendo el sistema por la regla de Crámer o cualquier otro método de resolución de ecuaciones lineales, se tendrán los coeficientes de la curva buscada.

Por ejemplo, la parábola cúbica completa que pasa por los puntos $A_1(0, 1)$, $A_2(1, 4)$, $A_3(-1, 4)$, $A_4(2, 7)$ resulta ser

$$y = -x^3 + 3x^2 + x + 1.$$

4. **La parábola semicúbica** $y^2 = ax^3$. — Consideremos, para fijar las ideas, el caso $a > 0$ (fig. 71). Si fuera $a < 0$ la curva presentaría una forma análoga, pero sobre la parte negativa del eje x.

Siendo $a > 0$, la curva sólo es real para $x > 0$. Ella es simétrica respecto del eje x, puesto que si (x, y) es un punto de la curva, también lo es el $(x, -y)$. Cualquier recta $y = \lambda x$ por el origen, corta a la cúbica en los puntos cuyas abscisas son soluciones de la ecuación $\lambda^2 x^2 - ax^3 = 0$, la cual tiene $x = 0$ como raíz doble y $x = \lambda^2/a$ como raíz simple. Esto nos

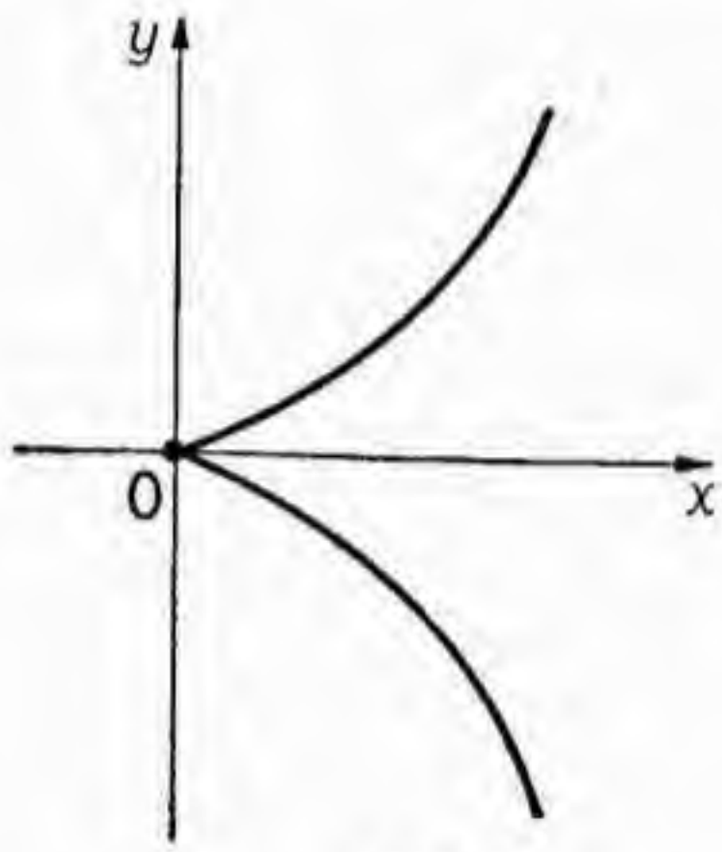

Fig. 71.

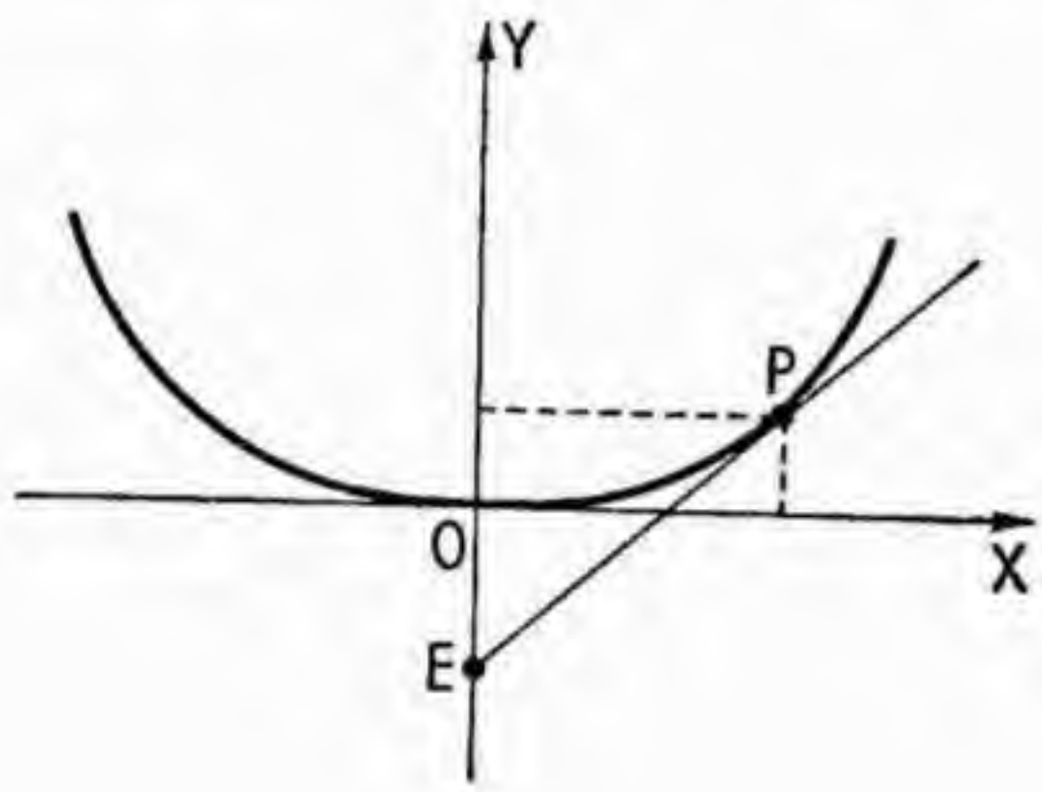

Fig. 72.

dice que todas las rectas que pasan por el origen tienen dos puntos de intersección con la curva confundidos en el mismo. Un punto de esta clase se llama un *punto doble* de la curva. En el caso $\lambda = 0$ (eje x) la recta tiene tres puntos de intersección confundidos en el origen y dicho valor de λ es el único para el cual esto ocurre; esto quiere decir que el eje x es la única recta que tiene tres puntos de intersección confundidos con la curva en el origen, es decir, un punto más que todas las otras rectas; por esto se dice que el eje x es la *tangente en el punto doble*.

Como al crecer x crece ax^3 y por tanto y, la rama positiva $y = +\sqrt{ax^3}$ será creciente y la negativa $y = -\sqrt{ax^3}$ decreciente. Basta esto para poder trazar la curva cuando se conocen algunos de sus puntos calculados directamente.

5. **La parábola cuártica** $y = ax^4$. — Se llama también parábola bicuadrática. El coeficiente a es una constante y para el estudio de la curva se puede suponer $a > 0$, pues si es $a < 0$ la curva se sustituye por su simetría respecto del eje x.

La curva pasa por el origen, es simétrica respecto del eje y (puesto que si (x, y) es un punto, también lo es $(-x, y)$) y

está siempre situada por encima del eje x (por ser $y > 0$). Una recta general $y = \lambda x$, por el origen, corta a la curva en los puntos cuyas abscisas son raíces de la ecuación $\lambda x = ax^4$, o sea, $x(ax^3 - \lambda) = 0$. Si $\lambda \neq 0$ esta ecuación tiene $x = 0$ como raíz simple; las otras raíces son las raíces cúbicas de λ/a, de las cuales siempre una es real y las otras dos son imaginarias; es decir, la recta corta a la curva, además del origen, en un solo punto real. Si $\lambda = 0$, la ecuación anterior se reduce a $ax^4 = 0$, y por tanto tiene $x = 0$ como raíz cuádruple; por esta razón se dice que la recta $y = 0$ (eje x) tiene cuatro puntos de intersección con la curva, confundidos en el origen o bien que se trata de una tangente con contacto "*cuadripunto*".

Con esto, y siendo la ordenada y siempre creciente con $|x|$, la forma de la curva resulta la indicada en la fig. 72.

Como ya observamos al final del estudio de la parábola cúbica, también para la parábola cuártica existe una fácil construcción de la tangente en un punto $P(x_0, y_0)$ de la misma. En efecto, procediendo como en el caso de la parábola cúbica, resulta que la ecuación de la tangente en P es

$$y - y_0 = 4ax_0^3(x - x_0)$$

la cual corta al eje y en el punto de ordenada $y = y_0 - 4ax_0^4 = -3ax_0^4 = -3y_0$. Por tanto, dado $P(x_0, y_0)$ se determina inmediatamente $E(0, -3y_0)$ y la recta EP es la tangente buscada.

6. **Cuárticas polizonales.** — DEF. 2. Reciben este nombre las curvas de cuarto grado cuya ecuación puede ponerse en la forma

$$[4] \qquad y = \pm\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)}$$

donde $f(x)$, $g(x)$ son polinomios de primero o segundo grado en x.

Para ver que estas curvas son efectivamente de cuarto grado, hay que transformar [4] en un polinomio en x, y, ó sea, hay que racionalizar la ecuación, haciendo desaparecer las raíces cuadradas. Para ello, elevando al cuadrado resulta

$$y^2 = f + g \pm 2\sqrt{fg}$$

y de aquí

$$[5] \qquad (y^2 - f - g)^2 - 4fg = 0$$

que es la ecuación racionalizada de la curva, la cual, siendo f, g de primero o segundo grado, es de cuarto grado.

Las curvas parciales $y_1 = \pm\sqrt{f(x)}$, $y_2 = \pm\sqrt{g(x)}$ son cónicas, pues sus ecuaciones racionalizadas son $y_1^2 - f(x) = 0$, $y_2^2 - g(x) = 0$, que son de segundo grado. La construcción de la curva [4] se hace fácilmente por puntos a partir de estas cónicas. En efecto, y será real únicamente para los valores de x en que sea $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$, es decir, en la parte co-

mún a las dos franjas paralelas al eje y que contienen a las cónicas parciales. Bastará entonces llevar a un lado y a otro de las ordenadas y_1 de la primera cónica, el valor y_2 de las ordenadas de la segunda cónica.

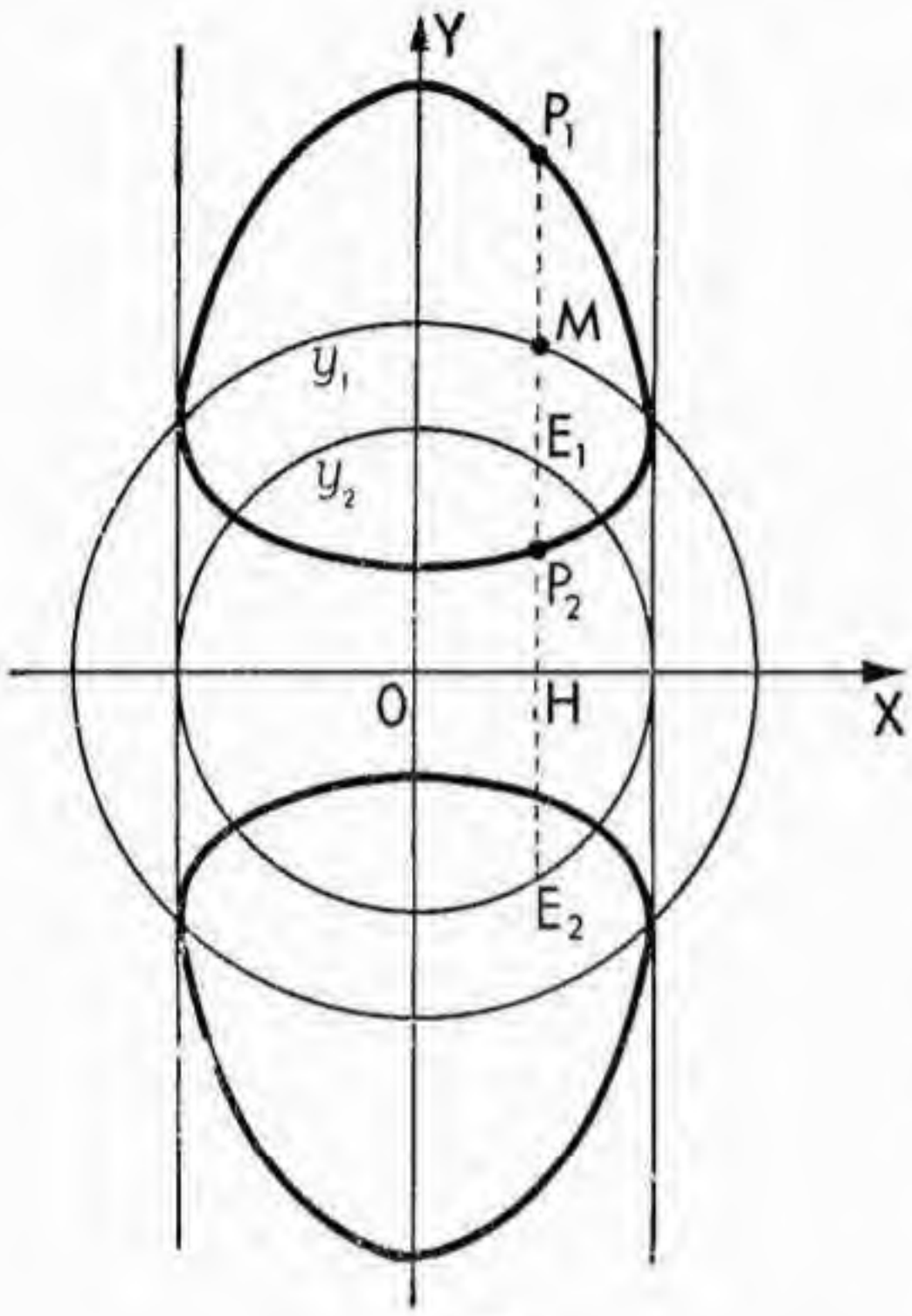

Fig. 73.

Consideremos dos ejemplos aclaratorios.

a) Sea la cuártica

$$y = \pm \sqrt{2a^2 - x^2} \pm \sqrt{a^2 - x^2}$$

o sea

$$(y^2 + 2x^2 - 3a^2)^2 - 4(2a^2 - x^2)(a^2 - x^2) = 0,$$

es decir

$$y^4 - 6a^2y^2 + 4x^2y^2 + a^4 = 0.$$

Las curvas $y_1 = \pm \sqrt{2a^2 - x^2}$, $y_2 = \pm \sqrt{a - x^2}$ son dos circunferencias de centro, el origen y radios $\sqrt{2}a$, y a respectivamente. Para construir la curva bastará llevar a partir del punto M de la circunferencia y_1 segmentos MP_1 MP_2 iguales a las semicuerdas $HE_1 = HE_2$ de la circunferencia y_2. La curva está formada por dos óvalos separados como indica la figura 73.

b) Consideremos la cuártica.

$$y^4 - 2(4 + 3x)y^2 + (5x - 4)^2 = 0.$$

Por tratarse de una ecuación bicuadrática en y, se puede resolver, dando

$$y = \pm \sqrt{4x} \pm \sqrt{4 - x}.$$

Para representar esta curva bastará trazar las dos parábolas $y_1^2 = 4x$, $y_2^2 = 4 - x$ (fig. 74) y tomar sobre cada vertical AB los segmentos $BP = BP' = AH$. Los puntos P, P' son los puntos de la parte correspondiente a $y_1 > 0$ de la curva. Haciendo lo mismo con la parte negativa de la parábola y_1, se tiene la curva total.

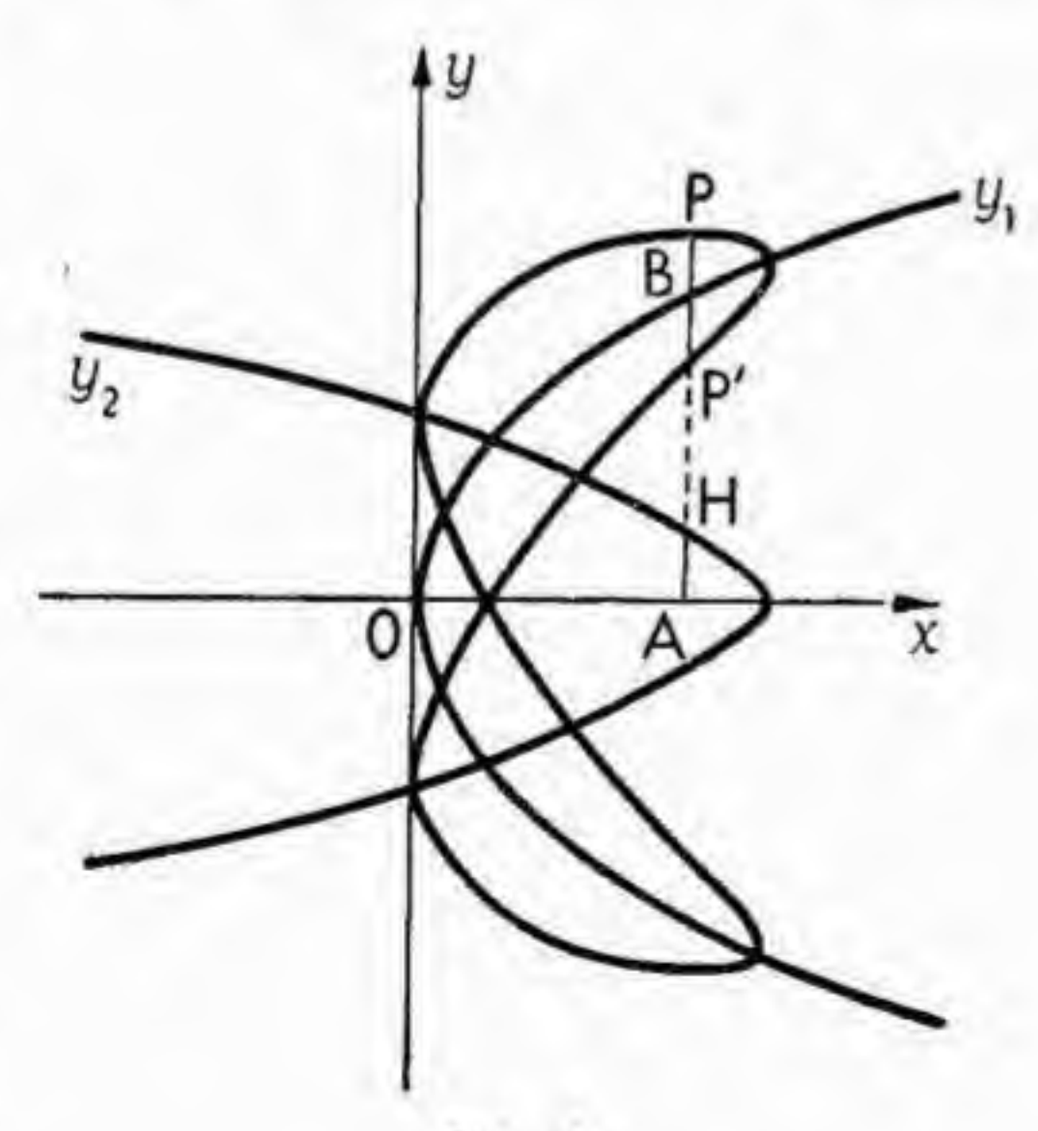

Fig. 74.

A veces no se puede despejar y en la forma [4], pero se puede despejar la x en forma análoga; se trata entonces también de una cuártica polizonal, con los papeles de x, y invertidos. Por ejemplo, para estudiar la cuártica

$(a^2 - x^2)x^2 = by^2$, se puede o bien despejar y, o bien despejar x, en cuyo caso queda una ecuación de la forma $x = \pm\sqrt{f(y)} \pm \sqrt{g(y)}$ con $f(y) = a^2/4 + (by/2)$, $g(y) = a^2/4 - (by/2)$, la cual se estudia fácilmente por el método anterior.

7. **Cuárticas bicirculares. Curvas de Cassini. Lemniscata.** — DEF. 3. Se llaman cuárticas bicirculares aquellas cuya ecuación en coordenadas cartesianas rectangulares pueden reducirse a la forma

$$[6] \qquad (x^2 + y^2)^2 + a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 x + a_5 y + a_6 = 0$$

carente de términos de tercer grado y los de cuarto grado reducidos a la forma $(x^2 + y^2)^2$; los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_6$, constantes.

Un ejemplo importante de cuárticas bicirculares son las llamadas *curvas de Cassini.* Ellas pueden definirse como el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de distancias a dos puntos fijos es constante, por ejemplo, igual a k^2.

Por analogía con el caso de la elipse, cuya definición era análoga, con la sola sustitución de la "suma" de distancias por el "producto" de las mismas, llamemos F, F′, a los dos puntos fijos, tomemos el punto medio del segmento F F′ como origen de coordenadas, la recta F F′ como el eje x y pongamos $OF = OF' = c$. Si x, y son las coordenadas de un punto de la curva de Cassini deberá ser

$$[(x - c)^2 + y^2] \,.\, [(x + c)^2 + y^2] = k^4$$

o sea

$$[7] \qquad (x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) + c^4 - k^4 = 0.$$

Según los valores de c y de k se tiene toda una familia de curvas de Cassini con formas diferentes. Todas ellas, sin embargo, son simétricas respecto del origen, puesto que si (x, y) es un punto de la curva también lo es el punto $(-x, -y)$.

Para ver la forma de la curva [7], resolvamos la ecuación respecto de y^2. Se tiene

$$y^2 = -(x^2 + c^2) \pm \sqrt{4c^2x^2 + k^4}.$$

El radical que aquí figura es siempre real, pero para que y también lo sea deberá ser

$$x^2 + c^2 \leqslant \sqrt{4c^2x^2 + k^2} \quad \text{o sea} \quad (x^2 - c^2)^2 \leqslant k^4,$$

lo cual obliga a que sea simultáneamente $k^2 \geqslant x^2 - c^2$, $k^2 \geqslant c^2 - x^2$,

o sea $$c^2 - k^2 \leqslant x^2 \leqslant c^2 + k^2.$$

La segunda desigualdad nos dice que la curva está comprendida entre las paralelas $x = \pm\sqrt{c^2 + k^2}$. La primera desigualdad no dice nada, puesto que se cumple siempre, si $c^2 \leqslant k^2$;

pero si $c^2 > k^2$ ella nos dice que la curva es exterior a la franja limitada por las paralelas $x = \pm\sqrt{c^2 - k^2}$. En este caso, la curva consta de dos partes separadas, estando la correspondiente a valores positivos de x comprendida en la franja $\sqrt{c^2 - k^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{c^2 + k^2}$. En el primer caso, en cambio, la curva consta de un solo arco continuo.

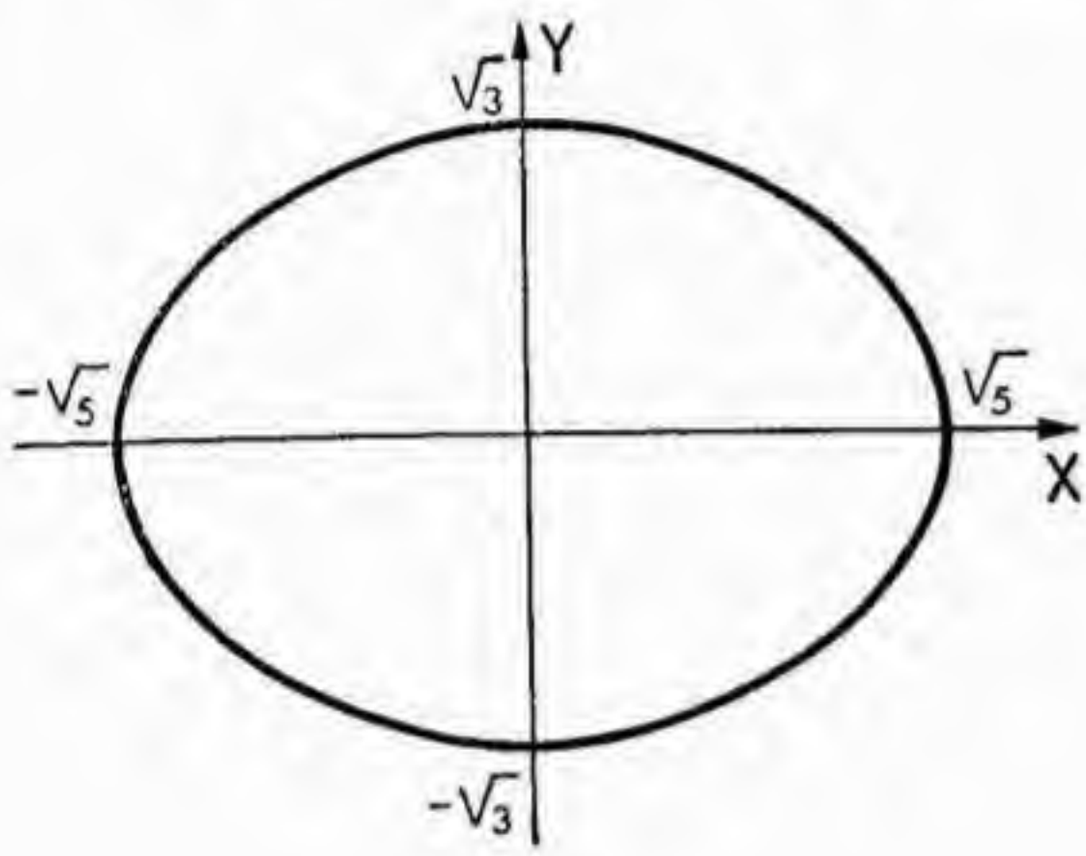

Fig. 75.

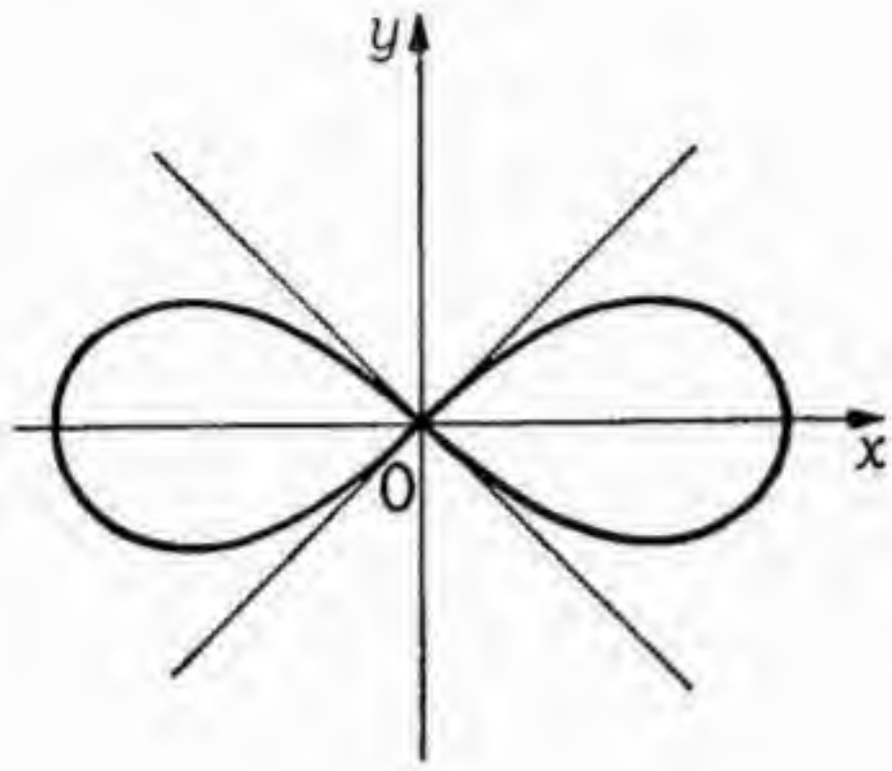

Fig. 76.

Veamos un ejemplo de cada caso.

a) Sea la cuártica

$$(x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2 = 16$$

o sea

$$(x^2 + y^2)^2 + 2(y^2 - x^2) - 15 = 0.$$

Corresponde al caso general para $c = 1$, $k = 2$. Despejando y^2 resulta

$$y^2 = -x^2 - 1 \pm 2\sqrt{x^2 + 4}.$$

Para que y sea real hay que tomar el signo $+$ del radical; además y se anula para $x = \pm\sqrt{5}$, que serán los puntos en que la curva corta al eje x. Análogamente los puntos en que corta al eje y son $y = \pm\sqrt{3}$. La curva tiene la forma de un óvalo (*óvalo de Cassini*) (fig. 75).

b) Sea la cuártica

$$(x^2 + y^2 + 4)^2 - 16x^2 = 1$$

o sea

$$(x^2 + y^2)^2 + 8(y^2 - x^2) + 15 = 0$$

la cual corresponde al caso $c = 2$, $k = 1$. La construcción por puntos es fácil escribiéndola en la forma

$$y^2 = -(x^2 + 4) \pm \sqrt{16x^2 + 1}$$

de donde se deduce que y es sólo real para valores de x tales que $(16x^2 + 1) \geqslant (4 + x^2)^2$ o sea $(x^2 - 4)^2 \leqslant 1$, o bien $3 \leqslant x^2 \leqslant 5$.

La curva consta por tanto de dos óvalos separados.

Es importante el caso $c = k$, en el cual la curva se reduce a la forma

[8] $$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2 (x^2 - y^2)$$

y se llama *lemniscata.*

El estudio de la misma se hace fácilmente pasando a coordenadas polares, o sea poniendo $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \operatorname{sen} \varphi$, con lo cual resulta

$$\varrho^2 = 2c^2 (\cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi) = 2c^2 \cos 2\varphi .$$

Puesto que ϱ vale lo mismo para φ que para $\varphi + \pi$, resulta que la curva es simétrica respecto del origen (como ya vimos que ocurre con todas las curvas de Cassini). Además ϱ sólo es real para valores de φ comprendidos en el intervalo $-\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$, es decir, las bisectrices $y = \pm x$ de los ejes coordenados separan la región en la cual existe curva, de aquella en que no la hay; son las tangentes en el origen. El máximo de ϱ corresponde a $\cos 2\varphi = 1$, o sea $\varphi = 0$ y para los valores extremos $\varphi = \pm \pi/4$ es $\varrho = 0$. En el intervalo $-\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant 0$, ϱ es creciente, mientras que en el intervalo $0 \leqslant \varrho \leqslant \pi/4$ es decreciente. Bastan estas consideraciones para deducir que la forma de la figura es la indicada en la fig. 76.

EJERCICIOS

1. Hallar la ecuación de la lemniscata que resulta al girar la de la fig. 76 en 90° alrededor del origen.

2. A partir de la ecuación [8] probar que todas las rectas que pasan por el origen tienen en el mismo dos puntos confundidos de intersección con la lemniscata, excepto las rectas $y = \pm x$ que tienen cuatro puntos confundidos. Esto significa que el origen es un "punto doble" y que las rectas $y = \pm x$ son las tangentes en el mismo.

§ 24. CURVAS PLANAS EN GENERAL

1. **Curvas en forma explícita.** — Recordemos brevemente el concepto de función. Si para cada valor de una variable x (variable independiente) está determinado uno o varios valores de otra variable y (variable dependiente), se dice que esta última es función de la primera y se representa, en general,

[1] $$y = \mathrm{f}(x) .$$

Si a cada valor de x corresponde un solo valor de y, la función se llama *uniforme.* En caso contrario se llama *multiforme.*

Por ejemplo, la condición

$$y = \operatorname{sen} x$$

define a y como función uniforme de x, puesto que para cada valor de x corresponde un valor bien determinado de y.

En cambio, la condición

$$y = \operatorname{arc\,sen} x$$

define a y como función multiforme de x, puesto que para cada valor de x hay varios, en este caso infinitos, valores de y (todos los arcos cuyo seno es x). Por ejemplo, a $x = 1$, corresponden todos los valores $y = \pi/2$, $\pi/2 + 2\pi$, $\pi/2 + 4\pi, \ldots$

Supongamos en el plano unos ejes de coordenadas cartesianas ortogonales x, y y representemos para cada valor de x el punto cuyas coordenadas son $x, y = f(x)$. Al variar x, el conjunto de puntos correspondientes es lo que se llama la *curva* representativa de la función $y = f(x)$.

Se dice también que *la curva está dada por la ecuación explícita* $y = f(x)$.

Ejemplos: 1. La ecuación $y = 3x - 2$ es la ecuación de una recta.

2. La ecuación $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ es la ecuación explícita de una circunferencia de centro el origen y radio a.

3. La ecuación $y = 1/x$ es la ecuación explícita de una hipérbola equilátera.

4. La ecuación $y = \pm \sqrt{-x}$ representa una parábola.

2. **Curvas en forma implícita.** — La relación [1] puede escribirse en la forma

$$y - f(x) = 0 \tag{2}$$

que nos dice que los pares de valores correspondientes de la variable x y de la función y pueden caracterizarse también por el hecho de anular a una cierta expresión formada con las mismas.

Si, en general, $F(x, y)$ representa una expresión que liga a las variables x, y, la condición

$$F(x, y) = 0 \tag{3}$$

define también a y como función de x si se hace corresponder a cada valor de x el valor o los valores de y que junto con dicho valor de x satisfacen a [3]. Se dice entonces que la función está dada en forma *implícita*. La representación gráfica de la función se obtendrá señalando en el plano el conjunto de puntos cuyas coordenadas cartesianas satisfacen a la ecuación [3].

Es decir, a cada valor particular $x = x_0$ le corresponden los valores de y que satisfacen a la ecuación $F(x_0, y) = 0$. En este caso se dice que *la curva está dada por su ecuación implícita* $F(x, y) = 0$.

El caso [2] se puede escribir inmediatamente en la forma [1], o sea se puede despejar y, pasando de la forma implícita a la forma explícita. Pero hay otros casos en que la forma de $F(x, y)$ no permite o hace muy difícil pasar de la forma [3] a la [1].

Ejemplos: 1. La ecuación $3x^2 + y^2 - 1 = 0$ es la ecuación implícita de una elipse. La forma explícita de la misma es

$$y = \pm \sqrt{1 - 3x^2}.$$

2. La ecuación $x^5 - x^2y^3 + y^7 = 0$ es la ecuación en forma implícita de una curva, constituída por todos los puntos cuyas coordenadas x. y satisfacen a la ecuación. En este caso ya no es posible escribir la ecuación en forma explícita, puesto que para despejar y habría que resolver una ecuación de grado 7.

3. La ecuación $y \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen}^2 y = 0$ es la ecuación implícita de una curva cuya forma explícita tampoco es fácil de obtener.

3. **Curvas en forma paramétrica.** — Supongamos ahora que x, y sean ambas funciones de un parámetro t, o sea

$$x = \mathrm{f}(t) \quad , \quad y = \mathrm{g}(t) . \tag{4}$$

Para cada valor de t se tendrá un par de valores x, y que pueden considerarse como coordenadas de un punto P del plano. Al variar t, el punto P variará también. El conjunto de puntos P cuyas coordenadas están dadas por las funciones [4] al variar t, se dice que *forman una curva dada por las ecuaciones paramétricas* [4].

Si las ecuaciones paramétricas permiten eliminar el parámetro, se puede pasar de ellas a la ecuación de la curva en forma implícita. Por ejemplo, la curva

$$x = 3t - 1 \quad , \quad y = t^2$$

puede escribirse en forma implícita, despejando t de la primera ecuación, $t = (x + 1)/3$, y sustituyendo en la segunda, lo cual da, después de pasar todos los términos al primer miembro

$$9y - (x + 1)^2 = 0.$$

Sin embargo, para el estudio de una curva dada por sus ecuaciones paramétricas, no siempre es conveniente pasar a la forma implícita por eliminación del parámetro, sino que muchas veces es preferible hacer el estudio directamente, manteniendo las ecuaciones en forma paramétrica.

Ejemplos: 1. Las ecuaciones

$$x = a \cos t \quad , \quad y = b \operatorname{sen} t$$

son las ecuaciones paramétricas de una elipse. De ellas se deduce, efectivamente, $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

2. Las ecuaciones

$$x = at \cos t \quad , \quad y = at \operatorname{sen} t \tag{5}$$

representan una espiral (*espiral de Arquímedes*). Si se quiere eliminar t para hallar su ecuación implícita, basta observar que de [5] se deduce

$$x^2 + y^2 = a^2t^2 \quad , \quad y/x = \operatorname{tg} t$$

de donde

$$x^2 + y^2 = a^2 \operatorname{arc}^2 \operatorname{tg}(y/x) .$$

3. Las ecuaciones $x = t$, $y = 1/t$ son las ecuaciones paramétricas de la hipérbola equilátera $xy = 1$.

4. **Estudio de las curvas.** — Para dibujar una curva dada por su ecuación explícita o implícita o bien por sus ecuaciones paramétricas, se puede proceder mediante la determinación de muchos de sus puntos, uniéndolos luego por un trazo continuo. Sin embargo, de esta manera nunca se sabe el número de puntos necesarios para tener la marcha exacta de la curva, puesto que en intervalos pequeños a veces la curva puede presentar irregularidades imprevistas.

Sea por ejemplo la curva

[6] $$y = -x + 8x^3$$

y consideremos los pares de valores correspondientes

$x = -2$,	$y = -62$	$x = \frac{1}{2}$,	$y = \frac{1}{2}$
$x = -1$,	$y = -7$	$x = 1$,	$y = 7$
$x = -\frac{1}{2}$,	$y = -\frac{1}{2}$	$x = 2$,	$y = 62$
$x = 0$,	$y = 0$	.....	

Señalando estos puntos en el plano, parecería que la curva está bien caracterizada, presentando una forma continua ascendente. Con los puntos anteriores nada haría sospechar la ondulación que presenta en el entorno del origen (fig. 77).

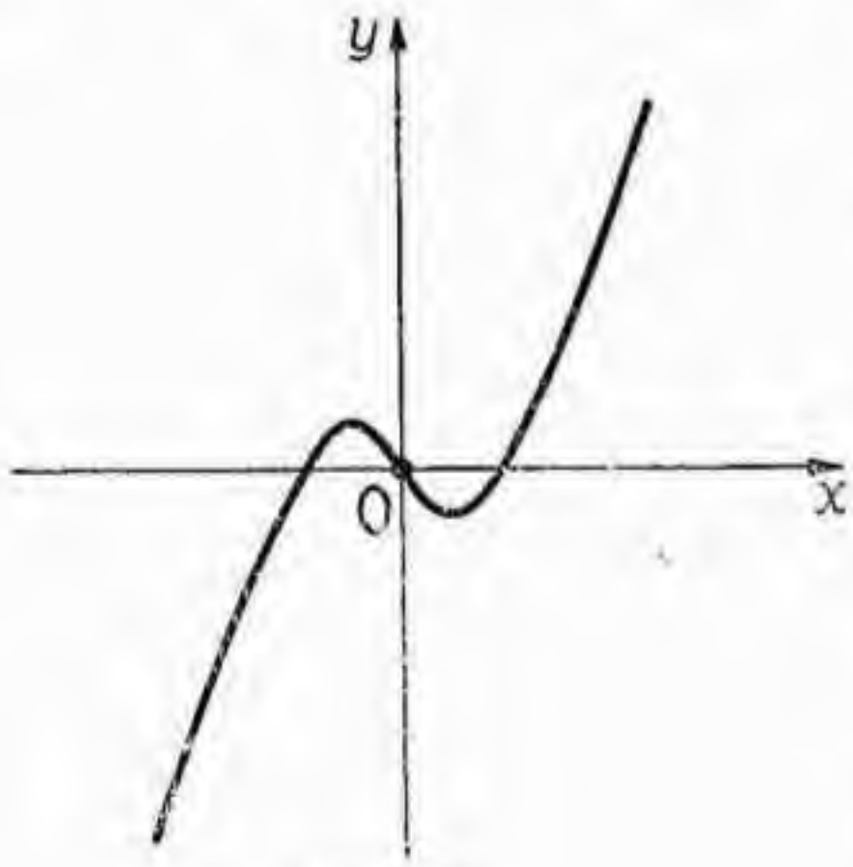

Fig. 77.

De aquí que sea muy conveniente disponer de ciertos criterios para conocer la marcha general de la curva y poderla trazar con un mínimo de puntos calculados directamente. Estos criterîos se basan en los siguientes resultados del cálculo infinitesimal elemental[1].

a) *Tangentes.* La posición de la tangente en un punto da idea de cómo la curva pasa por el mismo.

Hasta ahora, en los casos estudiados de curvas algebraicas elementales (circunferencias, cónicas, cúbicas y algunas cuárticas) hemos mantenido una definición de tangente puramente algebraica. La tangente en un punto $P(x_0, y_0)$ ha sido siempre la recta que tenía en este punto por lo menos dos puntos de intersección confundidos con la curva. Para hallarla considerábamos la ecuación general de todas las rectas que pasan por P, o sea $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ y buscábamos el valor del coefi-

[1] Ver, por ejemplo, REY PASTOR, PÍ CALLEJA, TREJO: *Análisis Matemático*. Tomo I, Cap. VIII, § 33.

ciente λ necesario para que la ecuación en x que resultaba al sustituir en la ecuación de la curva el valor $y = y_0 + \lambda(x - x_0)$, tuviera $x = x_0$ como raíz doble por lo menos.

Para esta definición no hace falta considerar a la tangente como límite de secantes que pasan por P, es decir, no hace falta el concepto de límite, que suele considerarse ajeno al álgebra. Sin embargo, para estudiar curvas no algebraicas es necesario disponer de la definición de tangente como límite de secantes, tal como se hace en cálculo infinitesimal. La tangente aparece entonces como la recta que pasa por P cuyo coeficiente angular es la derivada $y' = dy/dx$ tomada en el punto $P(x_0, y_0)$. Conocido este coeficiente angular, que indicaremos por y'_0 o por $(dy/dx)_0$, la ecuación de la tangente en P es

[7] $$y - y_0 = y'_0(x - x_0).$$

Para hallar y', se tiene

a) Si la curva está dada por su ecuación explícita $y = f(x)$ es

[8] $$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

b) Si la curva está dada por su ecuación implícita $F(x, y) = 0$, derivando esta ecuación respecto de x e indicando con F_x, F_y las derivadas parciales respectivas, es

$$F_x + F_y y' = 0$$

de donde

[9] $$y' = -\frac{F_x}{F_y}.$$

c) Si la curva está dada por sus ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, es

[10] $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Ejemplos: 1. Hallar la tangente a la curva $y = e^x - x$ en el punto $P(0, 1)$. Es $y' = e^x - 1$, y para $x = 0$ resulta $y'_0 = 0$, y según [7] la tangente será $y - 1 = 0$.

2. Consideremos la tangente en el origen a la curva [6]. Es $y' = -1 + 24x^2$ y por tanto $y'_0 = -1$. Luego la tangente buscada es $y = -x$. El conocimiento de esta tangente ya es suficiente para sospechar la ondulación de la curva en el origen (fig. 77).

3. Hallar la tangente a la curva $x^3 - 2xy^6 + y^4 = 0$, en el punto $P(1, 1)$. En este caso para hallar y' hay que aplicar [9]. Es $F_x = 3x^2 - 2y^5$, $F_y = -10xy^4 + 4y^3$, y en el punto (1, 1) estas derivadas parciales valen $F_x = 1$, $F_y = -6$. Por tanto es $y'_0 = 1/6$ y la tangente buscada es $y - 1 = (1/6)(x - 1)$.

4. Hallar la tangente a la espiral de Arquímedes en el punto $t = \pi/2$. En este caso, según [10] es

$$y' = \frac{\operatorname{sen} t + t \cos t}{\cos t - t \operatorname{sen} t}$$

y para $t = \pi/2$, $y'_0 = -(2/\pi)$. La tangente buscada será la recta

$$y - a\pi/2 = -(2/\pi)x.$$

5. Tangente a la curva $y = \log x$ en el punto P(1, 0). Es $y' = 1/x$, $y'_0 = 1$ y la tangente será será $y = x - 1$.

6. Hallar la tangente a la parábola $y^2 - 4x = 0$ en el punto P(4, 4). Es $F_x = -4$, $F_y = 2y$, y según [10], $y' = 2/y$; en el punto P será $y'_0 = 1/2$ y la ecuación de la tangente buscada resulta $y - 4 = (1/2)(x - 4)$, o sea $2y - x - 4 = 0$.

b) *Normal.* Se llama normal a una curva en un punto, a la recta perpendicular a la tangente en el mismo. Si y'_0 es el coeficiente angular de la tangente, el de la normal será $-1/y'_0$ y su ecuación resulta

$$(y - y_0)y'_0 + (x - x_0) = 0$$

donde y'_0 toma una de las formas [8], [9], [10], según la forma como venga dada la curva.

Ejemplos: 1. La normal a la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $x = \pi/6$, $y = 1/2$, siendo $y'_0 = \cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$, será

$$\sqrt{3}\,(y - 1/2) + 2(x - \pi/6) = 0.$$

2. La normal a la curva $y = \log x$ en el punto (1, 0) es

$$y + x - 1 = 0.$$

3. La normal en el origen a la parábola $y = x^2 - 2x$ es

$$2y - x = 0.$$

c) *Puntos de inflexión.* Son aquellos en que la tangente tiene más de dos puntos comunes con la curva confundidos en el punto de contacto. Se caracterizan por ser en ellos la derivada segunda nula, o sea $y''_0 = 0$.

Si es $y''_0 = 0$, $y'''_0 \neq 0$, la curva atraviesa a la tangente en el punto de contacto y es el caso más propiamente llamado punto de inflexión. Si

[11] $y''_0 = 0$, $y'''_0 = 0$, $y^{(4)}_0 = 0$, . . . , $y^{(m-1)}_0 = 0$, $y^{(m)}_0 \neq 0$

la curva atraviesa o no a la tangente según que m sea impar o par.

La demostración de esta propiedad es fácil si se recuerda el desarrollo de Taylor de una función $y = f(x)$. En efecto, en un entorno del punto $y_0 = f(x_0)$ será

$$y = f(x_0 + (x - x_0)) = y_0 + \frac{(x - x_0)}{1!} y'_0 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''_0 + \ldots + \frac{(x - x_0)^m}{m!} y^{(m)}_0 + \ldots$$

La diferencia entre la ordenada $y = f(x)$ de la curva y la

$y = y_0 + y'_0(x - x_0)$ de la tangente en el punto $P(x_0, y_0)$ vale

$$\Delta = \frac{(x - x_0)^2}{2!} y_0'' + \frac{(x - x_0)^3}{3!} y_0''' + \dots$$

y si se cumplen las condiciones [11] será

$$\Delta = \frac{(x - x_0)^m}{m!} y_0^{(m)} + \dots$$

que en un entorno $x_0 \pm h$ suficientemente pequeño de x_0, para que los términos sucesivos del desarrollo no influyan, cambiará o no de signo al pasar de $x = x_0 - h$ a $x = x_0 + h$ según que m sea impar o par.

En el caso de ser m par, si $y_0^{(m)} > 0$, es $\Delta > 0$ y por tanto en un entorno del punto (x_0, y_0) la curva está por encima de la tangente; en cambio si $y_0^{(m)} < 0$, es $\Delta < 0$ y la curva queda por debajo de la tangente. De aquí se deduce que si además de las condiciones [11] es también $y'_0 = 0$, el punto es un mínimo en el primer caso y un máximo en el segundo.

d) *Ramas crecientes y decrecientes. Máximos y mínimos.* Si en un punto P el valor de la ordenada y crece al mismo tiempo que la abscisa x, la curva se dice que es creciente en P. En tal caso el coeficiente angular de la tangente no podrá ser negativo y por tanto será $y'_0 > 0$. Análogamente, si la curva es decreciente en P, será $y'_0 < 0$.

Si $y'_0 = 0$, según lo dicho en c) el punto P será un máximo si $y''_0 < 0$ y un mínimo si $y''_0 > 0$. Si $y''_0 = 0$ hay que seguir la derivación hasta la primera derivada $y_0^{(m)} \neq 0$. Entonces, si m es par el punto P es un mínimo o un máximo, según que sea $y_0^{(m)} > 0$, o bien $y_0^{(m)} < 0$. En resumen:

Si en un punto P el valor de la derivada y'_0 es positivo, la curva es creciente; si es negativo, es decreciente; si es nulo, la curva presenta un máximo o un mínimo si la primera derivada no nula es de orden par (un mínimo si es positiva y un máximo si es negativa) y una inflexión con tangente horizontal si es de orden impar.

Ejemplos: 1. Sea la curva $y = x^3 - 6x^2$. Sus posibles máximos o mínimos se obtendrán resolviendo la ecuación $y' = 3x^2 - 12x = 0$, cuyas raíces son $x = 0$, $x = 4$, a las cuales corresponden los puntos $P_1(0, 0)$, $P_2(4, -32)$. Para ver su naturaleza, hallemos $y''_0 = 6x - 12$, que para P_1 vale $y''_1 = -12 < 0$, y para P_2 vale $y''_2 = 12 > 0$. Luego P_1 es un máximo y P_2 un mínimo. El único punto de inflexión resulta de $y'' = 6x - 12 = 0$, o sea es el punto $x = 2$, $y = -16$. Además, para $x > 4$ es $y' > 0$, o sea la curva es siempre creciente. Bastan estos datos para dibujar la curva.

2. Sea la curva $y = (x - 1)^2(x - 2)^3$. Es

$$y' = (x - 1)(x - 2)^2(5x - 7)$$
$$y'' = 2(x - 2)(10x^2 - 28x + 19).$$

Los puntos para los cuales es $y' = 0$ son $P_1(1, 0)$, $P_2(2, 0)$.

$P_3(7/5, -108/5^5)$. Para P_1 es $y'' < 0$, luego es un máximo. Para P_2 es $y'' = 0$; sin necesidad de hallar y''' se ve que P_2 es un punto de inflexión, en que la curva atraviesa a la tangente, pues para $x < 2$ es $y < 0$ y para $x > 2$ es $y > 0$. Para P_3 es $y'' > 0$, luego es un mínimo. Los puntos de inflexión corresponden a $x = 0$, $x = 2$, $x = 2{,}8$. Observando que para $-\infty < x < 1$ y para $x > 7/5$ es $y' > 0$, o sea la curva es creciente, el trazado de la misma se puede hacer sin dificultad con sólo hallar algún otro punto de referencia por cálculo directo (fig. 78).

3. Sea la curva

$$x = a \operatorname{sen} t \quad , \quad y = a(\log \operatorname{tg} t/2 + \cos t). \tag{12}$$

Para que y sea real, debe ser $\operatorname{tg}(t/2) \geqslant 0$ y por tanto sólo se obtienen puntos distintos de la curva para valores de t del intervalo $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Además los valores t y $\pi - t$ dan el mismo valor de x y el mismo valor, cambiado de signo, de y; o sea, la curva es simétrica respecto del eje x. Bastará estudiar la parte $y > 0$ que corresponde al

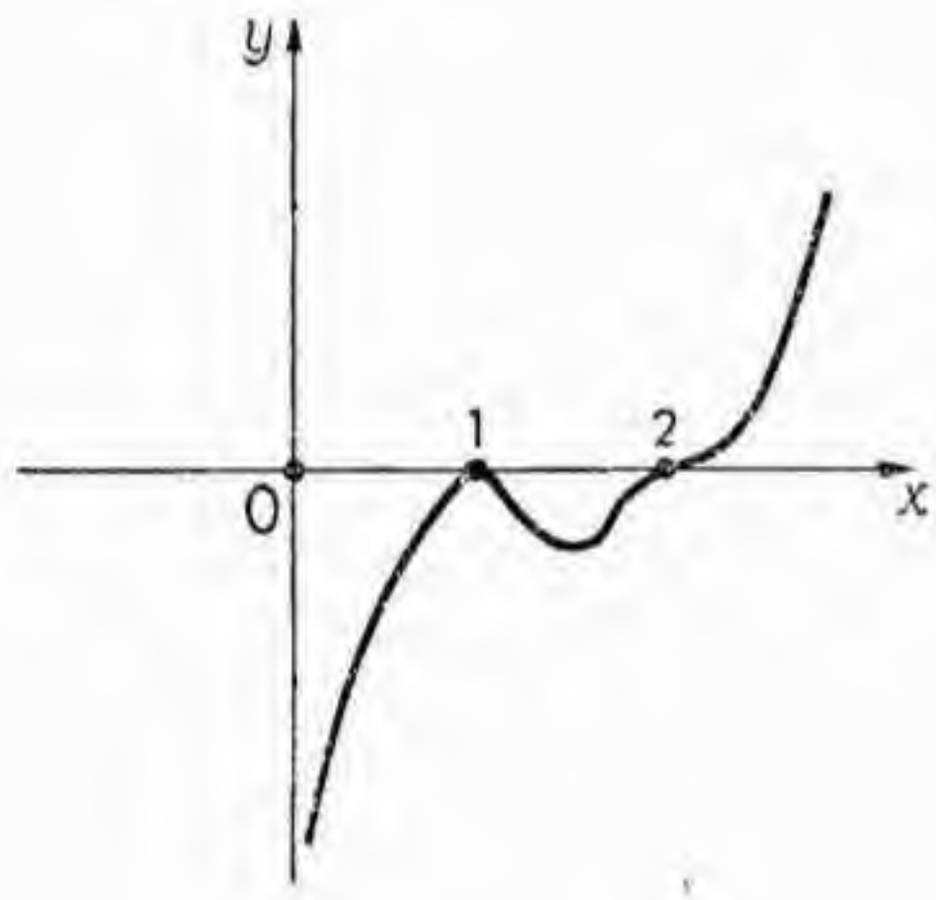

Fig. 78.

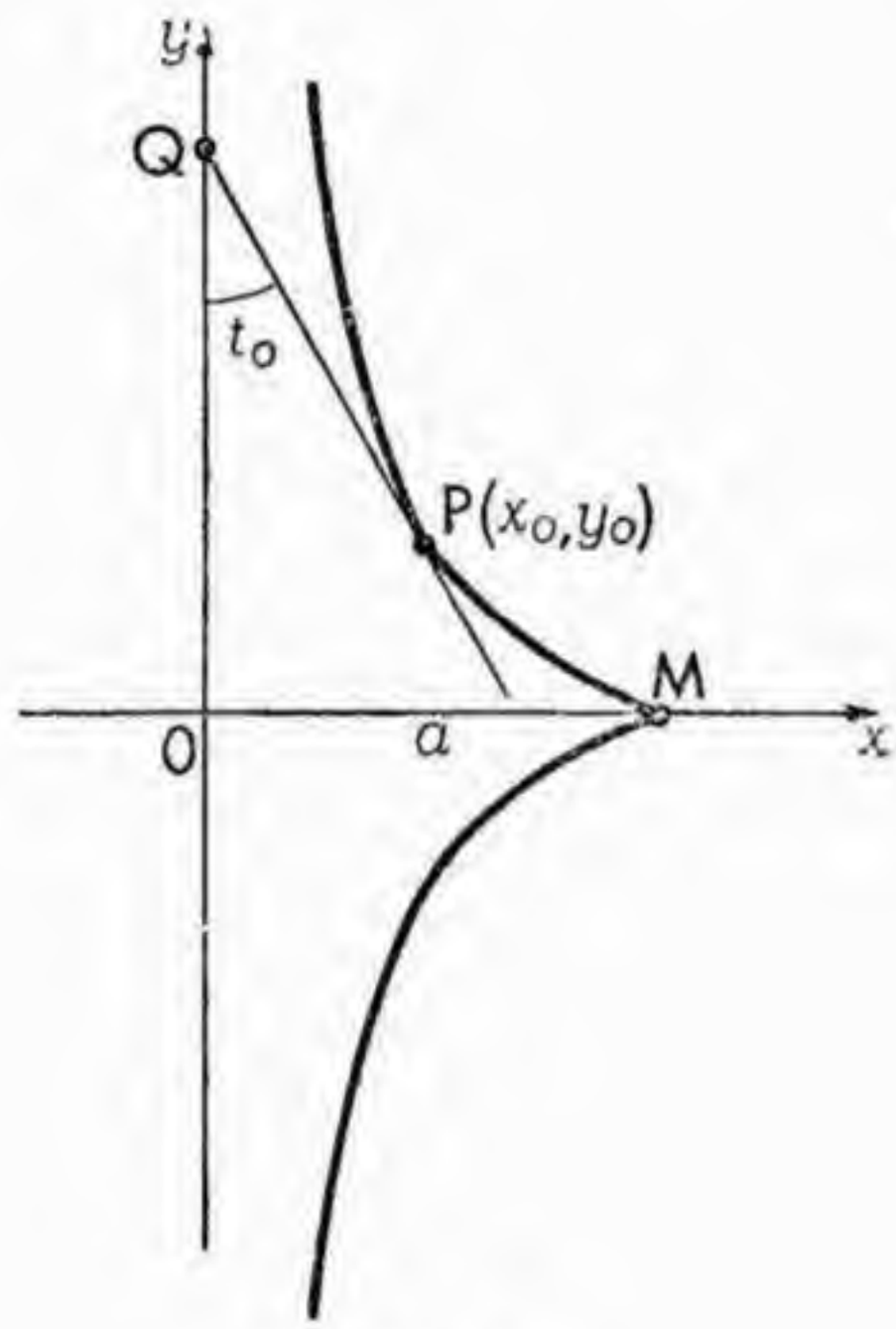

Fig. 79.

intervalo $\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi$. Según [10] es $y' = \cot t$ y por tanto la curva es siempre decreciente en dicho intervalo. A $t = \pi$ corresponde el punto del infinito del eje y y a $t = \pi/2$ el punto $x = a$, $y = 0$; en este punto es $y' = 0$ y por tanto la curva es tangente al eje x. Para $x > a$ no hay curva. La forma de la misma es la de la fig. 79.

Se observa que la tangente en un punto P es $y - y_0 = \cot t_0 (x - x_0)$, la cual corta al eje y en el punto Q de ordenada $y = y_0 - x_0 \cot t_0 = y_0 - a \cos t_0$. La distancia PQ resulta por tanto dada por $PQ^2 = (y - y_0)^2 + x^2 = a^2 \cos^2 t_0 + a^2 \operatorname{sen}^2 t_0 = a^2$. Es decir, la longitud PQ de la tangente es constante. Esta propiedad notable es característica de la curva [12], por lo cual se conoce bajo el nombre de *tractriz*, por ser la trayectoria que describiría un punto, inicialmente en M, atado con una cuerda de longitud a a un móvil que recorriese el eje y a partir de 0.

5. **Ramas infinitas. Asíntotas.** — DEF. 1. Cuando una rama de curva tiene puntos que se alejan infinitamente del origen de coordenadas, se dice que es una *rama infinita*. Sea M un punto de una rama infinita y consideremos la recta OM que lo une con el origen. Hagamos que M se aleje infinitamente describiendo la curva; si la recta OM tiende a una posición límite OM_∞, se dice que ésta es una *dirección asintótica*. No siempre las ramas infinitas admiten direcciones asintóticas; por ejemplo, una espiral $\rho = a\varphi$ es una rama infinita para $\varphi \to \infty$ y carece de dirección asintótica.

DEF. 2. Se dice que una rama infinita tiene como *asíntota* a una recta r, si la distancia de M a r tiende a cero cuando M se aleja infinitamente. No todas las ramas asintóticas admiten asíntota. Por ejemplo, la parábola $y^2 = x$ y la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$, tienen por dirección asintótica el eje x, sin que exista asíntota. Las ramas infinitas que admiten dirección asintótica pero no asíntota, se llaman *ramas parabólicas*.

Si la asíntota r no es paralela al eje y, decir que la distancia a ella del punto M tiende a cero, equivale a decir que la diferencia entre las ordenadas de M y la correspondiente a la misma abscisa de r tiende a cero. En efecto, si D es esta diferencia de ordenadas, d la distancia y α el ángulo que forma r con el eje y, es $d = D \operatorname{sen} \alpha$ y siendo $\alpha \neq 0$, d y D tienden a cero simultáneamente.

Para el estudio y construcción de una curva es muy conveniente saber determinar las direcciones asintóticas y las asíntotas, si existen. Cuando el punto M de la rama infinita se aleja infinitamente, una o las dos de sus coordenadas deben hacerse infinito. Distinguiremos estos dos casos.

a) *Una sola de las coordenadas se hace infinito.* Supongamos por ejemplo que y se hace infinito para $x = x_0$, entonces la recta $x = x_0$ es una asíntota. En efecto, la distancia de un punto $M(x, y)$ de la curva a la recta $x = x_0$ es $|x - x_0|$, la cual tiende a cero cuando $y \to \infty$.

Por tanto, para hallar las asíntotas paralelas al eje y bastará hallar los valores de x para los cuales y se hace infinito (positiva o negativamente). Análogamente, las asíntotas paralelas al eje x se hallarán buscando los valores de y para los cuales x se hace infinito.

Ejemplos: 1. La curva $y = \operatorname{tg} x$ tiene por asíntotas las rectas $x = \pi/2 \pm k\pi$ (k = número entero), puesto que para estos puntos es $y = \infty$.

2. La curva $y = \log x$ tiene por asíntota el eje y, pues para $x = 0$, es $y = -\infty$. En cambio para ningún valor finito de y se hace x infinito, o sea, no hay asíntota paralela al eje x.

3. La curva $y(x-2) + x^2(y-3) = 0$ tiene las asíntotas $x = 1$.

$x = -2$ paralelas al eje y y la $y = 3$ paralela al eje x, como se ve despejando y ó x respectivamente (fig. 80).

4. La curva $x = (1+t)/t$, $y = t^2/(1-t)$ tiene la asíntota $y = 0$ paralela al eje x y la $x = 2$ paralela al eje y (puesto que para $t = 0$ es $x = \infty$, $y = 0$, y para $t = 1$ es $y = \infty$, $x = 2$).

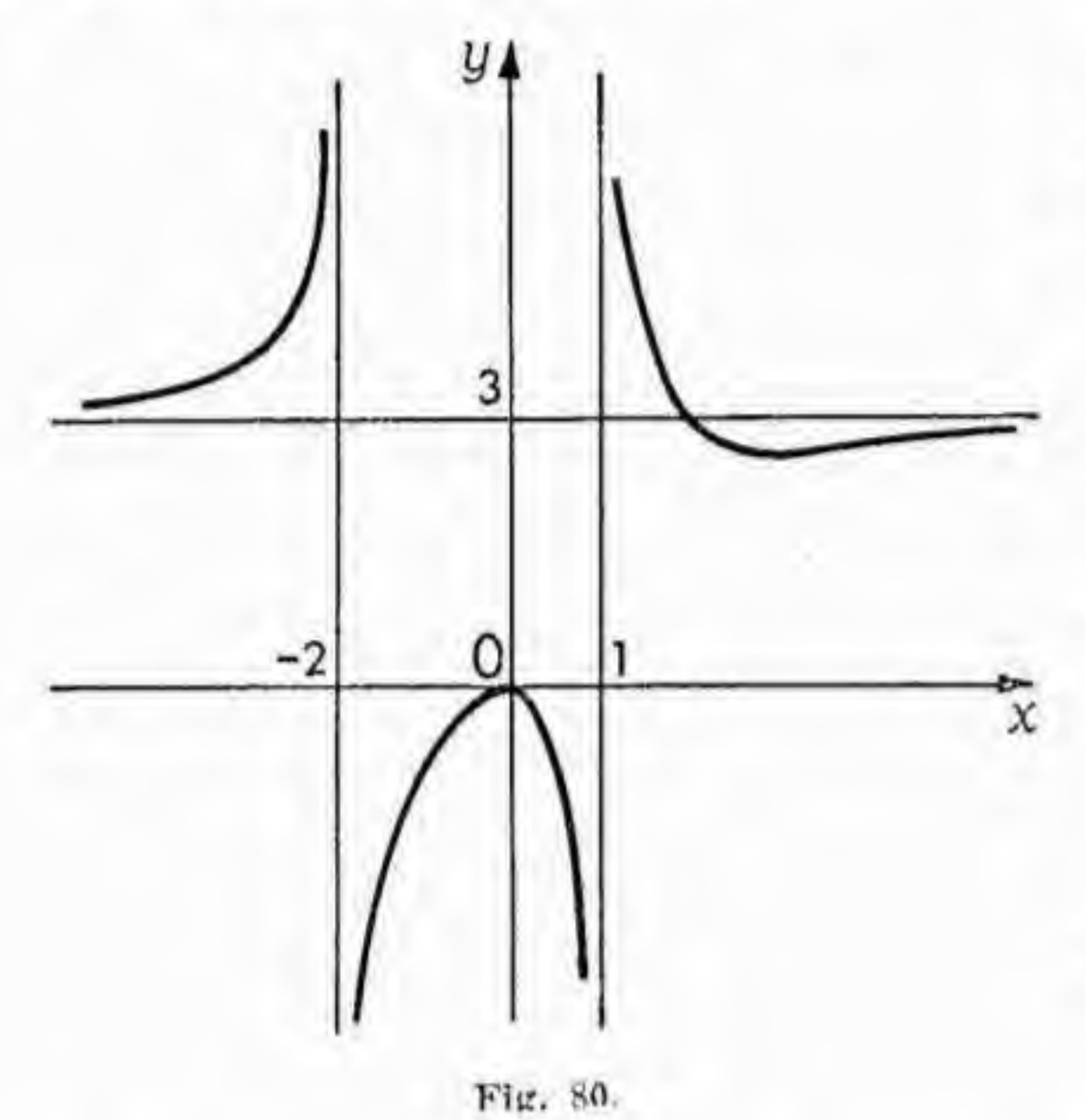

Fig. 80.

b) *Las dos coordenadas se hacen infinitas.* Primero hay que hallar las direcciones asintóticas. El coeficiente angular de la recta que une el punto $M(x, y)$ de la curva con el origen O es y/x; por tanto habrá que hallar $\lim y/x$ para $x \to \infty$ o para $y \to \infty$, que equivale a $\lim y/x$ cuando M se aleja infinitamente. Si este límite existe y es por ejemplo igual a m, la recta $y = mx$ es una dirección asintótica; si el límite no existe se trata de una rama sin dirección asintótica.

Para hallar la asíntota, si existe, correspondiente a la dirección anterior se observa que ella deberá ser de la forma $y = mx + h$ y la cuestión está en determinar h. Para ello observemos que la diferencia de ordenadas entre el punto $M(x, y)$ de la curva y el correspondiente a la misma abscisa de la recta anterior vale $y - mx - h$ (x, y coordenadas de M), y si la recta es una asíntota no paralela al eje y, esta diferencia debe tender a cero cuando M se aleja infinitamente, o sea, debe ser

$$[13] \qquad \lim \; | y - mx - h | = 0$$

donde, bien entendido, x, y son coordenadas de un punto M de la curva. Esta condición [13] sirve para determinar h. La asíntota es entonces la recta $y = mx + h$. Si de [13] se deduce $h = \infty$, se trata de una rama parabólica.

Ejemplos: 1. Hallar las asíntotas de la curva $4x^2 - y^2 - x = 0$. Para hallar $\lim y/x$ escribamos la ecuación de la curva en la forma $4 - (y/x)^2 - (1/x) = 0$. Llamando $\lim y/x = m$, para $x \to \infty$, resulta $4 - m^2 = 0$, de donde $m = \pm 2$. Por tanto, las direcciones asintóticas son $y = \pm 2x$. Para hallar las asíntotas pongamos $y = \pm 2x + h$ en la ecuación de la curva; queda $\mp 4hx - h^2 - x = 0$ y como hay que hacer $x \to \infty$, conviene escribir esta ecuación en la forma $(\mp 4h - 1) - (h^2/x) = 0$ que para $x \to \infty$ nos da $h = \mp 1/4$. Por tanto las asíntotas son $y = 2x - 1/4$, $y = -2x + 1/4$.

2. Hallar las asíntotas de la curva

$$x = t/(1-t) \quad , \quad y = t^2/(1-t).$$

Los puntos del infinito corresponden a los valores $t=1$, $t=\infty$. Para el segundo es $x=-1$, $y=\infty$; por tanto $x=-1$ es una asíntota. Para el primero es $y/x=t=1$; luego $y=x$ es una dirección asintótica. La asíntota se obtendrá escribiendo que debe ser $\lim(y-x-h)=$ $=0$ para $t=1$; como $y-x=-t$, resulta $h=-1$. Luego la segunda asíntota es $y=x-1$.

3. Sea la curva $y=x+e^{-x}\operatorname{sen} x+1$. Para $x\to\infty$ es $\lim y/x=1$. Por tanto la dirección asintótica única es $y=x$. Para hallar la asíntota se tiene $y-x-h=e^{-x}\operatorname{sen} x+1-h$, y escribiendo [13] resulta $h=1$. Luego la asíntota es $y=x+1$.

4. Sea la curva $y=\log x$. Por ser, para $x\to\infty$, $\lim y/x=0$, resulta que $y=0$ es una dirección asintótica. Para ver si hay asíntota, según [13] hay que hallar h de manera que sea, para $x\to\infty$, $\lim(y-h)=\lim(\log x-h)=0$, lo cual obliga que $h=\infty$. Se trata, por tanto, de una rama parabólica.

OBSERVACIONES: 1. Decir que OM_∞ es una dirección asintótica equivale a decir que el punto impropio M_∞ pertenece a la curva. Entonces la recta MM_∞, o sea, la paralela por el punto M a la dirección asintótica, es una secante de la curva. Cuando $M\to M_\infty$ esta secante tiende a la asíntota r (supuesto que existe). Por tanto, según la definición de tangente como límite de una secante cuyos puntos de intersección con la curva tienden a coincidir, resulta que las asíntotas admiten también la siguiente definición: *las asíntotas son las tangentes a la curva en los puntos del infinito de la misma, cuando éstas existen y son rectas propias.*

Esta definición es más cómoda que la anterior sobre todo para las curvas algebraicas.

2. A partir de la propiedad anterior, podría creerse que la asíntota r puede también definirse como límite de la tangente en el punto M cuando este punto se aleja infinitamente (siempre recorriendo la curva). Sin embargo esta definición sería más restringida que la adoptada. Por ejemplo, la curva

$$y = x + \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}$$

según la definición adoptada tiene por asíntota $y=x$. En cambio la tangente en el punto $M(x,y)$ tiene por coeficiente angular $y'=1+2\cos x^2-$ $-(\operatorname{sen} x^2)/x$ que para $x\to\infty$ (o sea $M\to M_\infty$) no tiene límite, por oscilar siempre $\cos x^2$ entre $+1$ y -1.

EJERCICIOS

1. La asíntota de la curva $y=x+e^{-x}$ es $y=x$.
2. La curva $y=ex^{1/x}$ tiene las asíntotas $x=0$, $y=x+1$.
3. La curva $y=x+(1/x)\operatorname{sen} x+1$ tiene la asíntota $y=x+1$.
4. Las asíntotas de la curva $y=1/\log x$ son $x=1$, $y=0$.
5. La asíntota de la curva

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \qquad y = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

es la recta $y+x+a=0$.

6. **Curvas en coordenadas polares.** — El estudio de una curva dada por su ecuación en coordenadas polares

[14] $$\varrho = \varrho(\varphi) \quad \text{o bien} \quad F(\varrho, \varphi) = 0$$

puede hacerse observando que la misma equivale a las ecuaciones paramétricas

$$x = \varrho(\varphi)\cos\varphi \quad , \quad y = \varrho(\varphi)\operatorname{sen}\varphi .$$

Por ejemplo, el coeficiente angular de la tangente en un punto ϱ, φ, o sea, la tangente trigonométrica del ángulo θ que forma la tangente con el eje x, según (§ 24-[8]) valdrá

[15] $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\varrho' \operatorname{sen}\varphi + \varrho\cos\varphi}{\varrho'\cos\varphi - \varrho\operatorname{sen}\varphi} = \frac{\varrho' \operatorname{tg}\varphi + \varrho}{\varrho' - \varrho\operatorname{tg}\varphi} ,$$

donde ϱ' indica la derivada de ϱ respecto de φ. De aquí se deduce que el ángulo V que forma la tangente a la curva con el radio vector (fig. 81) está dado por

$$\operatorname{tg} V = \operatorname{tg}(\theta - \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi} .$$

Sustituyendo en esta expresión el valor [15] de $\operatorname{tg}\theta$ resulta

[16] $$\operatorname{tg} V = \frac{\varrho}{\varrho'} .$$

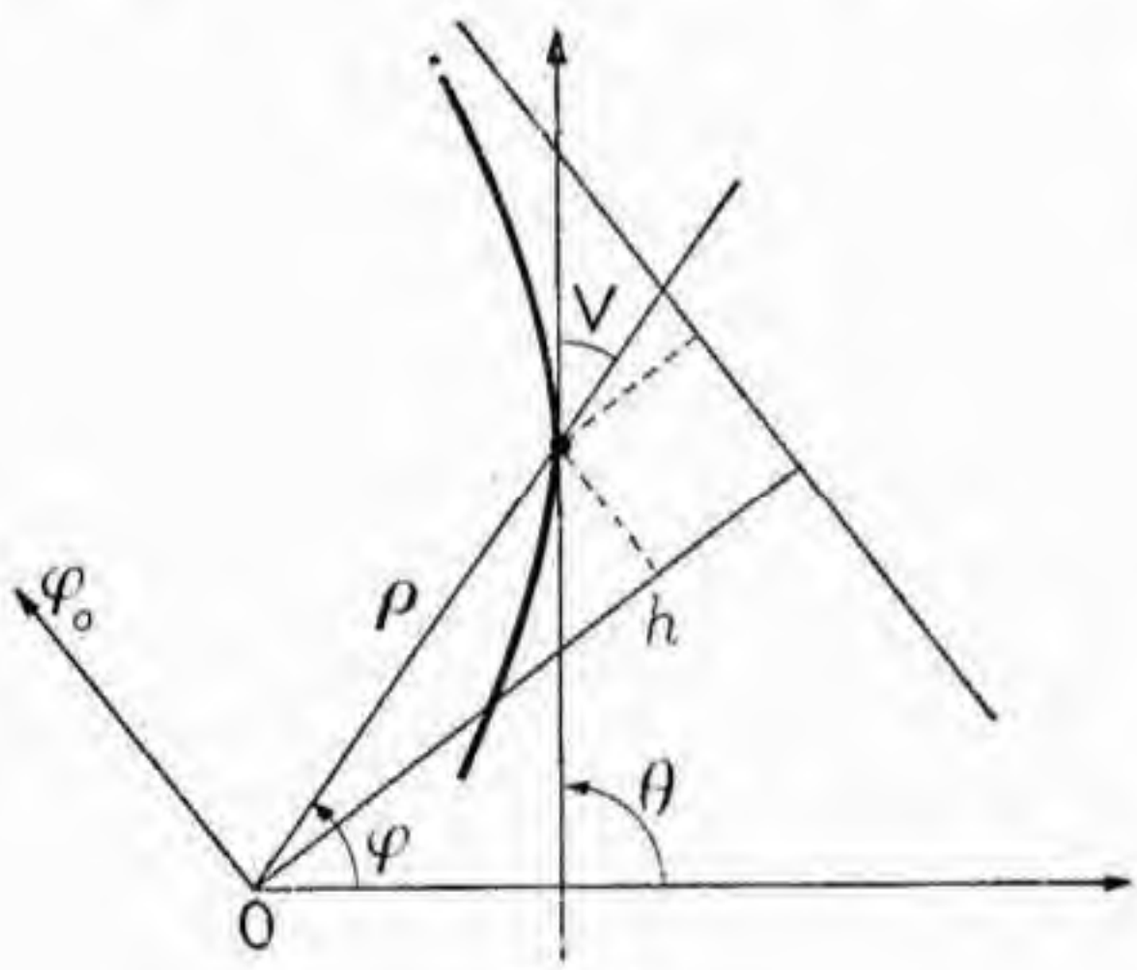

Fig. 81.

Esta fórmula es muy útil para conocer la marcha de la curva en el entorno de un punto.

La determinación de las direcciones asintóticas de una curva dada por una de las ecuaciones [14], se hace buscando los valores de φ para los cuales ϱ se hace infinito. Una vez determinadas las direcciones asintóticas, las asíntotas se determinan por su distancia h al origen O. Supongamos, por ejemplo, que $\varphi = \varphi_0$ sea una dirección asintótica. La distancia de un punto $\varrho(\varphi)$ de la curva a la recta paralela a la dirección φ_0, a una distancia h del origen, vale $|\varrho(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi_0 - \varphi) - h|$, y si esta distancia debe tender a cero cuando $\varphi \to \varphi_0$, resulta que h estará determinado por $h = \lim(\varrho(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0))$ para $\varphi \to \varphi_0$. Si este límite resulta infinito, la rama es parabólica.

Ejemplos: 1. La curva $\varrho = 1/(\pi/4 - \varphi)$ tiene $\varphi = \pi/4$ por dirección asintótica. La asíntota es la paralela a esta dirección a distancia 1

del origen, puesto que el $\lim (\operatorname{sen}(\pi/4 - \varphi)/(\pi/4 - \varphi)$ para $\varphi \to \pi/4$ vale 1.

2. La curva $\varrho^2 \cos^3 2\varphi = 4$ tiene $\varphi = \pi/4$, $3\pi/4$ por direcciones asintóticas. Las ramas correspondientes son ramas parabólicas, pues para $\varphi \to \pi/4$ es $\lim (\operatorname{sen}(\pi/4 - \varphi)/\cos^{3/2} 2\varphi) = \infty$.

3. La curva $\varrho = 1/\operatorname{tg}\varphi$ tiene $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ por direcciones asintóticas. Las dos asíntotas distan del origen $h = 1$ y están situadas a un lado y al otro del eje polar.

§ 25. Lugares geométricos. Curvas clásicas

1. **Lugares geométricos.** — Def. 1. Un conjunto de puntos del plano se dice que es un lugar geométrico respecto de una cierta propiedad A cuando se cumplen las dos condiciones siguientes: a) Todo punto que posea la propiedad A pertenece al lugar; b) Todo punto del lugar posee la propiedad A.

Por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otros dos fijos P, Q, es la recta perpendicular en el punto medio del segmento PQ. Aquí la propiedad A es la de "equidistar de P y Q".

La mayoría de las curvas clásicas fueron introducidas o caracterizadas como lugares geométricos respecto de cierta propiedad. Ya hemos visto el ejemplo de las cónicas y de otras curvas más complicadas, como las curvas de Cassini (§ 24-7), y en este apartado vamos a considerar algunas otras.

Un lugar geométrico no necesita, sin embargo, ser una curva; puede ser un área o reducirse a un número finito de puntos. Por ejemplo, el lugar geométrico de los puntos cuya suma y cuya diferencia de distancias a otros dos puntos fijos son iguales a segmentos dados, está formado por los cuatro puntos de intersección de una elipse y una hipérbola que tienen dichos puntos como focos. El lugar geométrico de los puntos que distan más de una recta dada que de un punto exterior a ella, está formado por todos los puntos interiores a una parábola.

Los métodos de la geometría analítica son los más indicados para estudiar lugares geométricos. El método consiste simplemente en llamar x, y a las coordenadas de un punto del lugar y escribir las condiciones que expresan que efectivamente dicho punto pertenece al mismo. Estas condiciones serán ciertas ecuaciones (o inecuaciones) que ligarán x, y con los datos del problema; ellas serán las ecuaciones del lugar geométrico buscado. A veces, las variables x, y aparecen ligadas junto con otros parámetros, que no son dados, y que habrá que eliminar para obtener la ecuación final. Para que los cálculos resulten lo más simples posibles, conviene siempre elegir el sistema de coordenadas más apropiado.

Ejemplos: 1. *Lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a otros dos fijos A, B es igual a una constante dada r.*

Elijamos la recta AB como eje x y el punto medio del segmento AB como origen de coordenadas. Con esto las cordenadas de A y B seran de la forma $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$. Sea $P(x, y)$ un punto del lugar. La condición del problema se escribe

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}=r^2$$

que será la ecuación del lugar buscado. Ella puede escribirse

$$(1-r^2)(x^2+y^2+a^2)-2a(1+r^2)x=0.$$

Si $r=1$, queda $x=0$, o sea el lugar geométrico es el eje y. Si $r\neq 1$, el lugar es una circunferencia cuyo centro está sobre el eje x.

2. *Lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a otra dada y a una recta fija.*

Tomemos por eje y la recta dada y por eje x la normal trazada a la misma por el centro de la circunferencia dada; sea $C(a, 0)$ este centro y r el radio. Si $P(x, y)$ es un punto del lugar, las condiciones del enunciado equivalen a que la distancia de P a la recta (que es x) sea igual a la distancia de P a C menos r, o sea

$$x=\sqrt{(x-a)^2+y^2}-r$$

o bien

$$y^2-2(a+r)x+a^2-r^2=0.$$

Ésta es la ecuación del lugar geométrico buscado que resulta, por tanto, una parábola. Buscar, como ejercicio, el foco y el vértice de esta parábola.

3. *Lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una circunferencia trazadas por uno de sus puntos.*

Tomemos este punto como centro de coordenadas y el diámetro que pasa por él como eje x. La ecuación de la circunferencia dada será de la forma

$$x^2+y^2-2rx=0$$

siendo $(r, 0)$ el centro y r el radio.

Una cuerda será $y=\lambda x$, que cortará a la circunferencia en el punto $x=2r/(1+\lambda^2)$, $y=2r\lambda/(1+\lambda^2)$. El punto medio de la cuerda será, por tanto,

$$x=\frac{r}{1+\lambda^2},\quad y=\frac{r\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Estas son las ecuaciones paramétricas del lugar buscado. Si se quiere la ecuación implícita hay que eliminar λ, para lo cual basta sustituir en cualquiera de las ecuaciones anteriores $\lambda=y/x$. Queda con ello la ecuación $x^2+y^2-rx=0$, o sea, el lugar buscado es una circunferencia de radio $r/2$ que pasa por O y por el centro C de la circunferencia dada, que por otra parte, es fácil de deducir por consideraciones geométricas.

2. **Podarias.** — Sea O un punto fijo del plano y C una curva dada. Para cada punto A de C consideremos la tangente a la curva y por O tracemos la normal a la misma. Sea P el pie de esta normal (fig. 82). Al variar la tangente el punto P describirá una curva que se llama la *podaria* de C respecto del punto O. Es decir:

DEF. 2. *Se llama podaria de una curva C respecto de un*

punto O al lugar geométrico de los pies de las normales trazadas por el punto O a las tangentes de C.

Para hallar la ecuación de la podaria, conviene en general tomar el punto O como origen de coordenadas. Si la curva C está dada en la forma implícita $F(x, y) = 0$, la tangente en el punto x_0, y_0 es (§ 24-4, b)

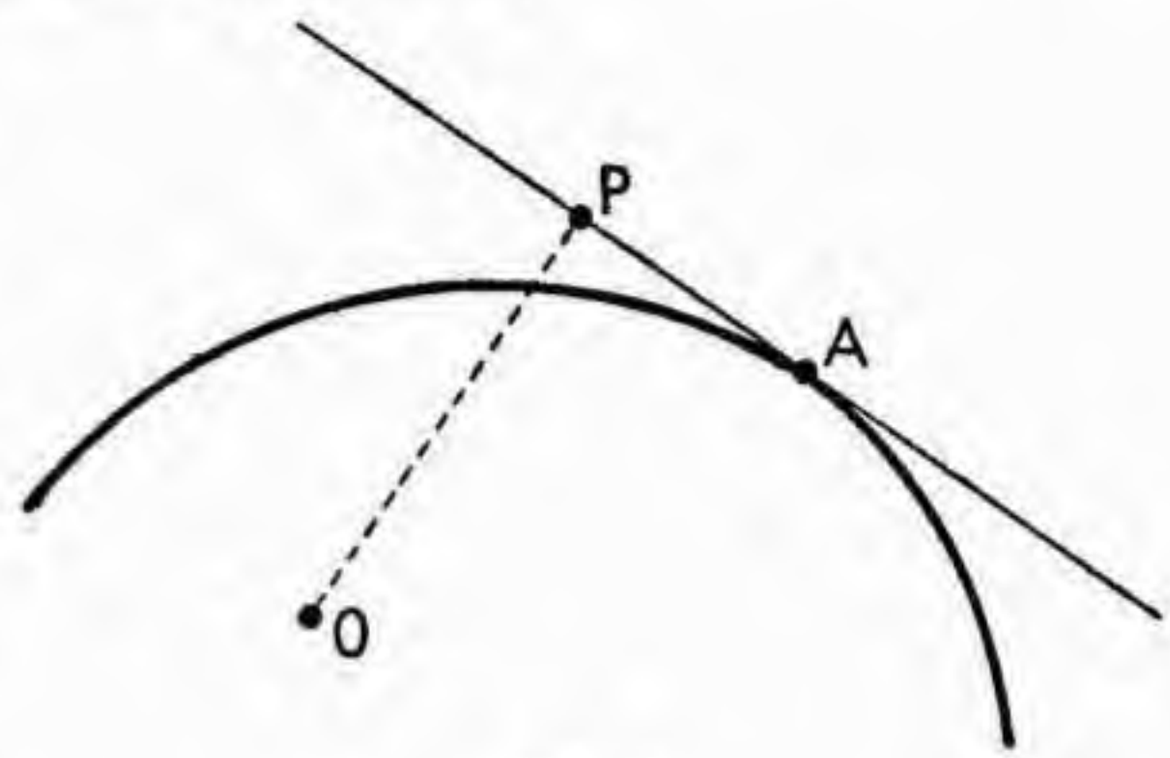

Fig. 82.

$$[1] \qquad (x - x_0)F_{x_0} + (y - y_0)F_{y_0} = 0$$

y la recta normal a ella por el origen O será

$$[2] \qquad F_{x_0}\, y - F_{y_0}\, x = 0.$$

Las coordenadas del punto P son las soluciones del sistema [1], [2] donde x_0, y_0 están ligadas por la ecuación de la curva $F(x_0, y_0) = 0$. Por tanto, si entre las ecuaciones [1], [2] y $F(x_0, y_0) = 0$ se pueden eliminar x_0, y_0, se tendrá una cierta ecuación $E(x, y) = 0$ que se satisfará para todos los pares de valores x, y, para los cuales existen ciertos x_0, y_0 que cumplen [1], [2] y $F(x_0, y_0) = 0$. La ecuación $E(x, y) = 0$ será por tanto la ecuación de la podaria.

En los números siguientes vamos a ver ejemplos del método.

3. **Podaria de la parábola respecto del vértice. Cisoide.** — La podaria de la parábola respecto de su vértice se llama *cisoide*.

Sea la parábola

$$[3] \qquad y^2 + 2px = 0.$$

La tangente en el punto x_0, y_0 es

$$p(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$$

o bien, siendo $y_0^2 + 2px_0 = 0$,

$$p(x + x_0) + y_0 y = 0$$

y la normal a esta recta por el origen será

$$y_0 x - py = 0.$$

De ambas ecuaciones se deduce

$$y_0 = \frac{py}{x}, \quad x_0 = -\frac{x^2 + y^2}{x}$$

y puesto que x_0, y_0 es un punto de la parábola [3], escribiendo que se satisface $y_0^2 + 2px_0 = 0$, resulta

$$py^2 - 2x(x^2 + y^2) = 0$$

que será la ecuación de la podaria buscada o cisoide [1].

Para estudiar la forma de esta curva, se observa que puede escribirse en la forma explícita

$$y = \pm \sqrt{\frac{2x^3}{p - 2x}}$$

que nos dice que la cisoide tiene las siguientes propiedades:

a) Es simétrica respecto del eje x.

b) Solamente es real en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant p/2$.

c) Para $x = p/2$ es $y = \infty$; por tanto la curva tiene por asíntota la recta $x = p/2$.

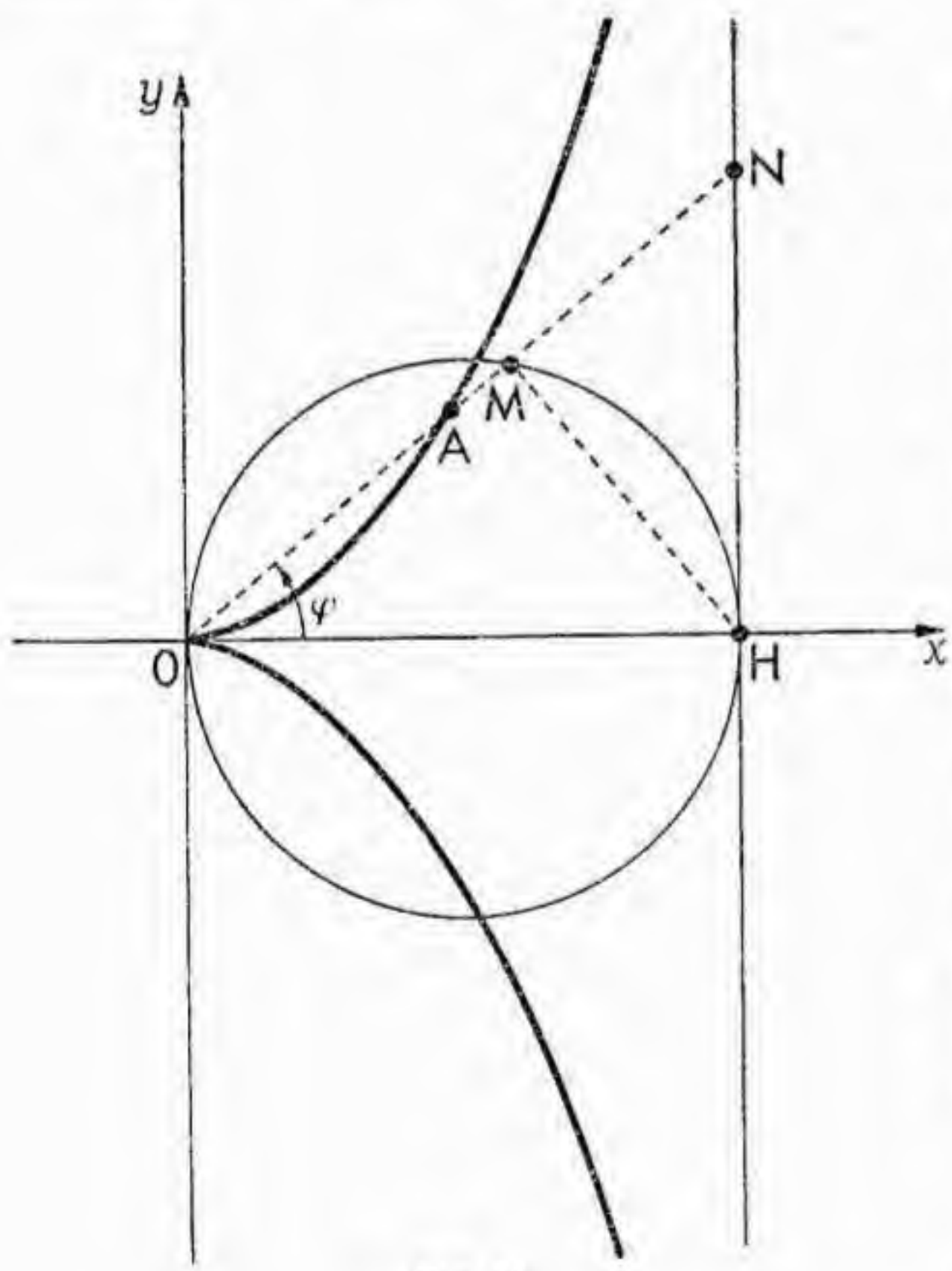

Fig. 83.

d) Es

$$y' = \frac{3p - 4x}{y(p - 2x)^2} x^2$$

y por tanto, para $y > 0$ es siempre (entre $0 \leqslant x \leqslant p/2$ que la curva está definida) $y' > 0$, o sea, la curva es monótona creciente.

Estos datos son suficientes para el trazado de la curva, que tiene la forma indicada en la fig. 83.

La ecuación de la cisoide en coordenadas polares, poniendo $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \operatorname{sen} \varphi$, $\rho^2 = x^2 + y^2$ resulta

$$2\varrho = p \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \varphi .$$

De esta forma se deduce otra definición de la cisoide, que permite su fácil construcción geométrica por puntos. En efec-

[1] Se acostumbra llamar a esta curva la *cisoide de Diocles*, por atribuirse su descubrimiento a este matemático griego del siglo II antes de J. C., quien la utilizó para resolver el problema de la duplicación del cubo.

to, consideremos el círculo de diámetro $OH = p/2$. Según la fig. 83 será

$$ON = OH/\cos\varphi \quad , \quad OM = OH\cos\varphi \quad , \quad OH = p/2$$

y por lo tanto

$$ON - OM = \frac{p\,\text{sen}^2\varphi}{2\cos\varphi} = (p/2)\,\text{sen}\,\varphi\,\text{tg}\,\varphi = \varrho.$$

Es decir, los puntos A de la cisoide se obtienen tomando sobre cada radio vector ON un segmento $OA = ON - OM$.

4. **Podarias de la elipse y de la hipérbola respecto del centro.** — La podaria de la elipse o de la hipérbola respecto de uno de sus focos es en los dos casos el llamado círculo principal, cuyo centro es el centro de la cónica y radio el semieje mayor o el semieje real respectivamente, como ya se vió al tratar del círculo principal de las cónicas. Veamos ahora las podarias respecto del centro de la cónica.

Consideremos primero el caso de la elipse. Las ecuaciones [1] y [2] son ahora

$$[4] \qquad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0 \quad , \quad a^2y_0x - b^2x_0y = 0$$

con la condición

$$[5] \qquad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0.$$

De [4] se deduce

$$x_0 = \frac{a^2x}{x^2 + y^2} \quad , \quad y_0 = \frac{b^2y}{x^2 + y^2}$$

y sustituyendo estos valores en [5] resulta que la ecuación de la podaria buscada es

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$$

que es una curva de cuarto orden, simétrica respecto del origen, del tipo de las llamadas cuárticas bicirculares (§ 23-7).

Para la hipérbola los cálculos son exactamente los mismos, con sólo sustituir b^2 por $-b^2$. Resulta por tanto

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$$

que es una curva de Cassini (§ 23-7). Para la hipérbola equilátera, $a = b$, la podaria resulta una lemniscata (§ 23-7).

5. **Concoides.** — Sea C una curva fija y O un punto dado, unamos O con un punto P de la curva y tomemos sobre esta recta y a partir de P dos segmentos $PA = PA'$ de una longitud dada k (fig. 84). Cuando P. recorre la curva C, los puntos A y A′ describirán cada uno una cierta curva. El conjunto de estas dos curvas se llama *concoide* de intervalo k de la curva C respecto del punto O.

La ecuación de la concoide es inmediata si se utilizan coordenadas polares de centro O. En efecto, si $\varrho = f(\varphi)$ es la ecuación de la curva dada C, la ecuación de la concoide será

$$[6] \qquad \varrho = f(\varphi) \pm k$$

Consideremos dos ejemplos:

a) *Concoide de la recta* o *concoide de Nicomedes*[1]. Tomemos como eje polar la recta por O perpendicular a la recta dada r, con lo cual la ecuación de esta última será

$$\varrho = a/\cos\varphi \tag{7}$$

siendo $a = \mathrm{OH}$ la distancia de O a r (fig. 85).

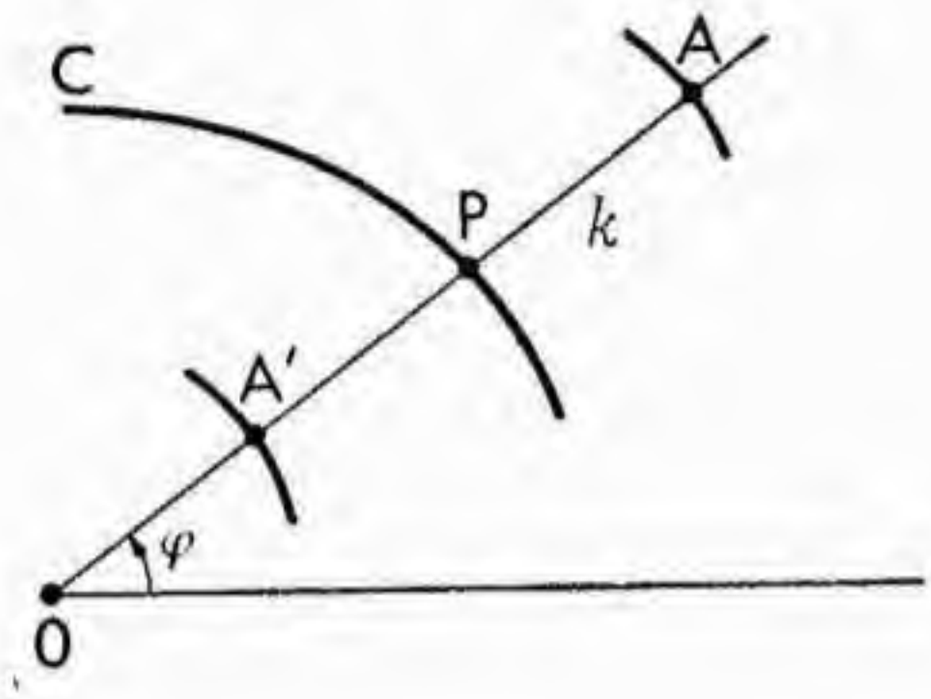

Fig. 84.

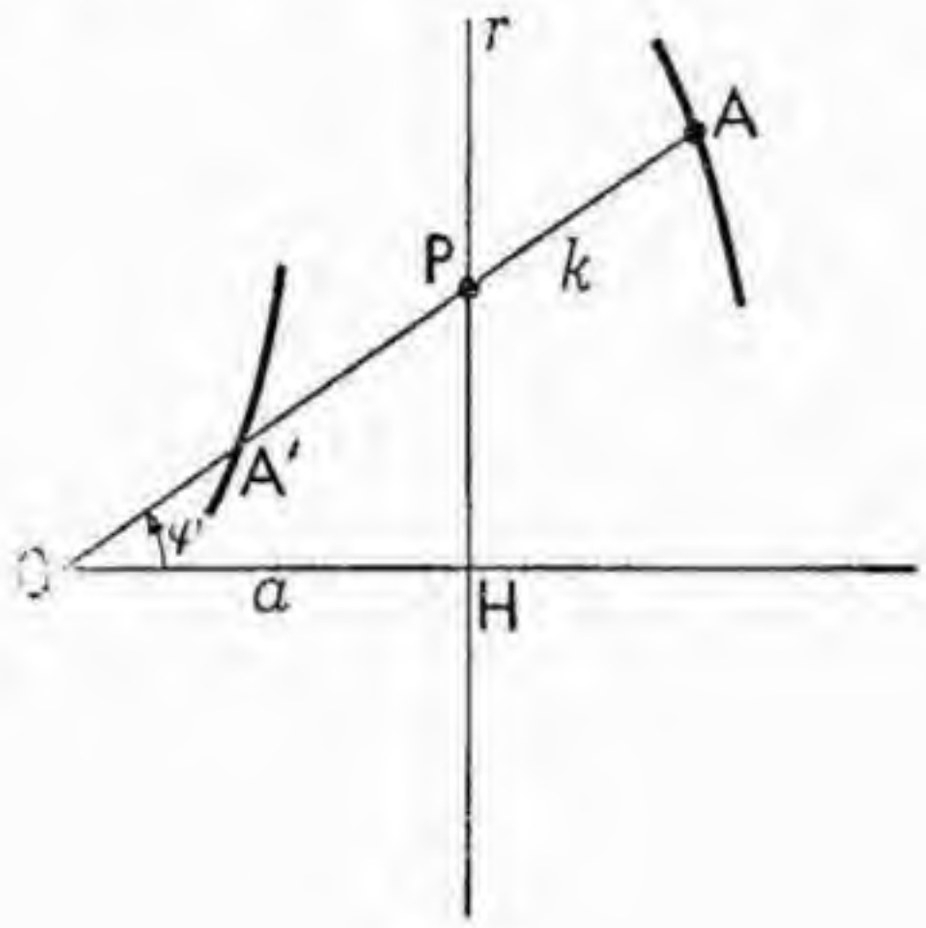

Fig. 85.

La ecuación de la concoide será

$$\varrho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm k. \tag{8}$$

La ecuación en coordenadas cartesianas se obtiene inmediatamente multiplicando ambos miembros de [8] por $\cos\varphi$, y sustituyendo $\varrho\cos\varphi = x$, $\cos\varphi = x/\sqrt{x^2+y^2}$, con lo cual se obtiene después de racionalizar,

$$(x-a)^2\,(x^2+y^2) - k^2x^2 = 0. \tag{9}$$

Se trata por tanto de una curva de 4º orden, simétrica respecto del eje x (puesto que si x, y es un punto, también lo es $(x, -y)$) y con la asíntota $x = a$, como se obtiene al despejar y.

La concoide de la recta [9] presenta diversas formas según que sea $k > a$, $k < a$ o bien $k = a$. Ellas se estudian fácilmente en la forma polar [8]. Si $k > a$, la curva pasa por el origen, formando un bucle cuyas tangentes en el origen corresponden a los valores de φ para los cuales es $\varrho = 0$, o sea para $a \pm k\cos\varphi = 0$, es decir, $\varphi = \arccos(a/k)$. Si $k < a$, es siempre $\varrho > 0$ y la curva no pasa por el origen. Si $k = a$,

[1] Introducida por Nicomedes (siglo II antes de J. C.) en relación con los problemas de la duplicación del cubo y de la trisección del ángulo.

caso intermedio entre los dos anteriores, la curva pasa por el origen pero la única dirección según la cual ϱ se anula es $\varphi = 0$.

Las tres clases de concoides de la recta están representadas de la fig. 86.

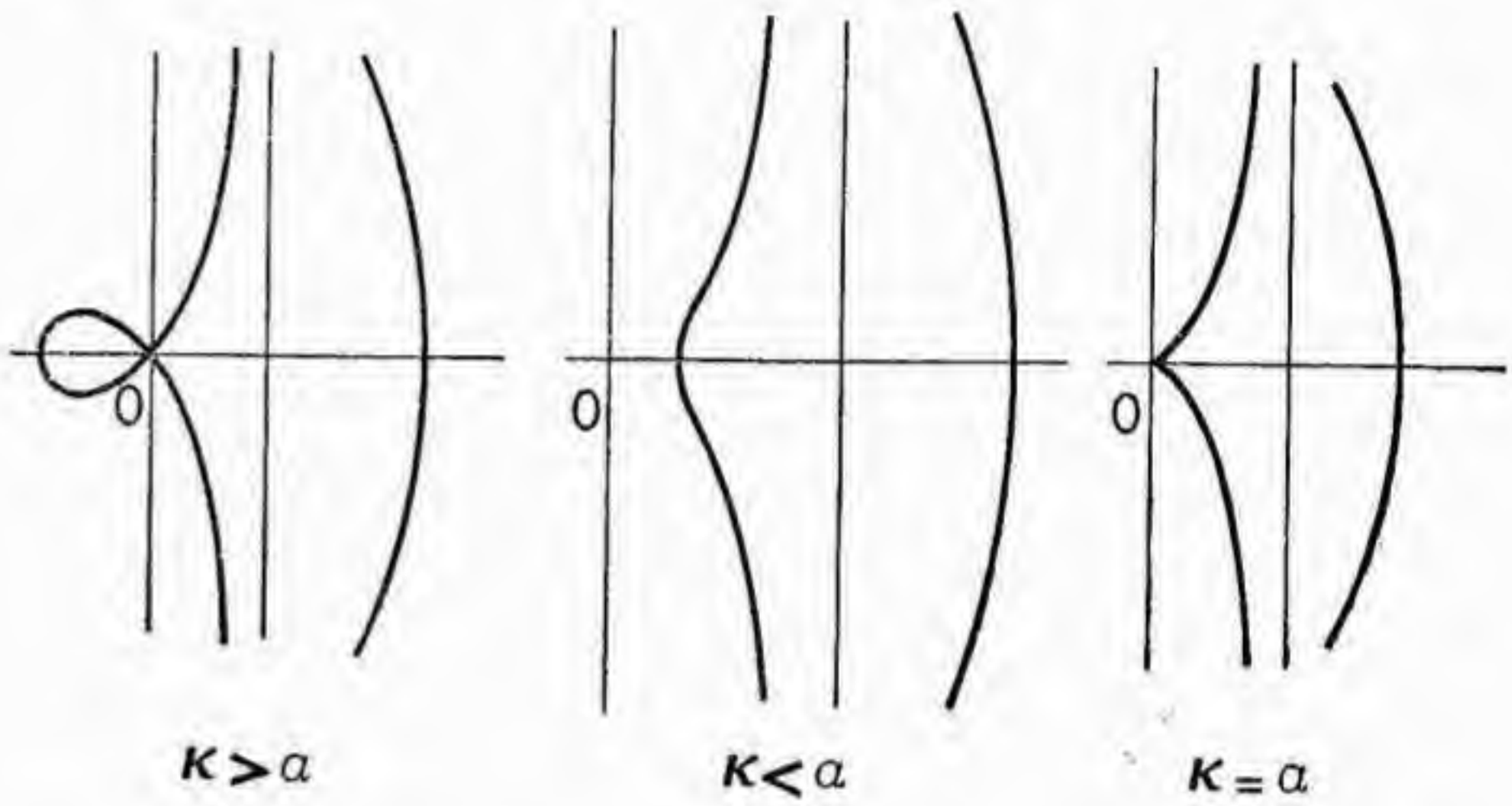

Fig. 86.

b) *Concoide de la circunferencia: caracol de Pascal.* Es interesante la concoide de la circunferencia respecto de uno de sus puntos. Llamando a al diámetro de la circunferencia, su ecuación en coordenadas polares es

$$\varrho = a \cos \varphi$$

y por tanto la ecuación de la concoide es

[10]
$$\varrho = a \cos \varphi \pm k.$$

De aquí se pasa fácilmente a la ecuación de coordenadas cartesianas, resultando

[11]
$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) + (a^2 - k^2)x^2 - k^2y^2 = 0$$

que indica que se trata de una curva de 4º orden.

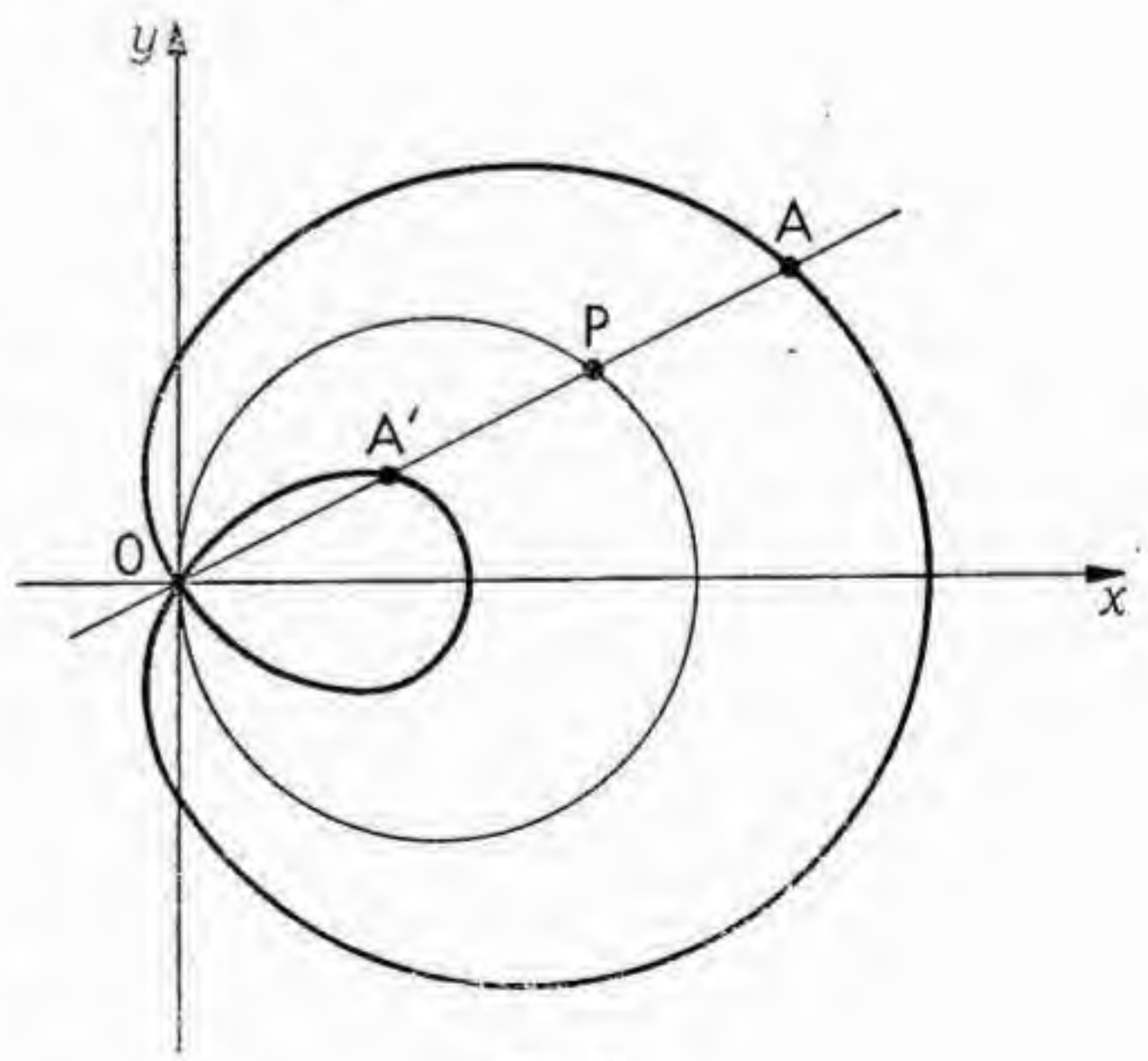

Fig. 87.

Ésta concoide de la circunferencia se llama *caracol de Pascal* y presenta tres formas distintas según sea $k < a$, $k > a$ o bien $k = a$.

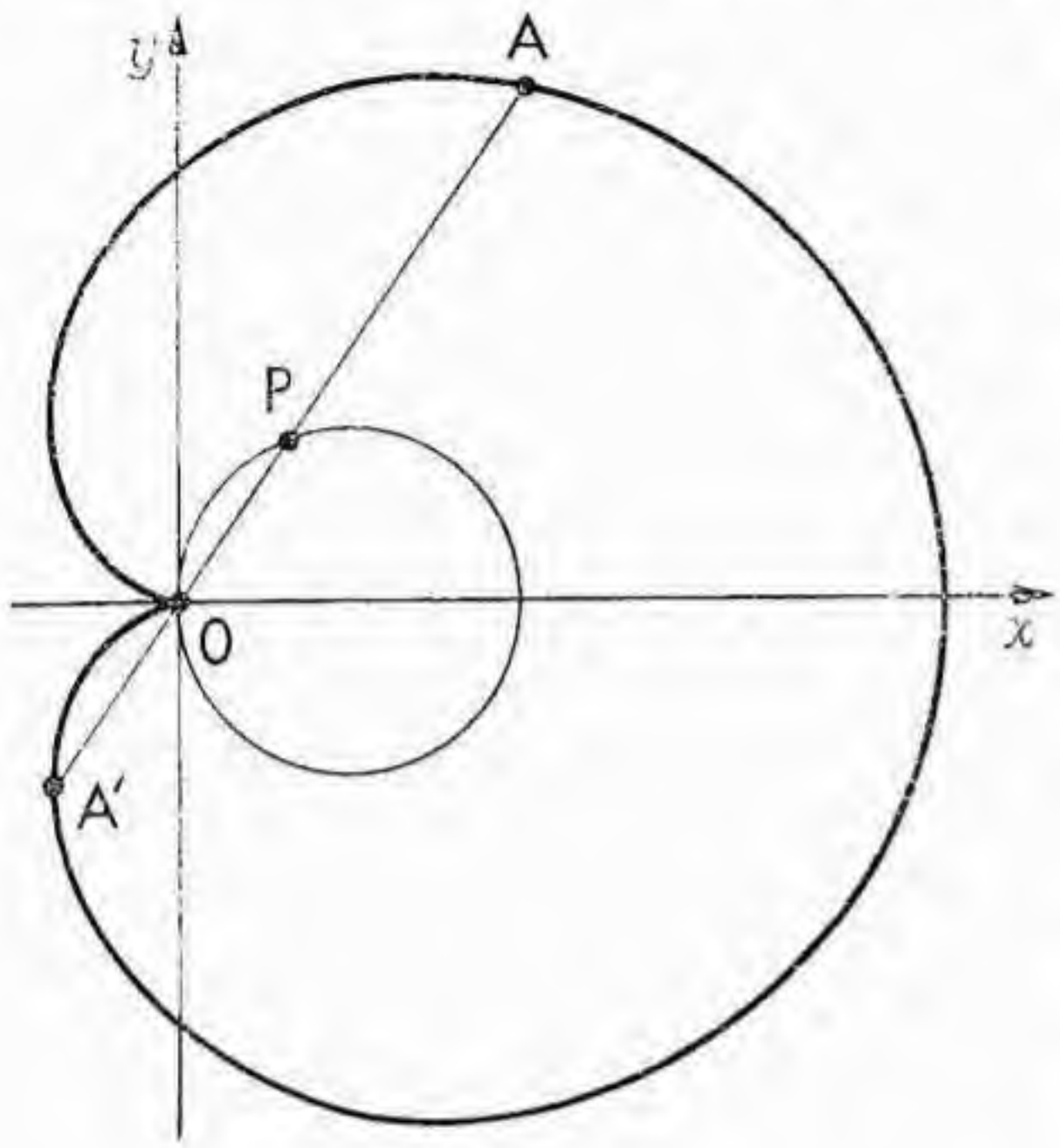

Fig. 88.

Para $k < a$, por el punto O pasan dos ramas cuyas tangentes (direcciones según las cuales es $\varrho = 0$) (fig. 87), son las rectas de dirección $\varphi = \arccos(k/a)$. Para $k > a$, la curva no pasa por O. Para $k = a$, la curva presenta en O un retroceso y se llama *cardioide*, por su forma de corazón (fig. 88).

6. **Cicloide.** — Un tipo de curvas notables se obtienen como trayectorias descritas por un punto fijo de una circunferencia cuando ésta gira sin deslizar sobre otra curva fija del plano llamada curva base. Los casos más importantes son aquellos en que la base es una recta o bien otra circunferencia.

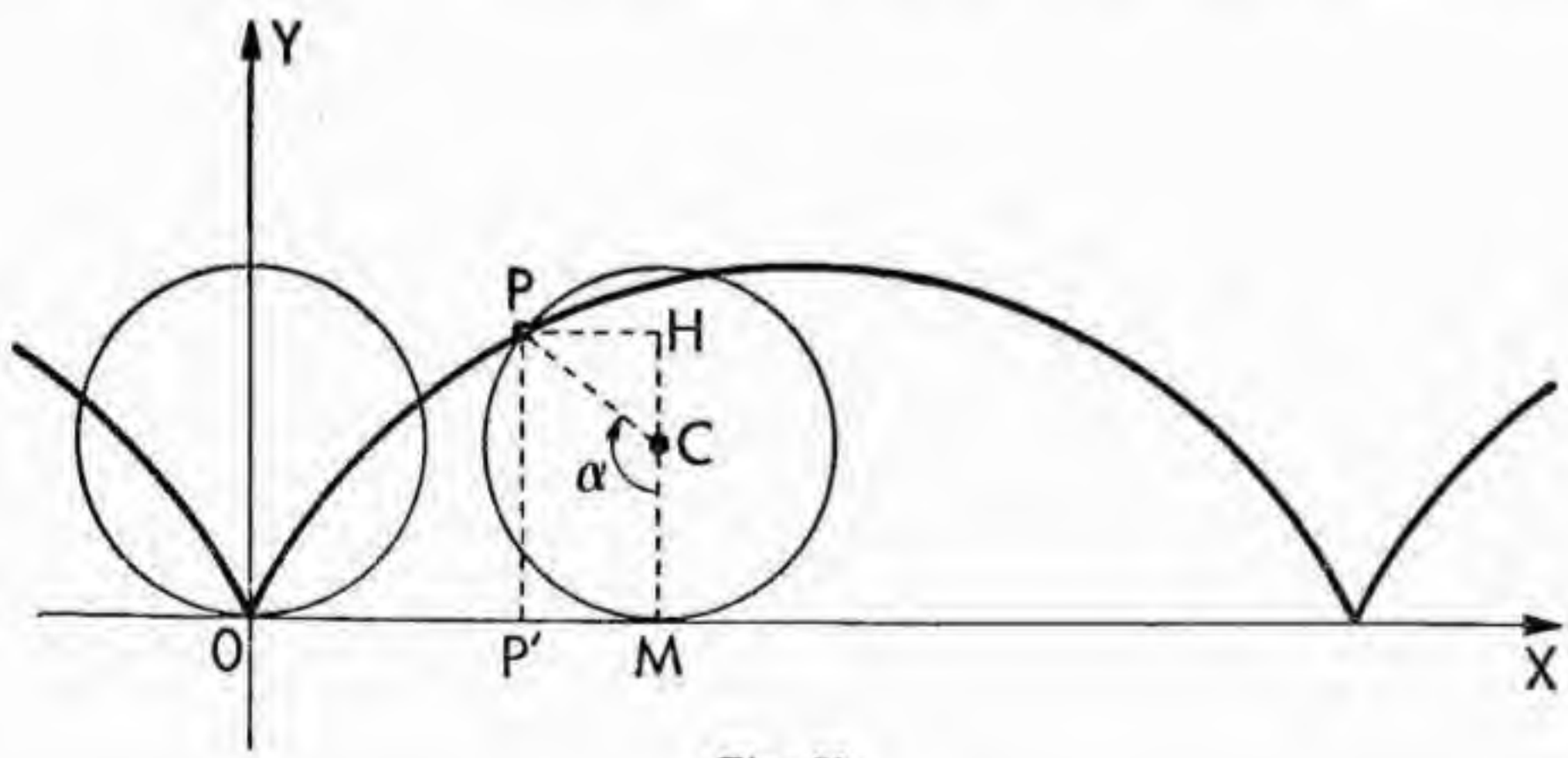

Fig. 89.

Si la curva base es una recta la curva resultante se llama *cicloide*. Para obtener sus ecuaciones tomemos el punto de partida O como origen de coordenadas y la recta base como eje x (fig. 89).

Si la circunferencia que gira tiene radio r, después de girar un ángulo α, el punto P que describe la cicloide tendrá las siguientes coordenadas (puesto que OM = arco MP $= r\alpha$).

[12] $$x = \mathrm{OM} - \mathrm{MP}' = r\alpha - r \operatorname{sen} \alpha$$
$$y = \mathrm{CM} + \mathrm{CH} = r - r \cos \alpha$$

y por tanto las ecuaciones de la cicloide resultan ser

$$x = r(\alpha - \operatorname{sen} \alpha) \quad , \quad y = r(1 - \cos \alpha)$$

En el origen y en todos los puntos de abscisa $x = 2k\pi$ (k = entero) es $y = 0$, presentando en ellos la curva un punto de retroceso con tangente vertical, puesto que

[13] $$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha} = \cot \frac{\alpha}{2}$$

y para $\alpha = 2k\pi$ resulta $y' = \infty$.

Una propiedad importante de la cicloide es que la tangente en un punto P es la normal a la recta PM que une P con el punto M de tangencia de la circunferencia generadora en la posición correspondiente a P. En efecto, el coeficiente angular de la recta PM es $m = -\mathrm{HM}/\mathrm{PH} = -y/r \operatorname{sen} \alpha = -(1 - \cos \alpha)/\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{tg} \alpha/2$ que es de signo contrario y recíproco a [13].

Se pueden considerar cicloides más generales tomando como punto generador uno P que no esté sobre la circunferencia que gira, sino a una distancia a del centro. Las ecuaciones paramétricas en este caso se obtienen igual que antes, con sólo observar que en las relaciones [12] ahora es $\mathrm{P'M} = a \operatorname{sen} \alpha$, $\mathrm{CH} = a \cos \alpha$. Las ecuaciones resultantes son por tanto

[14] $$x = r\alpha - a \operatorname{sen} \alpha \quad , \quad y = r - a \cos \alpha .$$

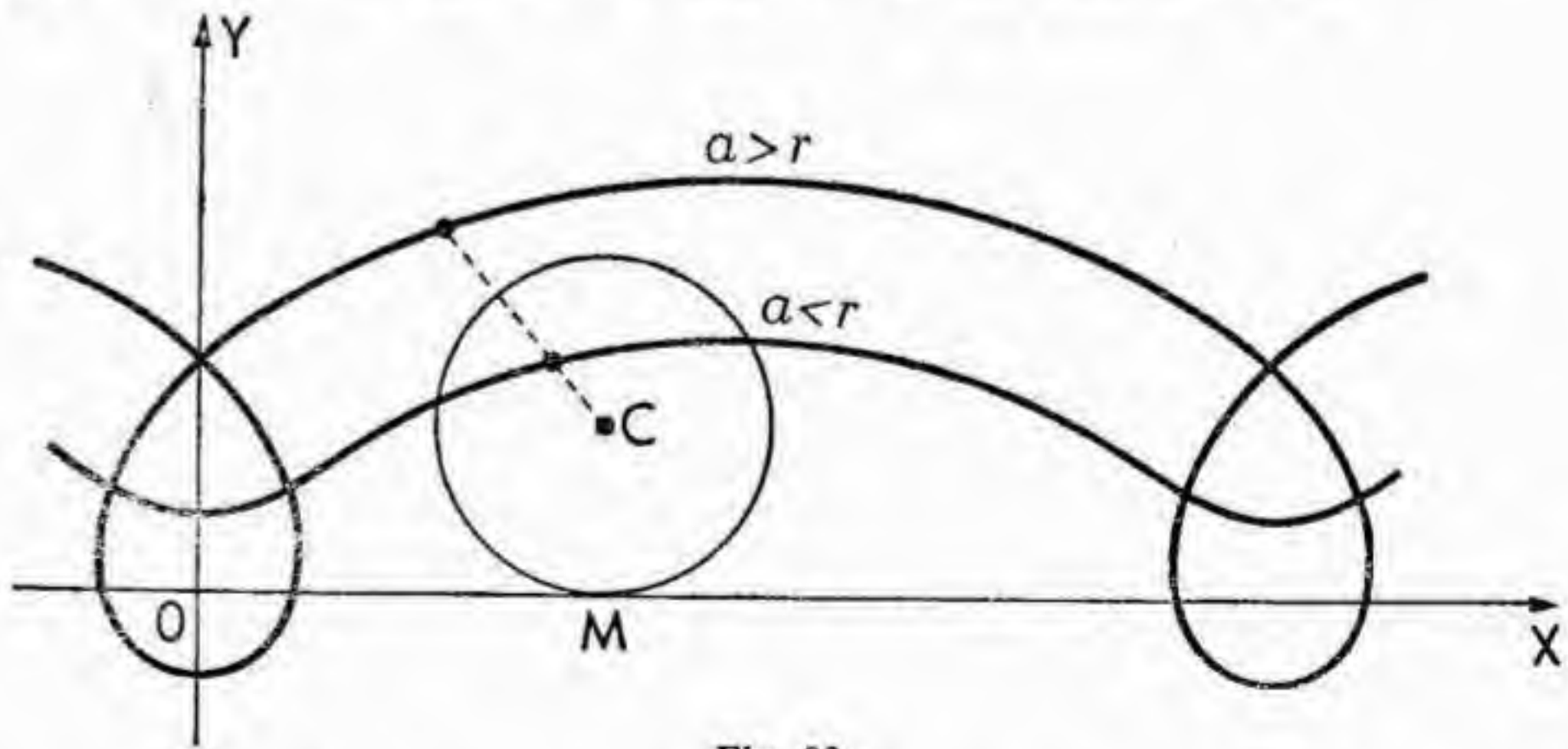

Fig. 90.

Para $a = r$ se tiene la cicloide ya estudiada o *cicloide ordinaria*. Para $a < r$ se tiene la llamada *cicloide larga* y para $a > r$ la *cicloide corta*. La forma de todas ellas es fácil de trazar a partir de sus ecuaciones paramétricas [14] (fig. 90).

7. **Epicicloide e hipocicloide.** — Supongamos la misma circunferencia del número anterior, que gire ahora sobre otra circunferencia de radio R, sin deslizar y exteriormente a ella. La curva descrita por el punto P se llama *epicicloide*.

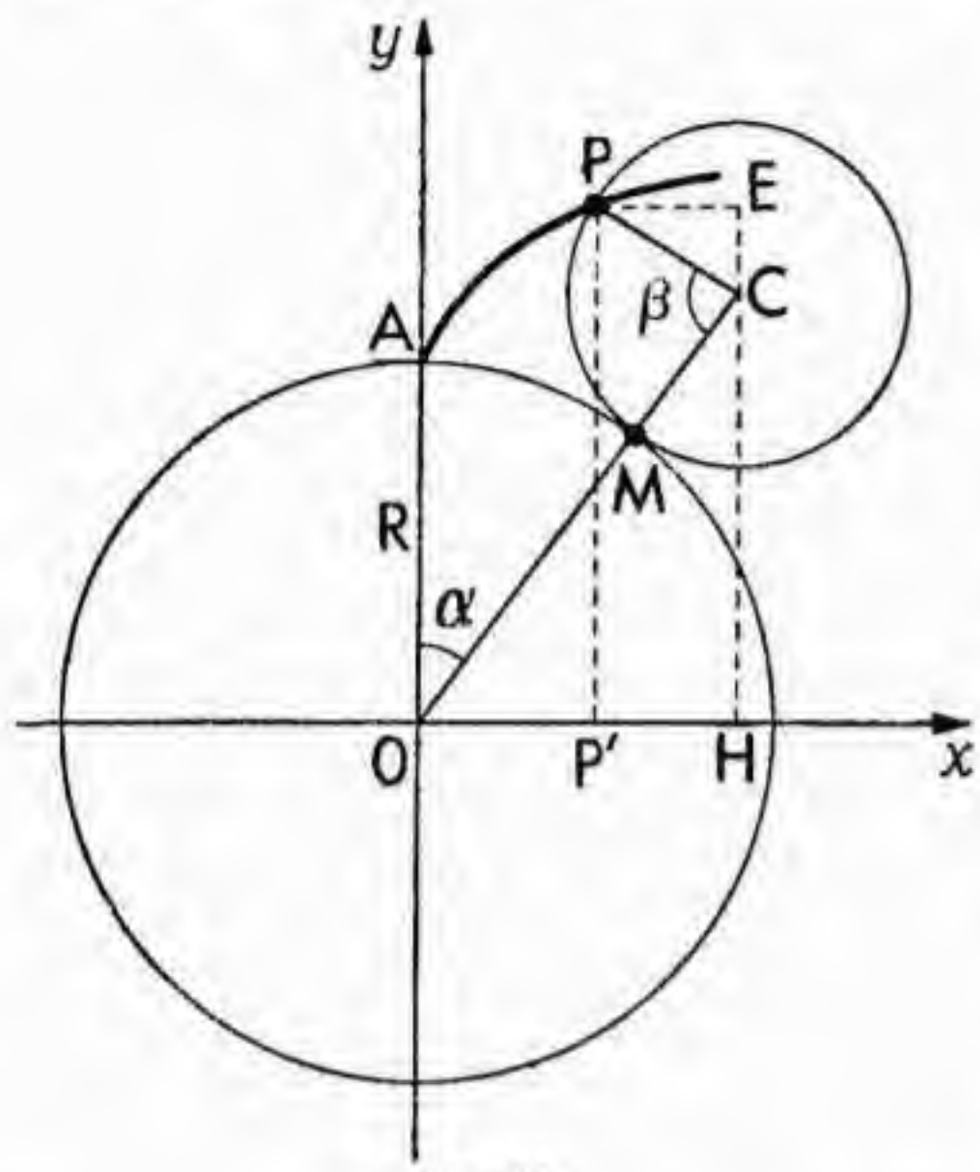

Fig. 91.

Para hallar su ecuación observemos en la figura 91 que siendo por hipótesis arc AM = arc PM, entre el ángulo $\alpha = \mathrm{AOC}$ que tomamos como parámetro, y el $\beta = \mathrm{PCO}$ existe en la relación

$$[15] \qquad R\alpha = r\beta$$

y además $\mathrm{PCH} = \alpha + \beta$. Según esto se tendrá

$$x = \mathrm{OH} - \mathrm{HP}' = \mathrm{OH} - \mathrm{EP} = (r + R)\operatorname{sen}\alpha - r\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$$
$$y = \mathrm{CH} + \mathrm{CE} = (r + R)\cos\alpha - r\cos(\alpha + \beta)$$

o bien, según [15],

$$[16] \qquad \begin{aligned} x &= (R + r)\operatorname{sen}\alpha - r\operatorname{sen}\left(\frac{r + R}{r}\alpha\right) \\ y &= (R + r)\cos\alpha - r\cos\left(\frac{r + R}{r}\alpha\right) \end{aligned}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la epicicloide.

Si la circunferencia de radio r gira sobre la circunferencia base por el lado interno, la curva descrita por P se llama *hipocicloide* . Sus ecuaciones se encuentran de manera completamente análoga a la anterior, resultando las mismas con sólo sustituir r por $-r$, o sea

$$[17] \qquad \begin{aligned} x &= (R - r)\operatorname{sen}\alpha - r\operatorname{sen}\left(\frac{R - r}{r}\alpha\right) \\ y &= (R - r)\cos\alpha + r\cos\left(\frac{R - r}{r}\alpha\right). \end{aligned}$$

Es interesante el caso en que el cociente r/R es un número racional. Supongamos que sea igual a p/q siendo p y q números enteros. Introduzcamos como nuevo parámetro $\varphi = \alpha/p$. Las ecuaciones [16] quedan entonces

[18] $$x = (r + R) \operatorname{sen} p\varphi - r \operatorname{sen} (p + q)\varphi$$
$$y = (r + R) \cos p\varphi - r \cos (p + q)\varphi$$

y por tanto, siendo p y $p + q$ enteros, los segundos miembros de estas ecuaciones se pueden expresar como polinomios en $\operatorname{sen} \varphi$ y $\cos \varphi$. Poniendo entonces $\operatorname{tg} (\varphi/2) = t$ se tiene

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos \varphi = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

y por tanto las ecuaciones [18] se pueden poner en la forma

$$F(x, y, t) = 0 \quad , \quad G(x, y, t) = 0$$

donde F, G son polinomios en x, y, t. La eliminación del parámetro t conduce entonces a expresar la ecuación de la curva en la forma $f(x, y) = 0$, siendo f un polinomio en x, y. Es decir, la epicicloide resulta una curva algebraica. Como el mismo razonamiento vale para la hipocicloide, se puede enunciar:

Si r/R es racional, la epicicloide y la hipocicloide son curvas algebraicas.

En cambio, si r/R es irracional, ambas curvas dan infinitas vueltas, ellas pueden ser cortadas por una recta en infinitos puntos y por tanto son curvas trascendentes.

Ejemplos: 1. Sea la epicicloide correspondiente a $r = R$. Sus ecuaciones serán

$$x = 2r \operatorname{sen} \alpha - r \operatorname{sen} 2\alpha \quad , \quad y = 2r \cos \alpha - r \cos 2\alpha$$

o sea,

[19] $$x = 2r \operatorname{sen} \alpha (1 - \cos \alpha) \quad , \quad y = 2r \cos \alpha (1 - \cos \alpha) + r.$$

De aquí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{y - r}, \quad \text{o sea,} \quad \cos \alpha = \frac{y - r}{\sqrt{x^2 + (y - r)^2}}$$

valor que sustituido en la expresión de y dada en [19] y racionalizando conduce a

$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 - 4r^2(x^2 + (y - r)^2) = 0$$

que coincide, salvo un cambio de coordenadas, con la *cardioide* mencionada en el § 25-5.

2. Sea la hipocicloide correspondiente a $R = 4r$. Sus ecuaciones serán

$$x = 3r \operatorname{sen} \alpha - r \operatorname{sen} 3\alpha,$$
$$y = 3r \cos \alpha + r \cos 3\alpha,$$

o sea

$$x = 4r \operatorname{sen}^3 \alpha \quad , \quad y = 4r \cos^3 \alpha,$$

de donde

[20] $$x^{2/3} + y^{2/3} = (4r)^{2/3}$$

que es la curva llamada *astroide* (fig. 92).

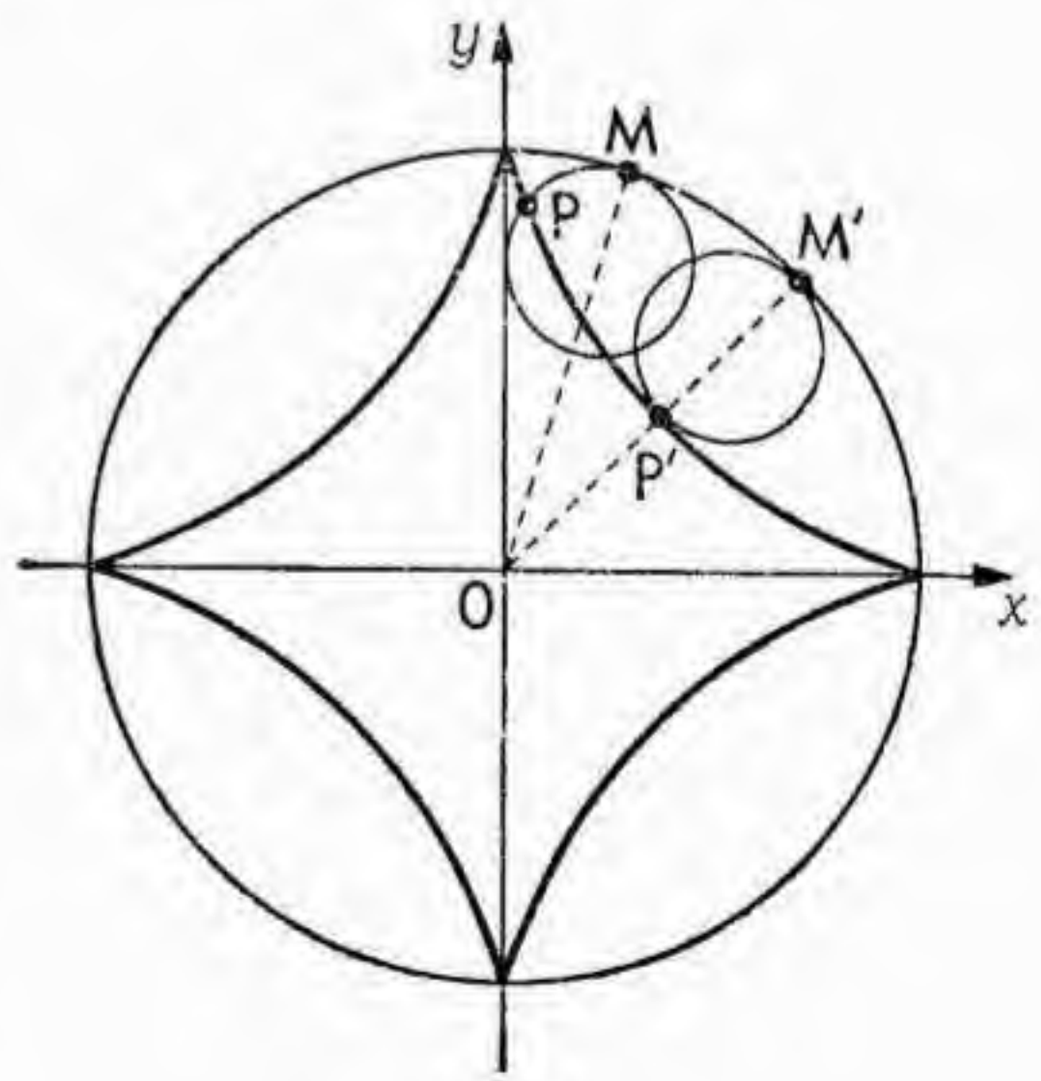

Fig. 92.

Ejercicios. 1 Demostrar que las tangentes a la astroide limitadas entre los puntos en que cortan a los ejes coordenados, tienen longitud constante.

2. Estudiar la hipocicloide correspondiente a $R = 2r$. El resultado, que es el diámetro sobre el eje y, ha sido utilizado en ciertos mecanismos para producir un movimiento lineal de vaivén.

3. Lo mismo que para el caso de la cicloide, en el cual daba lugar a las cicloides larga y corta, también para las epi- e hipocicloides se puede estudiar el caso de un punto P ligado a la circunferencia que se desplaza y situado a una distancia a del centro, distinta de r. Estudiar las curvas resultantes. Demostrar que las hipocicloides con $R = 2r$ y $a \neq r$ son elipses.

8. **Espirales.** — En coordenadas polares se pueden estudiar de manera simple ciertas curvas en forma de espiral, entre las cuales son notables las siguientes

a) *Espiral de Arquímedes.* Está definida por la ecuación

[21] $$\varrho = a\varphi$$

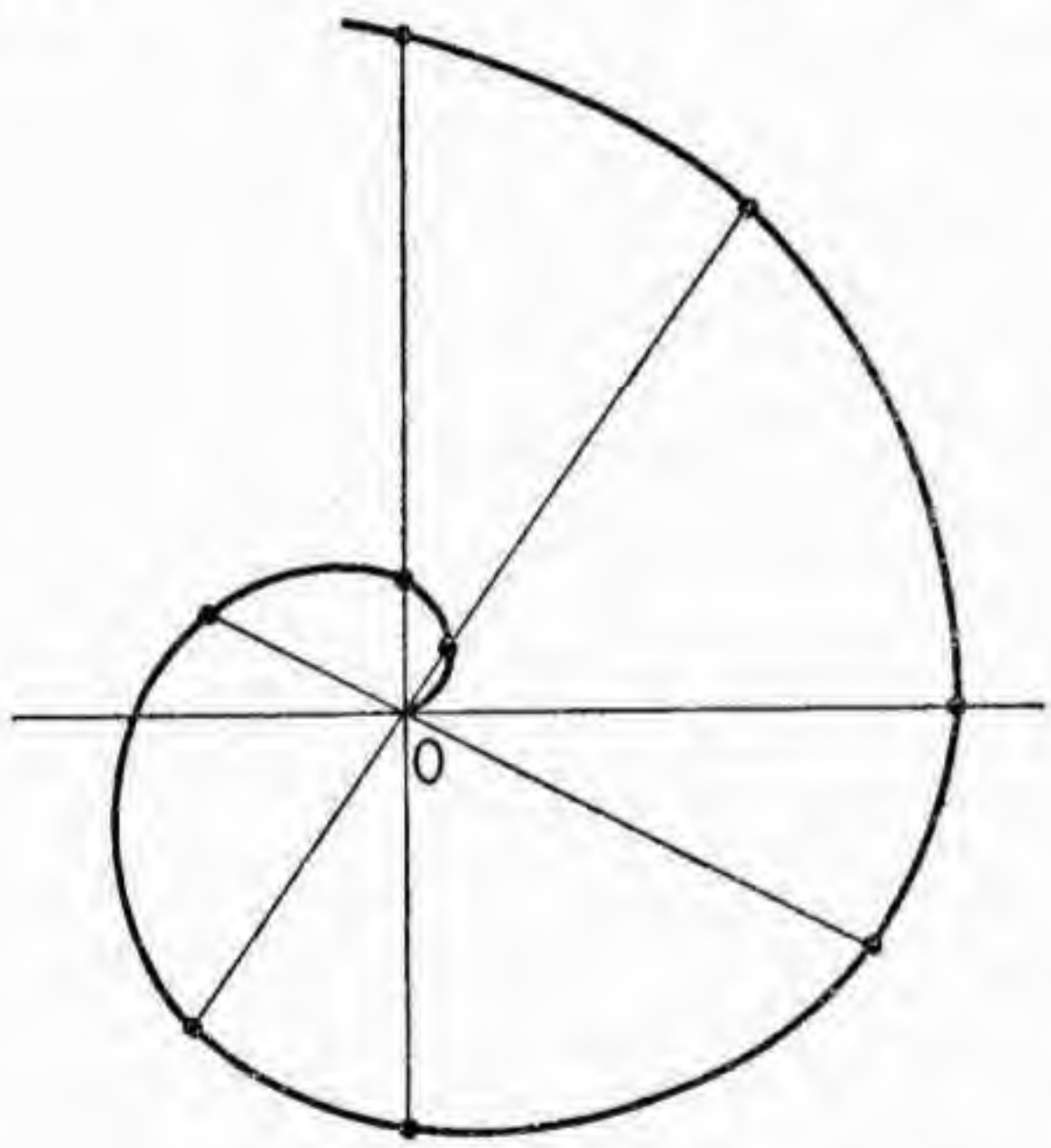

Fig. 93.

donde a es una constante (fig. 93).

Si se consideran solamente valores positivos de φ se tiene una espiral simple; para valores negativos de φ se tiene otra espiral simétrica de la anterior respecto de la normal al eje polar por el origen.

La espiral de Arquímedes puede considerarse como engendrada por un punto que recorre con movimiento uniforme el radio vector, al mismo tiempo que éste gira también con movimiento uniforme. En efecto, si la velocidad con que recorre el radio vector es v será $\varrho = v \,.\, t$ y si la velocidad angular con que el radio vector gira es ω, será $\varphi = \omega t$. De ambas ecuaciones, despejando t en una de ellas y sustituyendo en la otra, resulta la ecuación de la trayectoria $\varrho = (v/\omega)\varphi$ que es de la forma [21].

b) *Espiral logarítmica.* Está definida por la ecuación

[22] $$\varrho = a\, e^{b\varphi}$$

donde a, b, e, son constantes ($e > 1$).

Su propiedad fundamental es que el ángulo V que forma el radio vector con la tangente a la curva es constante. En efecto, de (§ 24-[16]) se deduce $\operatorname{tg} V = \rho/\rho' = 1/b \log e$. Es decir: la espiral logarítmica es la trayectoria que corta bajo el mismo ángulo a todas las rectas que pasan por un punto fijo.

Esta espiral tiene el origen como punto asintótico; ello significa que la curva se acerca al origen dando infinitas vueltas a su alrededor, puesto que en efecto para $\varphi \to -\infty$, $\varrho \to 0$.

c) *Espiral parabólica* es de menor interés que las anteriores, definida por la ecuación

[23] $$\varrho^2 = a\varphi$$

d) *Espiral hiperbólica*, definida por

[24] $$\varrho = a/\varphi$$

Esta última tiene el polo como punto asintótico y la recta paralela al eje polar a distancia a de la misma, como asíntota (fig. 94).

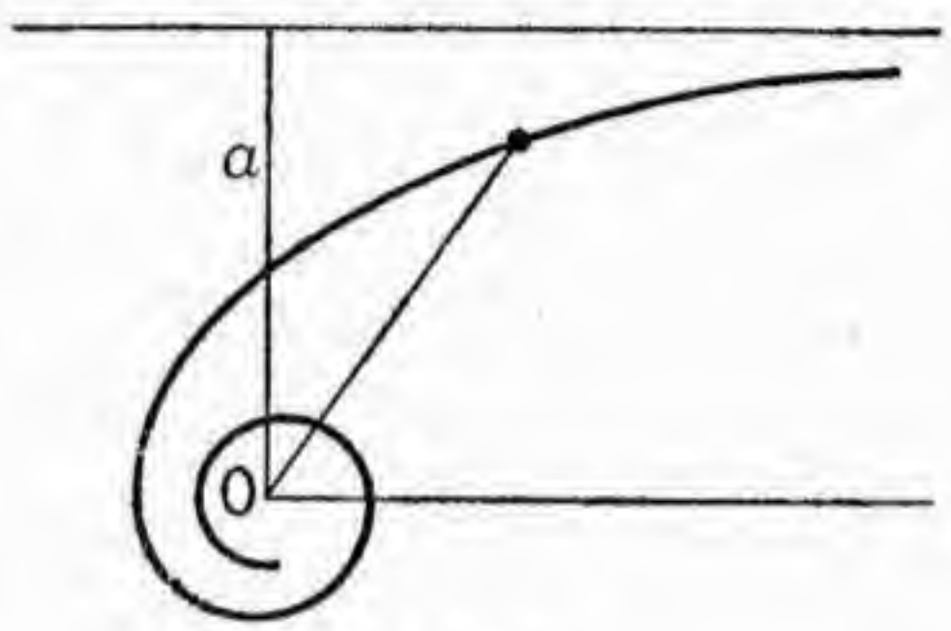

Fig. 94.

9. **Otras curvas clásicas.** — Vamos a resumir las ecuaciones de algunas curvas clásicas, cuyo estudio puede ser un útil ejercicio de representación de curvas.

1. *Folium de Descartes* (fig. 95). Es la cúbica de ecuación

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

2. *Trisectriz de MacLaurin* (fig. 96). De forma muy parecida al folium de Descartes, tiene por ecuación

$$x(x^2 + y^2) = a(y^2 - 3x^2)$$

y puede ser usada para el problema clásico de la trisección del ángulo.

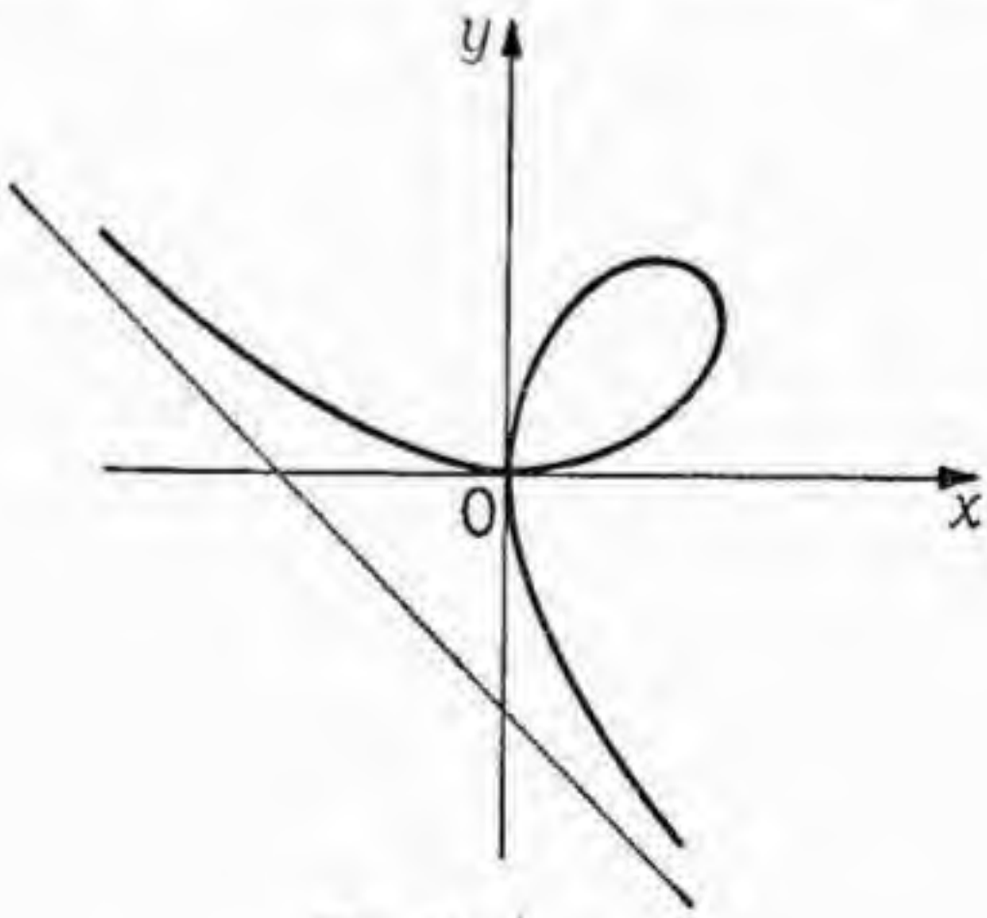

Fig. 95.

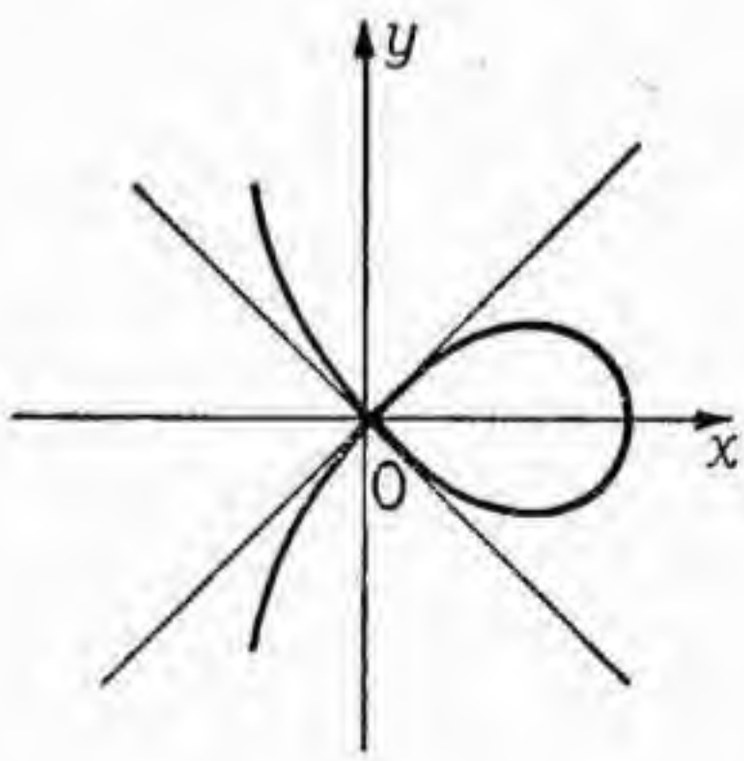

Fig. 96.

3. *Estrofoide.* Sea AOB un ángulo de vértice O (fig. 97). En la prolongación del lado OB se toma un punto H. Sea HL una recta arbitraria

por H que corta al lado OA en el punto P. Sobre esta recta se toman $PM = PM' = PO$. El lugar geométrico de los puntos M, M' cuando varía la recta HL es una curva llamada estrofoide (recta si AOB es recto y oblicua en caso contrario). Su ecuación puede ponerse en la forma

$$(ax + by)(x^2 + y^2) - cxy = 0.$$

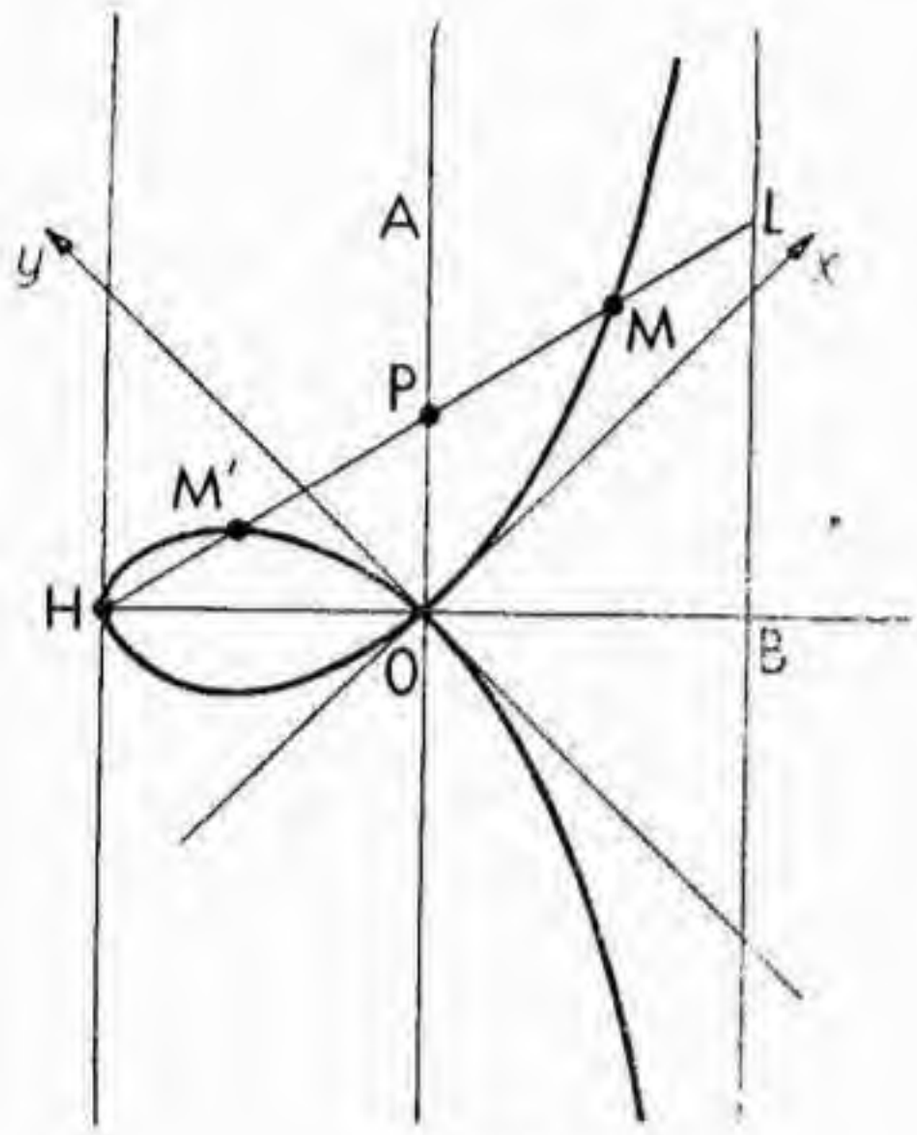

Fig. 97.

4. *La curva "kappa"*. Sea r una recta que pasa por el punto O. El lugar geométrico de los puntos M tales que trazando la recta OM y por M la normal a la misma hasta que corte a r, supongamos en el punto N, el segmento MN tenga una longitud dada, es la llamada curva "kappa" (fig. 98) por tener forma parecida a la letra griega del mismo nombre. Fué introducida por Huygens en 1662 y su ecuación es

$$a^2x^2 - (x^2 + y^2)y^2 = 0.$$

5. *Rosaceas*. Reciben este nombre las curvas cuya ecuación en coordenadas polares es de la forma $\varrho = k \operatorname{sen} m\varphi$. Si m es racional, $m = a/b$ (a, b enteros), se demuestra que la curva es algebraica de grado $a + b$, si a, b son impares, y de grado $2(a + b)$ si uno de ellos es par. Si m es irracional, la curva es trascendente (fig. 99).

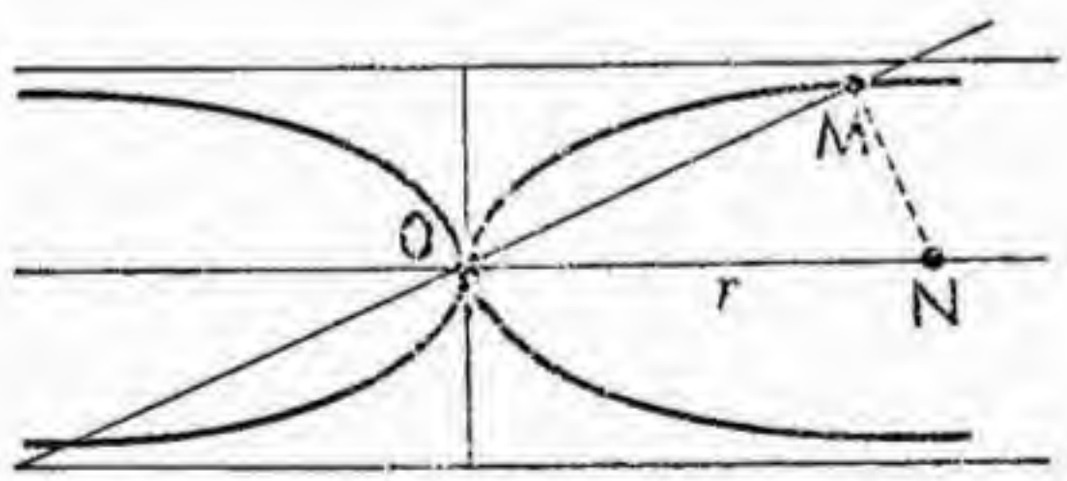

Fig. 98.

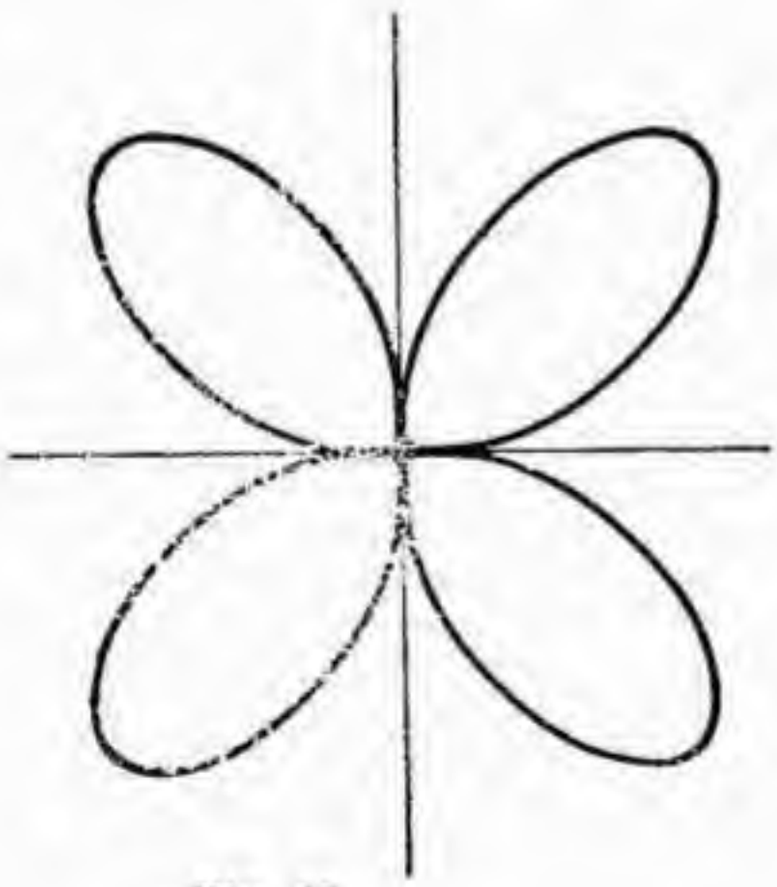
Fig. 99.

6. *Curvas de Lissajous*. Son las curvas cuyas ecuaciones paramétricas son de la forma

$$x = a \operatorname{sen}(mt + p) \quad , \quad y = b \operatorname{sen}(nt + q)$$

con m y n números racionales, las cuales aparecen en ciertos fenómenos vibratorios. Cambiando el parámetro de manera conveniente, siempre se puede suponer que m y n son enteros positivos primos entre sí. Se demuestra que son curvas algebraicas (fig. 100).

7. *Cuadratiz de Dinostrato.* Es una curva trascendente, de ecuación polar $\varrho = a\varphi/\operatorname{sen}\varphi$. Fué introducida para resolver el problema de cuadrar el circulo.

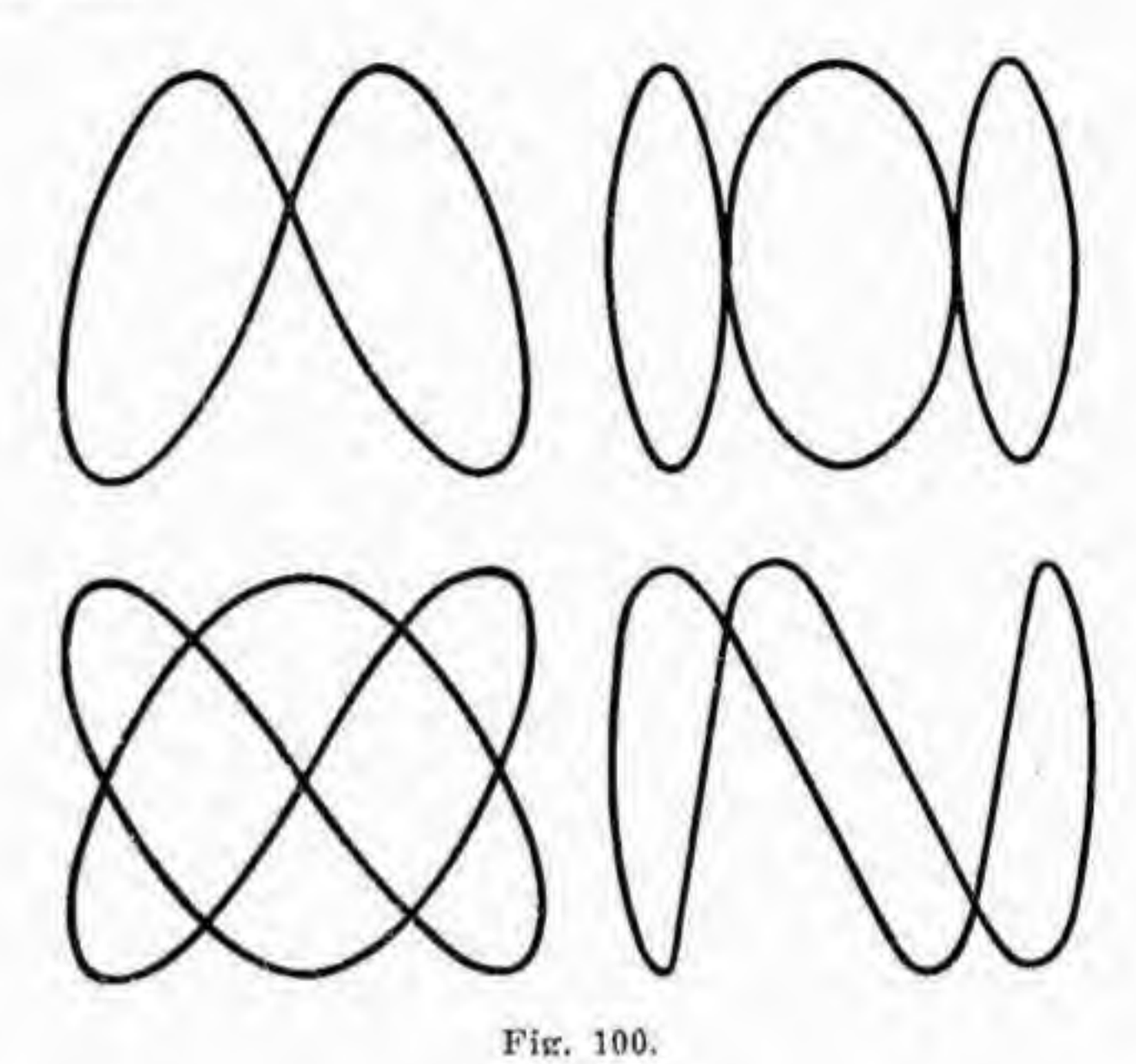

Fig. 100.

8. *Curva de Gauss de distribución de errores.* Se llama así a la curva representada por

$$y = ae^{-bx^2}$$

donde a, b son constantes y e la base de los logaritmos neperianos.

La curva, simétrica respecto del eje y tiene forma de campana como indica la fig. 101. Su máximo corresponde a $x = 0$ y tiene dos puntos de inflexión correspondientes a $x = \pm\sqrt{1/2\,b}$. El eje x es asíntota.

9. *Las curvas de Pearson.* En estadística son muy importantes las llamadas curvas de Pearson, de las cuales hay de diversos tipos. Los primeros (tipos I-II) son las curvas cuya ecuación es de la forma

$$y = k(x-a)^p\,(b-x)^q$$

siendo k, a, b, p, q constantes y $a < b$. Considerando sólo la parte de curva comprendida entre $a \leqslant x \leqslant b$, estas curvas presentan, según los casos, las formas indicadas en la fig. 102, las nueve primeras.

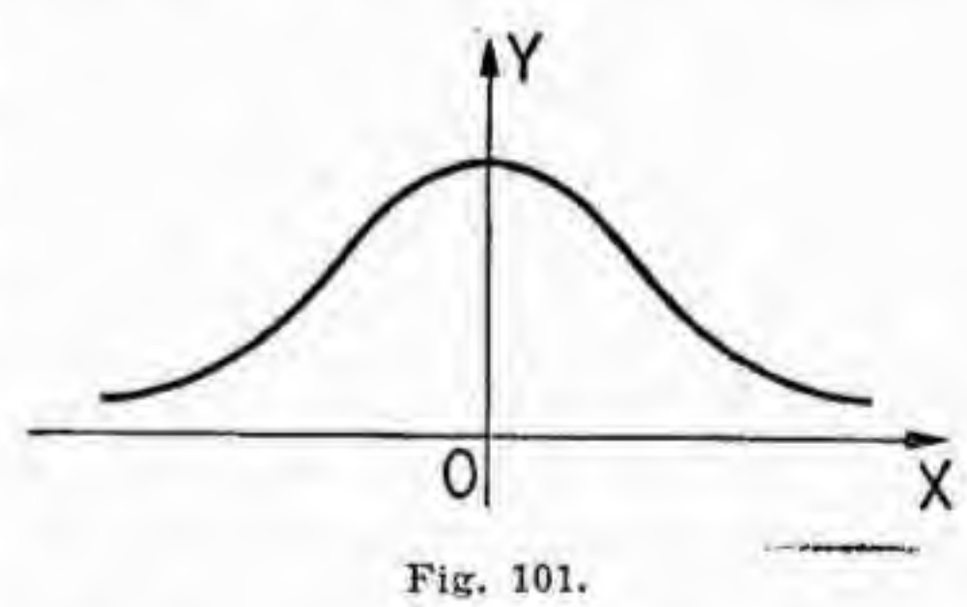

Fig. 101.

Otro tipo de curvas de Pearson (tipo III) son las de ecuación

$$y = k(x-a)^p\,e^{-qx}$$

con κ, a, p, q constantes y $1 \leqslant p$, $q > 0$. Las formas son las indicadas en la fig. 102, las tres últimas. (para $a \leqslant x < \infty$).

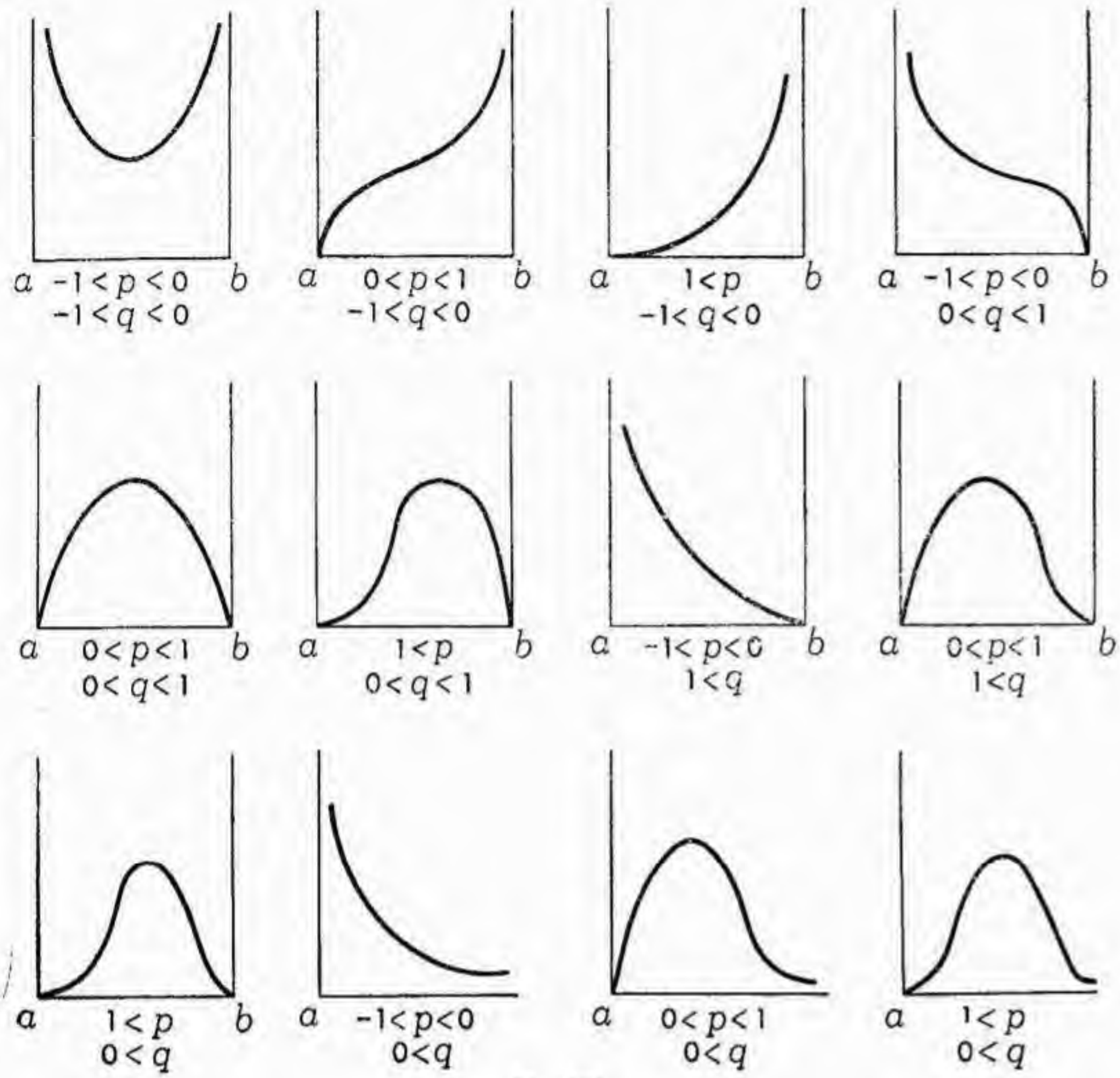

Fig. 102.

10. *La desarrollante de la circunferencia.* Supongamos un hilo arrollado en una circunferencia con el extremo P en el punto A de la misma. Si se desarrolla el hilo, manteniéndolo siempre tirante, el extremo P describirá una curva llamada la "desarrollante de la circunferencia". Mas precisamente, esta curva se obtiene tomando sobre las tangentes a la circunferencia en los puntos M de la misma, segmentos MP iguales a la longitud del arco comprendido entre el punto de contacto M y el punto A. Tomando el origen de coordenadas en el centro de la circunferencia y el eje y de manera que pase por el punto A, las ecuaciones paramétricas de la desarrollante de la circunferencia, resultan

$$x = r(\operatorname{sen}\varphi - \varphi\cos\varphi) \quad , \quad y = r(\cos\varphi + \varphi\operatorname{sen}\varphi)$$

siendo el parámetro φ el ángulo central correspondiente al punto M contado a partir de A y siendo r el radio de la circunferencia.

11. *La catenaria.* Un hilo pesado, flexible pero inextensible, colgado por sus extremos, toma la forma de la curva llamada catenaria. Su ecuación en coordenadas cartesianas es

$$y = (a/2)\ (e^{-ax} + e^{ax})$$

siendo a una constante.

§ 26. Curvas algebraicas

1. **Primeras observaciones.** — Ya definimos en § **23-1 a** una curva algebraica como el conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas cartesianas (rectangulares u oblicuas) satisfacen a una ecuación de la forma

$$[1] \qquad f(x, y) = 0$$

donde $f(x, y)$ es un polinomio en las dos variables x, y cuyo grado constituye el *grado* u *orden* de la curva.

Muchas veces se habla abreviadamente de la curva $f(x, y)$ o de la curva f, para indicar la curva cuya ecuación es $f(x, y) = 0$.

Las curvas algebraicas tienen muchas propiedades no extendibles a las curvas no algebraicas o trascendentes, que conviene estudiar. Por el momento hagamos las siguientes observaciones.

I. Los coeficientes del polinomio $f(x, y)$ pueden ser reales o complejos. Los puntos de la curva serán reales cuando lo sean sus dos coordenadas, y serán imaginarios cuando una o sus dos coordenadas lo sean. Al "dibujar" la curva algebraica, o sea, al señalar en el plano los puntos que la constituyen, aparecen únicamente los puntos reales, los cuales constituyen las llamadas ramas reales de la curva. Sin embargo, para obtener generalidad en las proposiciones sobre curvas algebraicas, conviene tener siempre en cuenta los puntos imaginarios, aunque no estén representados en la rama real de la curva. Por ejemplo, el punto imaginario $x = 5$, $y = i\,4$, pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

II. Si la función $F(x, y)$ no es un polinomio, pero contiene a las variables x, y ligadas solamente por operaciones racionales (adición, sustracción, multiplicación y división) y radicaciones en número finito de veces, la curva $F(x, y) = 0$ es siempre una "parte" de curva algebraica. En efecto, se sabe que toda expresión del tipo dicho se puede racionalizar, es decir, transformar en un polinomio $f(x, y)$ tal que todo par de valores x, y que satisfagan a $F(x, y) = 0$, satisfagan también a $f(x, y) = 0$.

Cuando se habla de la curva algebraica $F(x, y) = 0$, se sobrentiende siempre que se refiere a la curva completa $f(x, y) = 0$. Así, al hablar del grado de la primera, se entiende siempre el grado de la segunda, o sea del polinomio $f(x, y)$.

Ejemplos. 1. La curva $y - \sqrt{x} = 0$ es la parte positiva de la parábola $y^2 - x = 0$. Si se considera que el radical lleva implícito los dos signos $\pm$, entonces las dos curvas son idénticas.

2. Para hallar el grado de la *astroide* (§ 25-7)

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

debemos racionalizarla. Para ello, elevando al cubo ambos miembros se tiene

$$x^2 + y^2 + 3\,x^{4/3}\,y^{2/3} + 3\,x^{2/3}\,y^{4/3} = a^2$$

o bien, sacando factor común $3\,x^{2/3}\,y^{2/3}$ y teniendo en cuenta la ecuación de la curva

$$x^2 + y^2 + 3\,(x\,y\,a)^{2/3} = a^2.$$

Pasando a al primer miembro, el término irracional al segundo y elevando nuevamente al cubo, resulta

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 - 27\,a^2\,x^2\,y^2 = 0.$$

Esta es la ecuación racional de la astroide, que pone de manifiesto que la misma es de sexto grado.

III. Si una curva se da en un sistema de coordenadas que no es cartesiano, para averiguar si es algebraica o no, y en el primer caso averiguar el grado, hay que hacer el cambio a coordenadas cartesianas. En el caso de las curvas dadas en coordenadas polares, muchas veces sirve el criterio siguiente:

Una curva dada en coordenadas polares por su ecuación $F(\varrho, \alpha) = 0$, *será algebraica, cuando* F *sea una función algebraica de* ϱ, $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$.

En efecto, siendo $F(\varrho, \operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha) = 0$ la ecuación de la curva, su ecuación en coordenadas cartesianas será $F(\varrho, x/\varrho, y/\varrho) = 0$, y sustituyendo ϱ por su valor deducido de $\varrho^2 = x^2 + y^2$, resulta en el primer miembro una función algebraica de x, y que una vez racionalizada nos dará la ecuación de la curva en coordenadas cartesianas y nos pondrá de manifiesto el grado de la misma.

Por ejemplo, la curva $\varrho = \sqrt{\cos\alpha}$ se puede escribir $\varrho^2 - \cos\alpha = 0$, o sea $\varrho^2 - x/\varrho = 0$, o bien, finalmente $(x^2 + y^2)^3 - x^2 = 0$. Se trata, pues, de una curva algebraica de sexto grado.

En cambio, las curvas $\varrho - \alpha = 0$, $\varrho^2 + \alpha^2 - \operatorname{sen}\alpha = 0$, $\varrho - \log\alpha = 0$ no son curvas algebraicas.

IV. Para curvas dadas por sus ecuaciones paramétricas, valen los criterios:

a) *Toda curva*

[2] $$x = g(t) \quad , \quad y = h(t)$$

donde g, h *son polinomios o cocientes de polinomios en* t, *es algebraica.*

En efecto, quitando denominadores y pasando todo al primer miembro, las dos ecuaciones se pueden escribir en la forma $G(x, t) = 0$, $H(y, t) = 0$, respectivamente. La eliminación de t entre estas ecuaciones conduce a una ecuación $f(x, y) = 0$, donde $f(x, y)$ es un polinomio, que es la ecuación de la curva en forma implícita. Por tanto la curva es algebraica.

b) *Toda curva cuyas ecuaciones paramétricas sean de la forma*

[3] $$x = g(\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha), \quad y = h(\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha)$$

donde g, h, *sean polinomios en* $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, *es algebraica.*

En efecto, basta introducir el nuevo parámetro $\operatorname{tg}(\alpha/2) = t$, para que las ecuaciones paramétricas en función de t resulten de la forma [2] anterior.

Si las funciones g, h de [3] son funciones de $\operatorname{sen} p\,\alpha$, $\cos q\,\alpha$, siendo p, q números enteros, el resultado subsiste, pues estas expresiones se pueden sustituir por polinomios en $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$.

Ejemplos. 1. La curva $x = t^2 - 1$, $y = 1/t$ es la cúbica $x\,y^2 + y^2 - 1 = 0$.

2. La curva $x = \operatorname{sen}\alpha$, $y = \cos 2\alpha$ es la parábola $y + 2x^2 - 1 = 0$.

2. **Curvas reducibles e irreducibles.** — La curva algebraica $f(x, y) = 0$, se dice que es *reducible*, cuando el polinomio $f(x, y)$ es igual al producto de otros dos, o sea

$$[4] \qquad f(x, y) = g_1(x, y)\ g_2(x, y)\,.$$

Naturalmente, si f es de grado n y los polinomios g_1, g_2 son de grados m_1, m_2, respectivamente, siendo el grado del producto de dos polinomios igual a la suma de los grados, debe ser $n = m_1 + m_2$. Por ejemplo, una cónica sólo puede descomponerse en dos rectas; una cúbica en una cónica y un recta o en tres rectas, etc.

Cuando no existe una descomposición de f en la forma [4] la curva se dice que es *irreducible*.

Si el polinomio f admite la descomposición [4], la curva $f = 0$ está compuesta de la curva $g_1(x, y) = 0$, más la curva $g_2(x, y) = 0$. El estudio de las curvas reducibles se reduce, por tanto, al estudio de otras de grado inferior.

En particular si $g_1 = g_2$, o sea $f = g_1^2$, se dice que la curva f equivale a la g_1 contada dos veces, o a dos curvas g_1 superpuestas.

En general, si el polinomio f se descompone en sus factores primos

$$f = g_1^{m_1}\, g_2^{m_2}\, g_3^{m_3} \ldots g^{m_h}$$

la curva $f = 0$ se descompone en las curvas irreducibles $g_1 = 0$, $g_2 = 0, \ldots, g_h = 0$, contada cada una respectivamente $m_1, m_2, \ldots, m_h$ veces.

Un caso importante de curva reducible es aquel en que f es un polinomio homogéneo de grado n en las dos variables x, y. Entonces, poniendo $y/x = \lambda$ se puede escribir

$$f(x, y) = x^n f(1, y/x) = x^n f(1, \lambda)\,.$$

Si las n raíces de la ecuación $f(1, \lambda) = 0$, son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, será $f(1, \lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n)$ siendo a_0 una constante y por tanto, poniendo de nuevo $\lambda = y/x$, resulta

$$[5] \qquad f(x, y) = a_0\,(y - \lambda_1 x)\ (y - \lambda_2 x)\ \ldots\ (y - \lambda_n x)$$

y por lo tanto la curva $f(x, y)$ se compone de las n rectas $y - \lambda_i x = 0$. Es decir: *si* $f(x, y)$ *es un polinomio homogéneo de grado* n, *la curva* $f = 0$ *se compone de* n *rectas que pasan por el origen, cuyos coeficientes angulares son las raíces de la ecuación* $f(1, \lambda) = 0$.

Estas rectas serán reales o imaginarias según lo sean las raíces λ_i y algunas pueden ser múltiples, si lo son las raíces correspondientes.

Ejemplos. 1. La curva $x^3 + xy^2 - 3x^2 - 3y^2 - x + 3 = 0$ por ser el primer miembro igual al producto $(x^2 + y^2 - 1)(x - 3)$ se descompone en la circunferencia $x^2 + y^2 - 1 = 0$ y la recta $x - 3 = 0$.

2. La curva $x^2 + y^2 - 4 = 0$ es irreducible, pues sabemos que es

una circunferencia, y de ser descomponible tendría que serlo en dos rectas.

3. Obsérvese que en [4] la condición de que g_1, g_2 sean polinomios es esencial. Por ejemplo, la curva $x^2 - y^2 - 1 = 0$ es irreducible y sin embargo es $x^2 - y^2 - 1 = (x - \sqrt{y^2+1})(x + \sqrt{y^2+1})$, pero estos factores no son polinomios.

3. **Intersección de una curva algebraica con una recta.** — Supongamos que se quiera tener la intersección de la curva algebraica $f(x, y) = 0$ con la recta $y = ax + b$. Si se tratara de una recta paralela al eje y, que no puede ponerse en esta forma, el razonamiento sería el mismo con sólo sustituir la y por la x.

El problema equivale a hallar las soluciones del sistema de ecuaciones

$$[6] \qquad f(x, y) = 0 \quad , \quad y - ax - b = 0$$

para lo cual, sustituyendo en la primera el valor de y deducido de la segunda, bastará resolver la ecuación

$$[7] \qquad f(x, ax + b) = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación serán las abscisas de los puntos de intersección. Si ellas son $x_1, x_2, \ldots$, las ordenadas correspondientes serán $y_1 = ax_1 + b$, $y_2 = ax_2 + b$, ...

Sobre esta correspondencia entre las raíces de [7] y los puntos de intersección se hacen los siguientes convenios.

a) A las raíces imaginarias de [7] se dice que corresponden puntos de intersección imaginarios. Si, por ejemplo, x_1 es una raíz imaginaria, el punto correspondiente será $(x_1, ax_1 + b)$ que tiene sus coordenadas imaginarias.

b) Si alguna de las raíces de [7] es múltiple, se dice que en el punto correspondiente la recta y la curva tienen tantos puntos de intersección confundidos como indica el orden de multiplicidad. Por ejemplo, si x_1 es una raíz múltiple de orden h se dice que en el punto $(x_1, ax_1 + b)$ la curva y la recta tienen h puntos de intersección confundidos.

c) Si la curva es de grado n, la ecuación [7] es de grado n a lo sumo. Si resulta de grado $n - p$ se dice que la curva y la recta tienen p puntos de intersección en el infinito.

Con estos convenios, se puede enunciar el teorema general

El número de puntos comunes a una recta y a una curva algebraica que no contiene a la misma, contando convenientemente la multiplicidad de cada uno e incluyendo los puntos imaginarios y los impropios o del infinito, es siempre igual al grado de la curva.

De los convenios anteriores el único que necesita justificación es el *c*). Los otros dos son los mismos que se hacen siempre en álgebra para poder enunciar que una ecuación de grado n tiene exactamente n raíces. Para justificar el *c*) necesitamos utilizar coordenadas homogéneas. Poniendo x/t, y/t en lugar de x, y en las ecuaciones de la curva y de la recta y quitando denominadores, ambas resultan de la forma

$$f(x, y, t) = 0 \quad , \quad y - a x - b t = 0$$

y en lugar de [7] se tiene ahora

$$[8] \qquad f(x, a x + b t \quad , \quad t) = 0$$

que siempre es homogénea y de grado n en las dos variables x, t. Si al hacer $t = 1$, para pasar a no homogéneas, resulta de grado $n - p$, debe ser de la forma $t^p f(x, ax + bt, t) = 0$, la cual tiene p raíces $t = 0$, o sea p raíces infinitas de la ecuación no homogénea $f(x, ax + b) = 0$.

Ejemplo. La recta $y = x$ y la cúbica $x^3 - y^3 + x^2 + y - 2 = 0$, tienen un punto de intersección en el infinito y los otros dos tienen por abscisas las raíces de la ecuación $x^2 + x - 2 = 0$, o sea $x = 1$, $x = -2$, a las que corresponden los puntos $(1, 1)$, $(-2, -2)$.

Ejercicios. 1. Hallar las intersecciones de la recta $y = x - 2$ con la hipérbola $x^2 - y^2 + 4x - 2 = 0$.

2. Hallar las intersecciones de la recta $y = 2x$ con la curva $x^2 - y^2 + x^2 y - x^3 = 0$.

3. Hallar las intersecciones de la recta $y = 2x - 1$ con la cúbica $y^3 - 6x + 1 = 0$.

4. Número de puntos que determinan una curva algebraica. — Sea $f(x, y) = 0$ una curva algebraica de grado n. Agrupando los términos del mismo grado, el polinomio $f(x, y)$ se puede escribir como una suma de polinomios homogéneos $\varphi_i(x, y)$ de grados $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, o sea,

$$[9] \quad f(x, y) = \varphi_0 + \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) + \ldots + \varphi_n(x, y)$$

siendo

$$\varphi_0 \equiv \text{polinomio de grado cero} = \text{constante}$$
$$\varphi_1 \equiv a_{10} x + a_{01} y$$
$$\varphi_2 \equiv a_{20} x^2 + a_{11} x y + a_{02} y^2$$
$$\varphi_3 \equiv a_{30} x^3 + a_{21} x^2 y + a_{12} x y^2 + a_{03} y^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

El número de coeficientes del polinomio $f(x, y)$ es igual por tanto a

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n + 1) = \tfrac{1}{2}(n + 1)(n + 2).$$

Como se pueden dividir ambos miembros de la ecuación $f(x, y)$ por uno de estos coeficientes, el número anterior se puede disminuir en una unidad y resulta que *el número N de coeficientes que determinan una curva de grado* n *es*

$$[10] \qquad N = \tfrac{1}{2} n (n + 3).$$

Veamos ahora cuántos puntos hacen falta para determinar una curva de grado n.

Si la curva debe pasar por el punto $P_1(x_1, y_1)$ deberá verificarse la ecuación

$$[11] \qquad f(x_1\, y_1) \equiv a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}y_1 + a_{20}x_1^2 + \\ + a_{11}x_1y_1 + \ldots + a_{0n}y_1^n = 0$$

la cual es una ecuación lineal que liga los coeficientes a_{00}, a_{10}, a_{01}, ... Puesto que hay N coeficientes (suponiendo que ya se haya dividido por uno de ellos), para determinarlos se necesitarán N ecuaciones de la forma [11] y por tanto N puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_N(x_N, y_N)$. Es decir:

Una curva de grado n queda determinada "en general" por $N = \frac{1}{2}n(n+3)$ *puntos.*

Así una recta queda determinada por 2 puntos; una cónica ($n = 2$) queda determinada por 5 puntos; una cúbica ($n = 3$) por 9 puntos; una cuártica ($n = 4$) por 14 puntos, etc.

En el enunciado hay que decir "en general", porque puede suceder que el sistema de ecuaciones análogas a la [11], escritas para los demás puntos $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, ..., resulte indeterminado, por ser alguna de ellas consecuencia de las demás. En este caso hay infinitas curvas de grado n que pasan por los N puntos dados, y se dice que entonces los N puntos no son independientes. Por ejemplo, dados 4 puntos en línea recta y un quinto punto fuera de la recta que ellos determinan, hay infinitas curvas de segundo orden que pasan por ellos: todas las formadas por la recta que contiene los 4 puntos más otra recta cualquiera que pase por el quinto. No hace falta tampoco que las curvas resulten degeneradas como en este ejemplo. Dos cúbicas f_1, f_2 se cortan siempre en 9 puntos; por consiguiente, estos 9 puntos no determinan una sola cúbica puesto que por ellos pasan las f_1, f_2 y además cualquier otra cúbica cuya ecuación sea de la forma $f_1 + \lambda f_2 = 0$, con λ una constante arbitraria.

El sistema de ecuaciones

$$[12] \qquad f(x_1, y_1) = 0 \;,\; f(x_2, y_2) = 0 \;,\; \ldots,\; f(x_N, y_N) = 0$$

para determinar los coeficientes a_{00}, a_{10}, a_{01}, ..., puede resolverse por cualquiera de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, por ejemplo, por la regla de Crámer. Sin embargo, se puede escribir directamente la ecuación de la curva, indicando que el sistema formado por estas ecuaciones, más la ecuación general $f(x, y) = 0$, considerado como un sistema de ecuaciones lineales y homogéneas en las incógnitas a_{00}, a_{10}, a_{01}, ..., debe ser compatible. El determinante de los coeficientes debe ser nulo en este caso y resulta por tanto

La ecuación de la curva de grado n *determinada por los* N *puntos* (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_N, y_N) *se puede escribir en la forma*

$$[13] \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & \dots & y^n \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & \dots & y_1^n \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^n & \dots & y^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_N & x_N & x_N^2 & x_Ny_N & y^2_N & \dots & y_N^n \end{vmatrix} = 0.$$

Esta forma de la ecuación de la curva como determinante es interesante por su simetría y por ciertas consecuencias teóricas que a veces se pueden deducir, pero para el desarrollo efectivo, ya para $n \geqslant 2$ lleva a cálculos largos y engorrosos. Si la ecuación [13] resulta una identidad quiere decir que estamos en el caso ya mencionado en que los N puntos no son independientes y en que, por tanto, por ellos pasan infinitas curvas de orden n.

Ejemplo. Ecuación de la cónica determinada por los 5 puntos $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(-1, -2)$, $(1, -1)$. Escribiendo el determinante [13] y desarrollando sucesivamente, resulta la ecuación $10x^2 - 4y^2 + 12xy + 10x + 4y = 0$, que es fácil comprobar pasa por los cinco puntos dados.

OBSERVACIÓN. Siendo [12] un sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas $a_{00}, a_{10}, a_{01}, \dots$, si las coordenadas de todos los puntos x_i, y_i $(i = 1, 2, 3, \dots, N)$ son reales y el sistema no resulta indeterminado, también las soluciones $a_{00}, a_{10}, \dots$, deben ser reales. Esto resulta también de [13], puesto que si las x_i, y_i son todas reales, al desarrollar el determinante también resultarán reales los coeficientes del polinomio que se obtiene en x, y.

Por consiguiente: *si N puntos reales determinan una única curva de grado n, la ecuación de ésta tiene los coeficientes reales* [1].

Inversamente, el mismo razonamiento nos dice que una curva algebraica cuya ecuación no tenga todos los coeficientes reales no puede tener más de $N - 1$ puntos reales independientes. En particular, si una curva algebraica tiene una rama real y es irreducible, su ecuación tiene los coeficientes reales.

La condición de que sea irreducible es esencial, puesto que por ejemplo, la curva $(xy - 1)(ix + y - 2) = 0$ tiene coeficientes imaginarios y contiene a la hipérbola real $xy - 1 = 0$.

5. **Intersección de curvas algebraicas: Teorema de Bezout.** — El caso estudiado en el nº 3 de la intersección de una recta con una curva algebraica, no es más que un caso particular del problema general de hallar los puntos comunes a dos curvas algebraicas

$$[14] \qquad f(x, y) = 0 \quad , \quad g(x, y) = 0$$

la primera de grado n y la segunda de grado m.

El problema equivale a la cuestión, puramente algebraica, de resolver el sistema de las dos ecuaciones [14] con las dos incógnitas x, y. La solución está dada por el llamado teorema de BEZOUT, cuyo enunciado es [2].

Dos curvas algebraicas, sin parte común, de grados n *y* m *respec-*

[1] Salvo, naturalmente, un posible factor común imaginario.

[2] La demostración puede verse en J. REY PASTOR, P. PÍ CALLEJA y C. TREJO, *Análisis Matemático*, tomo I.

tivamente, tienen siempre nm *puntos comunes, propios o en el infinito, distintos o confundidos.*

La máxima dificultad está siempre en la determinación del orden de multiplicidad con que hay que contar cada punto de intersección. Para ello, la regla general es la siguiente. Se forma la resultante $R(x)=0$, o sea la ecuación que resulta al eliminar y entre las dos ecuaciones [14]. Esta resultante es de grado nm y tiene por tanto nm raíces (si resulta de grado menor, por ejemplo $nm-h$, se dice que las dos curvas tienen h puntos comunes en el infinito). Las raíces simples de la ecuación $R(x)=0$, son abscisas de un solo punto de intersección de las dos curvas; las raíces múltiples, en cambio, son abscisas de varios puntos de intersección, tantos como indica su orden de multiplicidad, los cuales pueden ser distintos o confundidos. El orden de multiplicidad con que hay que contar cada uno de ellos es tal que su suma debe ser igual al orden de multiplicidad de la raíz correspondiente de $R(x)=0$. El caso más importante es aquel en que a la raíz x_1, múltiple de orden h de $R(x)=0$, corresponde un solo punto de intersección $P(x_1, y_1)$; entonces este punto hay que contarlo como h puntos de intersección confundidos. Es decir:

Si $P(x_1, y_1)$ *es un punto de intersección de las dos curvas* $f=0$, $g=0$ *y sobre la recta* $x=x_1$ *no hay ningún otro punto de intersección, el número de intersecciones confundidas en* P *es igual al orden de multiplicidad de la raíz* x_1 *en la ecuación* $R(x)=0$ *de la resultante.*

La resultante $R(x)$, llamada también *eliminante* por ser el resultado de eliminar y, puede hallarse muchas veces directamente, mediante artificios adecuados a cada caso particular, pero es casi siempre preferible aplicar el método general de escribirla en la forma llamada de SYLVESTER, de la manera siguiente:

Ordenando f y g según las potencias de y, sea

$$f(x,y) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \ldots + \alpha_n y^n$$
$$g(x,y) \equiv \beta_0 + \beta_1 y + \beta_2 y^2 + \ldots + \beta_n y^n$$

donde los coeficientes α_i, β_i son polinomios en x. La resultante o eliminante $R(x)$ es entonces el determinante

$$[14'] \qquad R(x) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n & & & & \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_n & & & & \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\ & & & & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_m & & & & \\ & \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_m & & & & \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\ & & & & \beta_0 & \beta_1 & \ldots & \beta_m & \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \end{matrix}$$

donde los lugares vacíos deben llenarse con ceros.

Ejemplos y observaciones. 1. Hallar los puntos comunes a las dos curvas $x^2+y^2-y=0$, $y^2-1=0$.

La eliminación de y se hace en este caso fácilmente, observando que la primera ecuación, teniendo en cuenta la segunda, se puede escribir $x^2-y+1=0$, de donde $y=1+x^2$ y sustituyendo en la segunda ecuación, queda

$$R(x) \equiv x^2(x^2+2) = 0.$$

La raíz $x=0$ es doble, y a ella corresponde el solo valor $y=1$. Por tanto este punto $(0,1)$ será un punto de intersección de multiplicidad dos. Geométricamente esto corresponde a que la recta $y=1$, que es una parte de la segunda curva, es tangente a la circunferencia que es la primera curva.

Las otras intersecciones son simples e imaginarias, puesto que a cada uno de los valores $x_2 = \pm\sqrt{2}\,i$ corresponde la única solución $y=-1$.

Las intersecciones buscadas son, por tanto, una intersección doble en el punto $(0, 1)$ y dos intersecciones simples en los puntos $(\sqrt{2}\,i, -1)$, $(-\sqrt{2}\,i, -1)$.

2. En el ejemplo anterior la eliminación de y se ha hecho directamente, sin necesidad de formar la eliminante de SYLVESTER. A veces, sin embargo, ello es imprescindible. Sean las dos curvas

$$x^2 + y^2 - x = 0 \quad , \quad y^2 - x = 0 .$$

De ellas se deduce inmediatamente $x^2 = 0$. Parecería que la eliminante es, por tanto, $R(x) \equiv x^2$. Sin embargo, como ella debe ser de cuarto grado, se comprende que algo anormal ocurre. Formemos la eliminante de SYLVESTER

$$\begin{vmatrix} x^2 - x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & x^2 - x & 0 & 1 \\ -x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^4$$

La ecuación verdadera de la eliminante es, por tanto, $x^4 = 0$. Como a $x = 0$ corresponde el único punto de intersección $(0, 0)$, resulta que este punto es una intersección cuádruple.

3. Sean las dos curvas

$$xy - y^2 - x + 1 = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 - 1 = 0 .$$

También aquí, si para eliminar y, despejamos y en la segunda ecuación y sustituímos en la primera, después de quitar el radical que resulta, se obtiene $x(x-1) = 0$; como la eliminante debe ser de cuarto grado debemos formar la eliminante de SYLVESTER, obteniendo la verdadera eliminante $R(x) \equiv x^3(x-1)$. A la abscisa $x_1 = 1$ corresponde la única ordenada $y_1 = 0$ y por tanto $(1, 0)$ es un punto de intersección simple. En cambio a la abscisa $x_2 = 0$, raíz triple de $R(x) = 0$, corresponden las dos ordenadas $y_2 = 1$, $y_2 = -1$. Sobre la recta $x = 0$ hay en este caso dos puntos de intersección, entre los cuales deben distribuirse las tres intersecciones que debe haber, por ser $x = 0$, raíz triple de $R(x) = 0$.

El problema de hallar cómo se distribuyen estas intersecciones no es en general fácil. En el caso particular que tratamos, la representación gráfica de las dos curvas (la primera compuesta de dos rectas) nos dice inmediatamente que el punto $(0, 1)$ es de multiplicidad dos y el $(0, -1)$ es simple. En general, cuando se presenta un caso como éste, lo mejor es hacer una rotación de ejes coordenados de manera que sobre cada recta paralela al eje y haya un solo punto de intersección, lo cual siempre es posible por ser finito el número de estos puntos.

4. Puede ocurrir que al hallar la eliminante resulte idénticamente nula, o sea, $R(x) = 0$ para todo valor de x. Ello significa que a todo x corresponde por lo menos un valor de y tal que el punto (x, y) es común a las dos curvas. Esto sólo puede presentarse en dos casos: a) Las dos curvas tienen parte común; b) Las dos curvas tienen común el punto del infinito del eje y.

El primer caso significa que las dos curvas son de la forma $f = \varphi f_1$, $g = \varphi g_1$, con un factor común $\varphi(x, y)$; entonces la curva $\varphi(x, y) = 0$ pertenece a las dos. La existencia o no del factor φ se puede poner de manifiesto hallando el máximo común divisor de los dos polinomios f, g.

El segundo caso se averigua en general pasando a coordenadas homogéneas y viendo si el punto $(0, 1, 0)$ pertenece a las dos curvas. Por ejemplo, las dos curvas $xy - 1 = 0$, $xy + x - 2 = 0$ no tienen parte común y sin embargo su eliminante es

$$R(x) \equiv \begin{vmatrix} 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 0 & x & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x & x-2 \end{vmatrix} = 0$$

Ello se debe a que el punto (0, 1, 0) es común a las dos. En este caso para hallar las intersecciones se debe hacer también, en general, una rotación de ejes para evitar que dicho punto del infinito sea común. En muchos casos particulares, un estudio directo conduce más fácilmente a la solución. Por ejemplo en el caso anterior, la eliminación directa del producto xy da el punto común $x = 1$, $y = 1$. Los demás puntos comunes deben ser impropios y son el (0, 1, 0) ya mencionado y el (1, 0, 0), el primero contado dos veces, puesto que en él las dos curvas son tangentes, por tener por tangente común el eje y.

6. **Tangente a una curva algebraica.** — Necesitamos recordar del Álgebra, el siguiente teorema:

Si $F(x) = 0$ *es una ecuación de grado* n *y* $x = x_1$ *es una raíz múltiple de orden* h *de la misma, ella es raíz múltiple de orden* $h - 1$ *de la derivada* $F'(x) = 0$.

Recíprocamente: *Si* $x = x_1$ *es raíz común a las dos ecuaciones* $F(x) = 0$, $F'(x) = 0$, *ella es por lo menos raíz doble de la primera ecuación* $F(x) = 0$.

Sentado esto, sea la curva algebraica

[15] $$f(x, y) = 0$$

de grado n y sea x_1, y_1 uno de los puntos, o sea $f(x_1, y_1) = 0$.

Tomemos una recta cualquiera que pase por x_1, y_1,

[16] $$y = y_1 + m(x - x_1)$$

siendo m un coeficiente angular arbitrario.

Para hallar las intersecciones de la curva con esta recta, bastará resolver la ecuación

[17] $$f\left(x, y_1 + m(x - x_1)\right) = 0$$

la cual nos dará las abscisas de los puntos de intersección (las ordenadas se obtendrán entonces sustituyendo estas abscisas en [16]).

Queremos ver qué valor debe tomar m para que en el punto dado x_1, y_1 la curva y la recta tengan más de un punto de intersección confundidos. Ello querrá decir que x_1 es raíz múltiple de la ecuación [17]. Por tanto, deberá ser raíz de su derivada, o sea, deberá verificarse

[18] $$f_{x_1} + m f_{y_1} = 0$$

donde f_{x_1}, f_{y_1} indican las derivadas parciales tomadas en el punto x_1, y_1.

Si es

[19] $$f_{x_1} = 0 \quad , \quad f_{y_1} = 0$$

la ecuación [18] se satisface para cualquier valor de m; es

decir, cualquier recta que pase por el punto x_1, y_1 tiene en el mismo más de un punto de intersección confundidos. En este caso el punto se llama *singular*, y su estudio se hará en el § siguiente.

Si [19] no se cumple, la ecuación [18] nos da

$$[20] \qquad m = -\frac{f_{x_1}}{f_{y_1}}$$

y por tanto existe una única recta que pasa por x_1, y_1, de coeficiente angular dado por [20], que tiene en dicho punto más de un punto de intersección con la curva. Esta recta se llama la *tangente* a la curva en el punto x_1, y_1.

Sustituyendo [20] en [16] y quitando denominadores, la ecuación de la tangente se escribe

$$[21] \qquad (x - x_1) f_{x_1} + (y - y_1) f_{y_1} = 0.$$

Un punto que no sea singular, y en el cual exista por tanto una tangente bien determinada, se dice que es un *punto ordinario* de la curva

OBSERVACIÓN. Si $f_{y_1} = 0$, no puede escribirse [20], pero entonces, invirtiendo el papel de x y de y, la ecuación de la recta [16] puede escribirse $x = x_1 + m_1(y - y_1)$, y en vez de [18] se llega a la ecuación $f_{y_1} + m_1 f_{x_1} = 0$, que nos da $m_1 = 0$, o sea, la recta es paralela al eje y. El caso $f_{y_1} = 0$, $f_{x_1} \neq 0$ significa, por tanto, que la tangente en el punto x_1, y_1 es paralela al eje y o sea, su coeficiente angular vale infinito, como se deduce también directamente de [20].

Ejemplo. Para hallar la tangente a la curva $x^2 - y^2 + 4x - 1 = 0$ en el punto $(1, 2)$ basta observar que es $f_x = 2x + 4$, $f_y = -2y$ y por tanto $f_{x_1} = 6$, $f_{y_1} = -4$, resultando como ecuación de la tangente $6(x - 1) - 4(y - 2) = 0$, o sea, $6x - 4y + 2 = 0$.

Ecuación de la tangente en coordenadas homogéneas. Muchas veces, sobre todo cuando se trata de puntos en el infinito, conviene tener la ecuación de la tangente en coordenadas homogéneas.

Para obtenerla observemos que si el punto x_1, y_1 que en coordenadas homogéneas será el $(x_1, y_1, 1)$ pertenece a la curva, será $f(x_1, y_1, 1) = 0$ y por tanto, según la relación de Euler [1]

$$[22] \qquad x_1 f_{x_1}(x_1, y_1, 1) + y_1 f_{y_1}(x_1, y_1, 1) + f_{t_1}(x_1, y_1, 1) = 0$$

y siendo $f_{x_1}(x_1, y_1, 1)$, $f_{y_1}(x_1, y_1, 1)$ las mismas derivadas parciales que aparecen en [21], esta ecuación puede escribirse

[1] Recordemos que la relación de Euler de las funciones homogéneas se escribe

$$xf' + yf' + tf'_t \equiv nf$$

siendo n el grado de la función homogénea $f(x, y, t)$.

$$xf_{x_1}(x_1, y_1, 1) + yf_{y_1}(x_1, y_1, 1) + f_{t_1}(x_1, y_1, 1) = 0$$

o bien, pasando a coordenadas homogéneas generales, por lo cual basta sustituir x por x/t, y por y/t y poner t donde figura el 1, resulta, quitando denominadores,

$$[23] \qquad xf_{x_1} + yf_{y_1} + tf_{t_1} = 0$$

que es *la ecuación de la tangente en coordenadas homogéneas.*

Esta ecuación se diferencia de la [21] en que las derivadas f_{x_1}, f_{y_1}, f_{t_1} se refieren a la función homogénea $f(x, y, t)$ tomadas siempre en el punto x_1, y_1, t_1.

Si las tres derivadas parciales f_{x_1}, f_{y_1}, tt_1 son nulas, la tangente en el punto x_1, y_1, t_1 no está determinada y el punto es singular (ver el § siguiente). En caso contrario existe siempre tangente única dada por [23].

Ejemplos: 1. La misma curva del ejemplo anterior, en coordenadas homogéneas se escribe $x^2 - y^2 + 4xt - t^2 = 0$ y es, por tanto, $f_x = 2x + 4t$, $f_y = -2y$, $f_t = 4x - 2t$. En el punto $(1, 2, 1,)$, el mismo considerado anteriormente, vale $f_{x_1} = 6$, $f_{y_1} = -4$, $ft_1 = 2$ y la ecuación [23] de la tangente resulta $6x - 4y + 2t = 0$, igual que antes.

7. **Puntos del infinito de una curva algebraica.** — Los puntos del infinito de una curva algebraica pueden encontrarse por el mismo método general de § 24-5 aplicable a cualquier curva, sea algebraica o no. Sin embargo, para el caso particular de las curvas algebraicas, el uso de las coordenadas homogéneas permite hallarlos de una manera más cómoda y elegante.

En efecto, si $f(x, y, t) = 0$ es la ecuación de la curva en coordenadas homogéneas, puesto que los puntos del infinito están caracterizados por la condición $t = 0$, ellos estarán dados por la ecuación

$$[24] \qquad f(x, y, 0) = 0.$$

Ésta es una ecuación homogénea, de grado igual al de la curva, que suponemos n, y que, por tanto, como vimos en nº 2, puede descomponerse en la forma

$$[25] \qquad f(x, y, 0) \equiv a(y - \lambda_1 x)(y - \lambda_2 x) \ldots (y - \lambda_n x) = 0$$

siendo λ_i las raíces de la ecuación $f(1, \lambda, 0) = 0$.

Los puntos del infinito de la curva f son los puntos del infinito de las rectas $y - \lambda_i x = 0$, o sea, los puntos $(1, \lambda_i, 0)$.

Si la curva está dada en coordenadas no homogéneas y agrupamos los términos de grado n, los de grado $n - 1$, etc., como se hizo en [9], en la forma

$$[26] \qquad f(x, y) \equiv \varphi_n(x, y) + \varphi_{n-1}(x, y) + \ldots + \varphi_0$$

al pasar a coordenadas homogéneas es

[27] $$f(x, y, t) \equiv \varphi_n(x, y) + t\varphi_{n-1}(x, y) + \ldots + t^n\varphi_0$$

y por tanto es $f(x, y, 0) \equiv \varphi_n(x, y)$, lo cual permite enunciar el resultado anterior en la forma:

Los puntos del infinito de una curva algebraica están dados por las direcciones de las n rectas representadas por los términos de mayor grado de la ecuación no homogénea de la curva.

De [27] se deduce también $f(1, \lambda, 0) = \varphi_n(1, \lambda)$ y por tanto, los coeficientes angulares de las rectas que dan las direcciones de los puntos del infinito son las raíces de la ecuación $\varphi_n(1, \lambda) = 0$.

Obsérvese que el número de puntos del infinito (distintos o coincidentes, reales o imaginarios) es siempre igual al grado de la curva. Así debe ser, por otra parte, puesto que ya sabemos que cualquier recta, en particular la del infinito, corta a la curva en n puntos.

Ejemplos: 1. La cúbica $xy^2 - x^3 - y = 0$, tiene los puntos del infinito dados por $xy^2 = 0$, o sea, son el punto del infinito del eje $y\,(x = 0)$ y el del eje $x\,(y = 0)$ contado dos veces.

2. Los puntos del infinito de la cúbica $y(y^2 - 4x^2) + 3(x^2 - y^2) = 0$ están dados por $y(y^2 - 4x^2) = 0$ y por tanto son: a) $y = 0$, punto del infinito del eje x; b) el punto del infinito de la recta $y = -2x$; c) punto del infinito de la recta $y = +2x$. En coordenadas homogéneas estos puntos son $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(1, -2, 0)$.

3. La cuártica $x^4 - y^4 + x^2y + 2x^2 - 1 = 0$ tiene los puntos del infinito dados por $x^4 - y^4 = 0$, o sea, $(x - y)(x + y)(x - iy)(x + iy) = 0$. Tiene por tanto como puntos reales impropios los de las rectas $y = x$, $y = -x$ y como puntos imaginarios los de las rectas $x = iy$, $x = -iy$ (puntos cíclicos del plano).

8. **Asíntotas de una curva algebraica.** — Para las curvas algebraicas resulta cómodo definir las asíntotas como tangentes en los puntos impropios, o sea,

Se llaman asíntotas de una curva algebraica a las tangentes en los puntos del infinito de la misma cuando éstas son rectas propias.

Para determinarlas se puede seguir el método general (§ 24-5), válido para cualquier curva, pero en el caso de las curvas algebraicas es en general más cómodo alguno de los dos métodos siguientes

a) Conocido el punto del infinito, la ecuación [23] de la tangente en coordenadas homogéneas, permite escribir inmediatamente la ecuación de la asíntota. Es decir, si $(x_1, y_1, 0)$ es el punto del infinito de la curva, la asíntota correspondiente será

[28] $$xf_{x_1} + yf_{y_1} + tf_{t_1} = 0$$

donde las derivadas parciales están tomadas en el punto $x_1, y_1, t_1 = 0$.

Ejemplos: 1. Los puntos del infinito de la curva $xy^2 - x^2 - y = 0$ o, en coordenadas homogéneas, $xy^2 - x^2t - yt^2 = 0$, ya vimos en el ejemplo 1 del número anterior que eran $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 0)$, este último contado dos veces. Siendo $f_x = y^2 - 2xt$, $f_y = 2xy - t^2$, $f_t = -x^2 - 2yt$, en el punto $(0, 1, 0)$ será $f_{x_1} = 1$, $f_{y_1} = 0$, $f_{t_1} = 0$ y por tanto la asíntota es $x = 0$ (el eje y). Para el segundo $f_{x_1} = 0$, $f_{y_1} = 0$, $f_{t_1} = -1$ y por tanto la asíntota es $t = 0$, o sea la recta del infinito. Esto explica que el punto $(1, 0, 0)$ estuviera contado dos veces, puesto que la recta del infinito es tangente a la curva y por tanto tiene en dicho punto dos puntos comunes.

2. Para la curva $y(y^2 - 4x^2) + 3(x^2 - y^2)t = 0$, es

$$f_x = -8xy + 6xt \quad , \quad f_y = 3y^2 - 4x^2 - 6yt \quad , \quad f_t = 3(x^2 - y^2)$$

y por tanto las tangentes en los puntos del infinito de la curva, que son $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 0)$, $1, -2, 0)$ serán, respectivamente,

$$-4y + 3t = 0 \quad , \quad -16x + 8y - 9t = 0 \quad , \quad 16x + 8y - 9t = 0.$$

3. Los puntos del infinito de la curva $x^4 - y^4 + x^2y + 2x^2 - 1 = 0$ son, en coordenadas homogéneas, $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$, $(1, i, 0)$, $(1, -i, 0)$. Escribiendo la curva en coordenadas homogéneas y derivando, resulta

$$f_x = 4x^3 + 2xyt + 4xt^2 \quad , f_y = -4y^3 + x^2t \quad , f_t = x^2y + 4x^2t - 4t^3$$

y por tanto las asíntotas correspondientes en los puntos dichos son:

$$4x - 4y + t = 0 \quad , \quad 4x + 4y - t = 0 \quad , \quad 4x + 4iy + it = 0 \quad , \quad 4x - 4iy - it = 0.$$

4. Sea la cúbica $y^3 - ax^2 + bxy = 0$. Sus puntos del infinito están los tres confundidos en el $(1, 0, 0)$ o sea el punto del infinito del eje x. Para ver si hay asíntota o es un punto singular hay que hallar las derivadas parciales en él, resultando fácilmente $f_{x_1} = 0$, $f_{y_1} = 0$, $f_{t_1} = -a$. Por tanto es un punto ordinario y la asíntota resulta ser $t = 0$, o sea la recta del infinito.

b) Otro método para hallar las ecuaciones de las asíntotas es el siguiente. Hemos visto en nº 7 que los puntos del infinito de la curva están dados por las rectas $y = \lambda_i x$, siendo λ las raíces de la ecuación $\varphi_n(1, \lambda) = 0$. Las asíntotas buscadas, por pasar por estos puntos, serán de la forma $y = \lambda_i x + \delta_i$ y todo se reduce a calcular los términos independientes δ_i.

Para ello observemos que las intersecciones de la recta $y = \lambda_i x + \delta_i$ con la curva [26] tendrán por abscisas las raíces de la ecuación

$$[29] \qquad \varphi_n(x, \lambda_i x + \delta_i) + \varphi_{n-1}(x, \lambda_i x + \delta_i) + \ldots + \varphi_0 = 0$$

que siendo φ_n, φ_{n-1}, ..., polinomios homogéneos de grados n, $n-1$, ..., se puede escribir

$$[30] \qquad x^n\varphi_n\left(1, \lambda_i + \frac{\delta_i}{x}\right) + x^{n-1}\varphi_{n-1}\left(1, \lambda_i + \frac{\delta_i}{x}\right) + \ldots + \varphi_0 = 0.$$

Sustituyendo en esta expresión los siguientes desarrollos de Taylor

$$\varphi_n\left(1, \lambda_i + \frac{\delta_i}{x}\right) = \varphi_n(1, \lambda_i) + \varphi'_n(1, \lambda_i)\frac{\delta_i}{x} + \ldots$$

$$\varphi_{n-1}\left(1, \lambda_i + \frac{\delta_i}{x}\right) = \varphi_{n-1}(1, \lambda_i) + \varphi'_{n-1}(1, \lambda_i)\frac{\delta_i}{x} + \ldots$$

ordenando, y dividiendo por x^n, resulta que [30] equivale a

$$\varphi_n(1, \lambda_i) + \frac{1}{x}\left[\varphi'_n(1, \lambda_i)\delta_i + \varphi_{n-1}(1, \lambda_i)\right] + \frac{1}{x^2}[\ldots] = 0.$$

El hecho de ser $\varphi_n(1, \lambda_i) = 0$, nos dice que la ecuación última tiene una raíz $x = \infty$, lo que ya sabíamos, por el hecho de pasar la recta

$y = \lambda_i x + \delta_i$ por un punto del infinito de la curva. Para que esta raíz sea doble y por consiguiente la recta anterior resulte tangente en dicho punto a la curva, debe ser también nulo el coeficiente de $1/x$, y por tanto

$$\delta_i = -\frac{\varphi_{n-1}(1, \lambda_i)}{\varphi'_n(1, \lambda_i)}. \tag{31}$$

Ésta es la fórmula buscada que nos da los términos independientes δ_i de las ecuaciones de las asíntotas.

Ejemplo. Sea la curva $y^3 - 4x^2y - 4y^2 + 5y + 3x - 6 = 0$. Es $\varphi_n(1, \lambda) = \lambda^3 - 4\lambda$ y por tanto $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$. Por otra parte es $\varphi_{n-1}(1, \lambda) = -4\lambda^2$, $\varphi'_n(1, \lambda) = 3\lambda^2 - 4$. Por consiguiente, aplicando [31] resulta $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 2$, $\delta_3 = 2$ y las ecuaciones de las asíntotas serán $y = 0$, $y = 2x + 2$, $y = -2x + 2$.

§ 27. Puntos singulares de una curva algebraica

1. **Puntos múltiples.** — Ya hemos visto (§ 26-3) cómo debe contarse la multiplicidad de los puntos de intersección de una recta con una curva algebraica. Sentado esto, se adopta la siguiente

Def. *Un punto* (x, y) *de una curva algebraica* f(x, y) = 0 *se dice que es múltiple de orden* r, *cuando todas las rectas que pasan por él, excepto un número finito, tienen* r *puntos de intersección con la curva confundidos en dicho punto.*

Para $r = 1$, el punto se llama *simple* u *ordinario*; para $r \geqslant 2$, se llama *múltiple* o *singular*. En particular, para $r = 2$, se llama *doble*; para $r = 3$, *triple*, etc.

Ejemplos y notas: 1. En § 26-3 vimos que en los puntos simples u ordinarios, todas las rectas tienen una sola intersección con la curva en el punto considerado, excepto la recta tangente que tiene más de uno, de acuerdo con la definición anterior.

2. Sea la cúbica $x^2 - y^2 + 3x^3 - y^3 = 0$. Consideremos una recta arbitraria $y = \lambda x$ que pase por el origen. Las intersecciones de esta recta con la cúbica se obtienen eliminando y, o sea resolviendo la ecuación

$$x^2(1 - \lambda^2) + 3x^3 - \lambda^3 x^3 = 0.$$

La raíz $x = 0$, a la cual corresponde el punto de intersección $x = 0$, $y = 0$ (origen) es doble para todo $\lambda \neq \pm 1$ y triple para los valores $\lambda = \pm 1$. Es decir, todas las rectas que pasan por el origen, excepto las dos $y = x$, $y = -x$, tienen con la curva dos puntos de intersección confundidos en dicho punto. Las rectas $y = \pm x$, en cambio, tienen cada una tres puntos de intersección. Según la definición dada, el origen es un punto doble de la curva.

3. De la definición del punto múltiple y del teorema de Bezout (§ 26-5) se deducen algunas consecuencias inmediatas importantes. Por ejemplo, una cúbica no puede tener dos puntos dobles si es irreducible; en efecto, en tal caso la recta que los une tendría 4 puntos de intersección con la curva, contrario al teorema de Bezout. Si es reducible, sí puede tenerlos; así la cúbica formada por una cónica y una recta tiene como puntos dobles los dos en que la recta corta a la cónica.

En general, una curva irreducible de orden n que tenga un punto múltiple de orden $n - 1$, tiene todos los demás puntos simples.

2. **Propiedades de los puntos múltiples.** — Puesto que la multiplicidad con que hay que contar los puntos de intersección de una recta con una curva no depende del sistema de coordenadas, lo mismo ocurrirá con el orden de multiplicidad de un punto de la curva. Es decir: *el orden de multiplicidad de un punto de una curva algebraica es intrínseco a la curva, es decir, no depende del sistema de coordenadas.*

Aprovechando esta propiedad, es casi siempre cómodo para estudiar un punto de una curva y ver su multiplicidad, elegirlo como origen de coordenadas.

Supongamos, pues, que ya hemos trasladado los ejes y que queremos estudiar el origen de coordenadas, punto que pertenece a la curva. La ecuación de la curva, agrupando los términos del mismo grado, será de la forma

$$[1] \quad f(x, y) \equiv \varphi_r(x, y) + \varphi_{r+1}(x, y) + \ldots + \varphi_n(x, y)$$

donde φ_r, φ_{r+1}, ..., son polinomios homogéneos de grado r, $r+1$, ..., y siendo $r \geqslant 1$.

Las intersecciones de esta curva con la recta $y = \lambda x$ se obtendrán resolviendo la ecuación resultante

$$f(x, \lambda x) = x^r \varphi_r(1, \lambda) + x^{r+1} \varphi_{r+1}(1, \lambda) + \ldots + x^n \varphi_n(1, \lambda) = 0$$

Exceptuados los valores de λ para los cuales es $\varphi_r(1, \lambda) = 0$, para todos los demás, la ecuación anterior tiene la raíz $x = 0$ múltiple de orden r. Por tanto:

a) *El orden de multiplicidad del origen es igual al grado de los términos de menor grado de la ecuación de la curva.*

Las rectas $y = \lambda_i x$, cuyo coeficiente angular λ_i satisface a la ecuación $\varphi_r(1, \lambda_i) = 0$, tienen por lo menos $r+1$ puntos de intersección con la curva confundidos en el origen. Ellas son las llamadas *tangentes* en el punto múltiple. Siendo $\varphi_r(1, \lambda)$ de grado r, tendrá r raíces, distintas o confundidas, reales o imaginarias. Además, siendo $\varphi_r(1, \lambda) = a(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_r)$ será también $\varphi_r(x, y) = a(y - \lambda_1 x)(y - \lambda_2 x) \ldots (y - \lambda_r x)$, es decir, la ecuación conjunta de las r tangentes es la $\varphi_r(x, y) = 0$. En resumen:

b) *Todo punto múltiple de orden* r *tiene* r *tangentes, distintas o confundidas, reales o imaginarias. Si el punto múltiple es el origen de coordenadas, la ecuación conjunta de las tangentes es la* $\varphi_r(x, y) = 0$, *formada con los términos de menor grado de la ecuación de la curva.*

Ejemplos: 1. La curva $x^2 - y^2 + x^3 y - x^4 = 0$ tiene el origen como punto doble y las tangentes en él están dadas por $x^2 - y^2 = 0$, o sea son $y = x$, $y = -x$.

2. La curva $x^2(y - 4x) + x^5 - y^6 = 0$ tiene el origen como punto triple con la tangente simple $y = 4x$ y la $x = 0$ contada dos veces.

3. La curva $x^4 - x^2y - y^3 = 0$ tiene el origen como punto triple, con la tangente $y = 0$ real y las rectas isótropas $y = ix$, $y = -ix$ como tangentes imaginarias. Obsérvese que en un entorno del origen la curva presenta un solo arco real, tangente al eje x, con toda la apariencia de tener el origen como punto simple.

Si el punto múltiple de orden r en vez de ser el origen es el punto x_0, y_0, la ecuación de la curva se podrá escribir, por una traslación de ejes,

[2] $$f(x, y) \equiv \varphi_r(x - x_0, y - y_0) + \varphi_{r+1}(x - x_0, y - y_0) + \ldots = 0$$

siendo ahora $\varphi_r, \varphi_{r+1}, \ldots$, polinomios homogéneos en los binomios $x - x_0$, $y - y_0$.

Conoceremos, pues, que un punto x_0, y_0 es múltiple de orden r, si $f(x, y)$ puede escribirse en la forma [2].

De [2] se deduce que la curva de ecuación $f_x = 0$, o sea

[3] $$f_x \equiv \frac{\delta\, \varphi_r(x - x_0, y - y_0)}{\delta\,(x - x_0)} + \frac{\delta\, \varphi_{r+1}(x - x_0, y - y_0)}{\delta\,(x - x_0)} + \ldots = 0$$

tendra como grado de los términos de menor grado en $x - x_0$, $y - y_0$, el valor $r - 1$.

Análogamente, la curva de ecuación $f_y = 0$, o sea,

[4] $$f_y \equiv \frac{\delta\, \varphi_r(x - x_0, y - y_0)}{\delta\,(y - y_0)} + \frac{\delta\, \varphi_{r+1}(x - x_0, y - y_0)}{\delta\,(y - y_0)} + \ldots = 0$$

tiene los términos de menor grado, de grado $r - 1$. De aquí:

c) *Si un punto es múltiple de orden* r *para la curva* $f = 0$, *es múltiple de orden por lo menos* r — 1 *para las curvas* $f_x = 0$, $f_y = 0$.

Decimos "por lo menos" porque puede darse el caso en que sea múltiple de mayor orden. Para la curva $f_x = 0$ esto ocurrirá solamente cuando la derivada $\delta\varphi_r/(x - x_0)$ sea idénticamente nula, o sea, cuando $\varphi_r(x - x_0, y - y_0)$ únicamente dependa de $y - y_0$. Análogamente, para $f_y = 0$, dicho caso se presentará cuando $\varphi_r(x - x_0, y - y_0)$ dependa sólo de $x - x_0$. Por ejemplo, el origen es triple para la curva $y^3 + x^2y^3 + x^5 = 0$ y es cuádruple para la $f_x \equiv 2xy^3 + 5x^4 = 0$.

3. **Determinación de los puntos múltiples.** — Según el último teorema, los puntos múltiples deberán satisfacer a las tres ecuaciones

[5] $$f = 0 \quad , \quad f_x = 0 \quad , \quad f_y = 0.$$

Como se trata de un sistema de tres ecuaciones con dos

incógnitas, se comprende que "en general" las curvas carecerán de puntos múltiples.

Para tener en cuenta los puntos del infinito, conviene usar coordenadas homogéneas. Entonces, teniendo en cuenta la relación de EULER (§ 26, nota del nº 6) el sistema [5] equivale a

$$[6] \qquad f_x = 0 \quad , \quad f_y = 0 \quad , \quad f_t = 0$$

donde aquí las derivadas parciales son tomadas de la ecuación homogénea $f(x, y, t) = 0$. En resumen:

Los puntos múltiples de una curva, si existen, se hallarán resolviendo el sistema [5] *si la curva está dada en coordenadas no homogéneas, o bien el sistema equivalente* [6] *si está dada en coordenadas homogéneas.*

Para ver que hay curvas de grado tan elevado como se quiera y que carecen de puntos múltiples, basta considerar el ejemplo $x^n + y^n - t^n = 0$, con n un entero positivo cualquiera. Si tuviera puntos múltiples, ellos serían solución del sistema $n\,x^{n-1} = 0$, $n\,y^{n-1} = 0$, $n\,t^{n-1} = 0$, que sólo tiene la solución $(0, 0, 0)$, que no corresponde a ningún punto.

Aplicando el mismo razonamiento del final del número anterior, a las curvas f_x, f_y, resulta que si un punto es múltiple de orden r para f, lo será de orden por menos $r - 2$ para las curvas $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 0$.

Procediendo sucesivamente, se tiene que si un punto es múltiple de orden r debe anular a todas las derivadas parciales hasta las de orden $r - 1$. Como el número de derivadas parciales de primer orden es 2, de segundo orden 3, ..., resulta que si un punto es múltiple de orden r debe satisfacer a $1 + 2 + 3 + \ldots + r = \frac{1}{2}r(r+1)$ ecuaciones. Por tanto, ello impone $\frac{1}{2}r(r+1)$ condiciones a los coeficientes de la curva. Comparando con § 26, nº 4, donde se vió que cada punto da una condición para determinar la curva, el hecho anterior se suele enunciar.

Dar un punto múltiple de orden r equivale a dar $\frac{1}{2}r(r+1)$ *puntos simples.*

En particular, un punto doble equivale a tres simples, un triple a seis simples, etc.

El problema de la determinación de los puntos múltiples de una curva presenta dos partes. Primero, averiguar si la curva tiene o no puntos múltiples; segundo, hallar estos puntos en el caso de que existan.

Para lo primero hay que ver si el sistema [5] (o el [6]) es compatible, para lo cual el álgebra da una regla general. Se elimina una de las variables, por ejemplo la y entre las dos primeras ecuaciones, obteniendo la resultante $R_1(x) = 0$. Se elimina luego la misma variable entre las dos últimas ecuaciones $f_x = 0$, $f_y = 0$, obteniendo otra resultante $R_2(x) = 0$. Luego se ve si las dos ecuaciones $R_1(x) = 0$, $R_2(x) = 0$ tienen alguna raíz común o no, para lo cual basta ver si es nula la nueva resultante R_3 obtenida eliminando x entre estas ecuaciones. Todas estas

operaciones consisten en el cálculo de determinantes, es decir, son operaciones racionales[1]. Sin embargo ellas suelen ser largas y engorrosas. Siempre que se pueda es preferible usar artificios adecuados a cada caso particular.

Habiendo utilizado el sistema [5], las soluciones correspondientes a la recta del infinito pueden haber escapado, es decir, no han sido tenidos en cuenta los posibles puntos múltiples en el infinito. Para averiguar su existencia, basta escribir el sistema [6] y hacer en él $t=0$; los puntos múltiples impropios, si los hay, deben ser soluciones del sistema

$$f_x(x, y, 0) = 0 \quad , \quad f_y(x, y, 0) = 0 \quad , \quad f_t(x, y, 0) = 0$$

cuya compatibilidad se averigua por el mismo método indicado para el sistema [5].

Si resulta que la curva tiene puntos múltiples, para la determinación efectiva de los mismos se procede así: sabiendo que $R_1(x)=0$, $R_2(x)=0$ tienen alguna raíz común, se busca el máximo común divisor de los polinomios $R_1(x)$, $R_2(x)$, sea $\varphi(x)$. Las raíces de $\varphi(x)=0$ serán las soluciones comunes a $R_1(x)=0$, $R_2(x)=0$ y por tanto entre ellas estarán las abscisas de los puntos múltiples. Con las distintas raíces de $\varphi(x)=0$, cada una de las ecuaciones [5] dará una ecuación en la variable y; se buscan las raíces de estas ecuaciones y las raíces comunes (que deben existir dado el método seguido) serán las ordenadas de los puntos múltiples. Obsérvese que esto obliga a la solución efectiva de ecuaciones que en general son de grado superior, lo cual, como es sabido, no siempre es posible mediante un número finito de operaciones algebraicas.

En resumen, así como la averiguación de si una curva tiene o no puntos múltiples puede hacerse siempre mediante un número finito de operaciones racionales, la determinación efectiva de estos puntos múltiples, caso de existir, obliga generalmente a la resolución de ecuaciones de grado superior.

Ejemplos: 1. Averiguar si tiene puntos múltiples la curva

$$f \equiv x^4 - x^3y + 3x^2 - 5y + 1 = 0.$$

Se tienen las ecuaciones

$$f_x \equiv 4x^3 - 3x^2y + 6x = 0 \quad , \quad f_y \equiv -x^3 - 5 = 0.$$

Este caso es simple, pues la última ecuación no contiene la y. Además, eliminando y entre $f=0$, $f_x=0$, para lo cual basta resolverlas respecto de y e igualar los valores obtenidos, resulta

$$x^6 - 3x^4 + 20x^3 - 3x^2 + 30x = 0.$$

Como esta ecuación y la $x^3+5=0$ no tienen raíz común, el sistema [5] es incompatible.

Resulta, por tanto, que la curva no tiene puntos múltiples a distancia finita. Para ver si los hay en el infinito, escribiendo f en coordenadas homogéneas, se tiene el sistema

$$f_x(x, y, 0) \equiv 4x^3 - 3x^2y = 0 \quad , \quad f_y(x, y, 0) \equiv -x^3 = 0 \quad , \quad f_t(x, y, 0) \equiv 0$$

que tiene la solución $x=0$. Por tanto la curva dada tiene como único punto múltiple el punto del infinito del eje y

2. Hallar los puntos múltiples, si existen, de la cúbica

$$f \equiv 4x^3 - 4x^2 - 4y^2 - 4x - 12y - 5 = 0.$$

Se tienen las ecuaciones

$$f_x \equiv 12x^2 - 8x - 4 \quad , \quad f_y \equiv -8y - 12$$

cuyas soluciones comunes son

$$(x = 1, \quad y = -3/2) \quad , \quad (x = -1/3, \quad y = -3/2).$$

---

[1] Para estas cuestiones se puede ver cualquier libro de Álgebra o bien la obra: REY PASTOR, PÍ CALLEJA, TREJO, *Análisis Matemático*, Vol. I, pág. 572.

De estas soluciones sólo la primera satisface la ecuación $f = 0$. Por tanto la cúbica tiene el solo punto múltiple $x = 1$, $y = -3/2$.

En el infinito no puede haber ningún punto múltiple, porque una cúbica no puede tener más de uno, cosa que por otra parte resulta inmediata por el método del ejemplo anterior.

3. Ver si tiene puntos múltiples la cúbica

$$f \equiv x^3 - y^3 + 2xy - 3 = 0.$$

Se tienen las ecuaciones

$$f_x \equiv 3x^2 + 2y = 0 \quad , \quad f_y \equiv -3y^2 + 2x = 0$$

de cuyo sistema se deduce

$$3(x^2 - y^2) + 2(x + y) = 0 \quad \text{o sea} \quad (x + y)[3(x - y) + 2] = 0.$$

La solución $y = -x$, sustituída en el sistema $f_x = 0$, $f_y = 0$ da las posibilidades $(x = 0, y = 0)$, $(x = 2/3, y = -2/3)$ ninguna de las cuales satisface a $f = 0$. La otra solución de la última ecuación es $x = y - \frac{2}{3}$, que puesta en la ecuación $f_y = 0$ da $y = (1 \pm i\sqrt{3})/3$ y por tanto $x = y - \frac{2}{3} = (-1 \pm i\sqrt{3})/3$. Como tampoco esta solución satisface a $f = 0$ resulta que la cúbica dada no tiene puntos múltiples a distancia finita. Para ver si los hay en el infinito, escribiendo f en coordenadas homogéneas y derivando resulta

$$f_x(x, y, 0) \equiv 3x^2 = 0 \quad , \quad f_y(x, y, 0) \equiv -3y^2 = 0 \quad ,$$
$$f_t(x, y, 0) \equiv 2xy = 0 \quad ,$$

sistema que sólo tiene la solución $x = 0$, $y = 0$ que junto con $t = 0$, no corresponde a ningún punto.

4. Hallar los puntos múltiples de la *astroide* (§ 26-1)

$$f \equiv (x^2 + y^2 - a^2)^3 + 27a^2x^2y^2 = 0.$$

Se tienen las ecuaciones

$$f_x \equiv 6(x^2 + y^2 - a^2)^2x + 54a^2xy^2 = 0$$
$$f_y \equiv 6(x^2 + y^2 - a^2)^2y + 54a^2x^2y = 0$$

de las cuales se deduce

$$yf_x - xf_y \equiv 54a^2xy(y^2 - x^2) = 0.$$

Para $x = 0$ se tienen las soluciones $y = \pm a$. Para $y = 0$, las soluciones $x = \pm a$, para $y = \pm x$, la ecuación $f_x = 0$ da $(2x^2 - a^2)^2 = -9a^2x^2$ y la $f = 0$ da $(2x^2 - a^2)^3 = -27a^2x^4$. De ambas ecuaciones se deduce $a^2 + x^2 = 0$, o sea, $x = \pm ia$. En resumen, tenemos ocho puntos múltiples, a saber: $(0, a)$, $(0, -a)$, $(a, 0)$, $(-a, 0)$, (ia, ia), $(ia, -ia)$, $(-ia, ia)$, $(-ia, -ia)$.

Con esto quedan agotadas las posibilidades a distancia finita. Para los puntos del infinito, tenemos el sistema

$$f_x(x, y, 0) \equiv 6(x^2 + y^2)x = 0 \quad f_y(x, y, 0) \equiv 6(x^2 + y^2)y = 0 \ , \quad t = 0$$

que admite la solución $x^2 + y^2 = 0$, o sea, $y = \pm ix$. Es decir, a los ocho puntos anteriores hay que añadirle los dos puntos del infinito de las rectas isótropas $y = \pm ix$, o sea, los puntos cíclicos del plano.

4. **Puntos múltiples en el infinito.** — El método del nº 2 de llevar el punto que se quiera estudiar a coincidir con el origen de coordenadas por una traslación de ejes, no se puede aplicar cuando se trata de un punto del infinito. Sin embargo, utilizando coordenadas homogéneas, por una rotación de ejes se podrá lograr que el punto sea el del infinito de uno cualquiera de los ejes, sea del eje y, o sea el punto $(0, 1, 0)$, sea del eje x,

o sea el punto $(1, 0, 0)$. Entonces el estudio se hace igualmente que para el origen $(0, 0, 1)$, con sólo permutar el papel de las variables.

Supongamos, para fijas las ideas, que el punto singular sea el $(0, 1, 0)$. Escrita la ecuación en coordenadas homogéneas, así como hemos visto que las tangentes en el origen $(0, 0, 1)$ están dadas por los términos de menor grado en x, y al hacer $t = 1$, de la misma manera las tangentes en el punto $(0, 1, 0)$ estarán dadas por los términos de menor grado en x, t, después de hacer $y = 1$.

Ejemplos: 1. Sea la curva $x^2y^2 - a^2y^2 + b^2x^2 = 0$. En coordenadas homogéneas es $x^2y^2 - a^2y^2t^2 + b^2x^2t^2 = 0$ y al hacer $y = 1$ los términos de menor grado son $x^2 - a^2t^2$; por tanto el punto del infinito del eje y es doble y sus tangentes son las rectas $x^2 - a^2t^2 = 0$, o sea, $x = +a$, $x = -a$. Éstas serán las dos asíntotas de la curva paralelas al eje y (fig. 103).

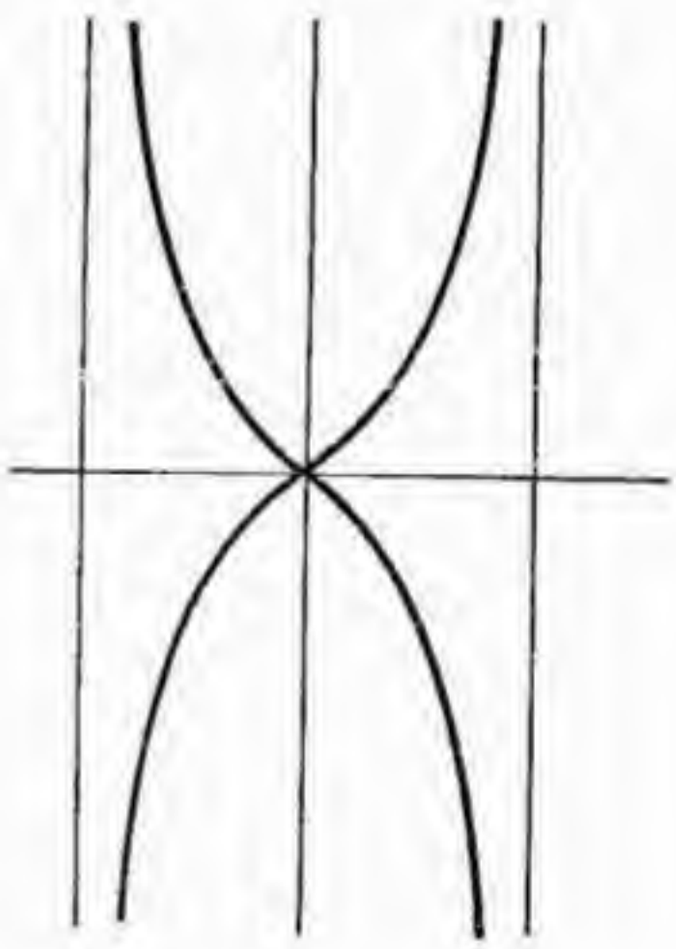

Fig. 103.

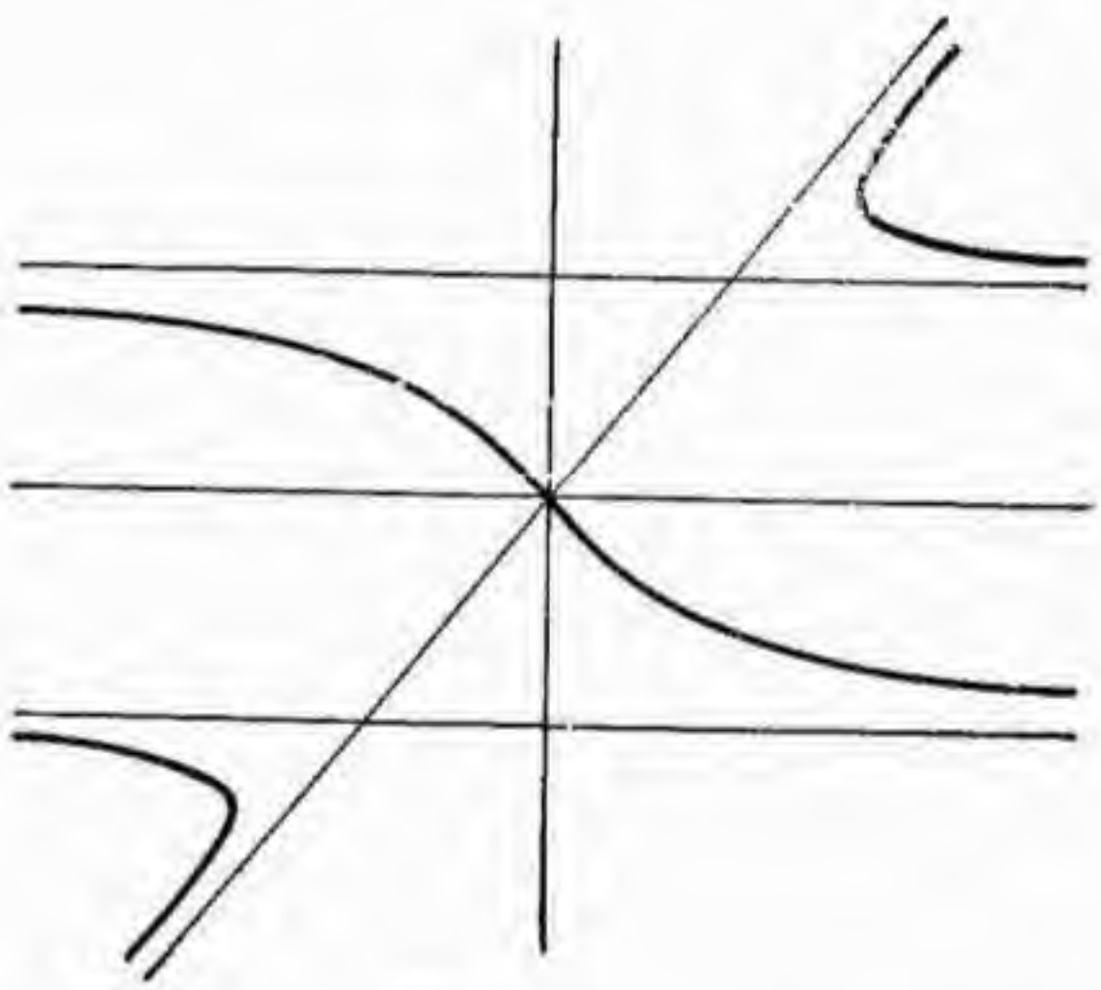

Fig. 104.

También el punto del infinito del eje x pertenece a la curva y es un punto doble, pues al hacer en la ecuación homogénea $x = 1$ los términos de menor grado dan la ecuación $y^2 + b^2t^2 = 0$, que representa dos rectas imaginarias. En este caso las dos tangentes son imaginarias $(y = ib,\ y = -ib)$; se dice que se trata de un *punto aislado*.

2. Sea la cúbica $x + y^3 - y^2x = 0$. En coordenadas homogéneas es $xt^2 + y^3 - xy^2 = 0$. Al hacer $x = 1$, los términos de menor grado dan $t^2 - y^2 = 0$. Por tanto el punto del infinito del eje x es doble y sus tangentes son $y = \pm 1$ (fig. 104).

5. **Puntos dobles: sus clases.** — Según el nº 2, b), en un punto doble la curva debe tener dos tangentes, que pueden ser reales o imaginarias, distintas o coincidentes. Según los distintos casos que pueden presentarse, se tienen los siguientes tipos de puntos dobles:

1. *Nodos.* Son los puntos dobles con dos tangentes reales. Por ejemplo, la curva $x^2 - y^2 - x^3 = 0$, tiene en el origen un punto doble con las dos tangentes $y = x$, $y = -x$; por tanto es un nodo (fig. 105).

2. *Nodos con tangentes imaginarias o puntos dobles aislados.* Son los puntos dobles reales con dos tangentes imaginarias.

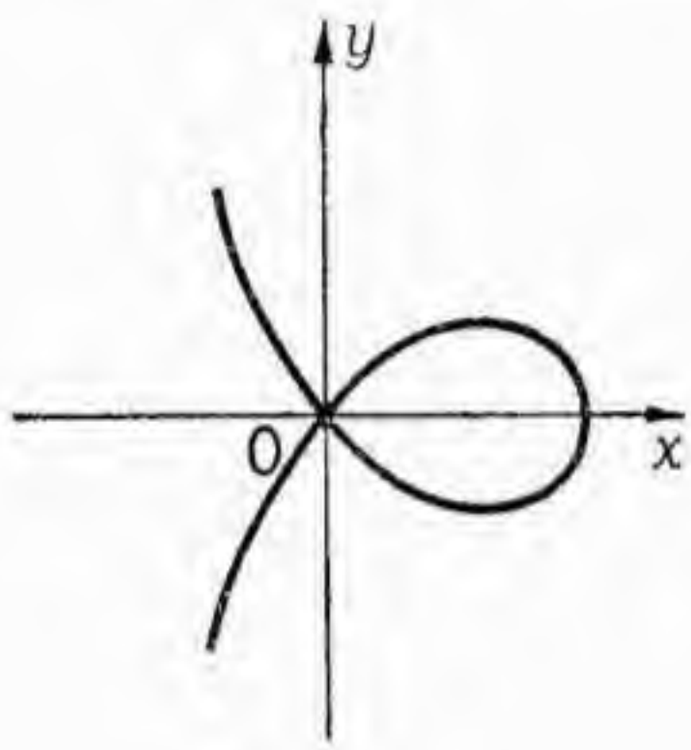

Fig. 105.

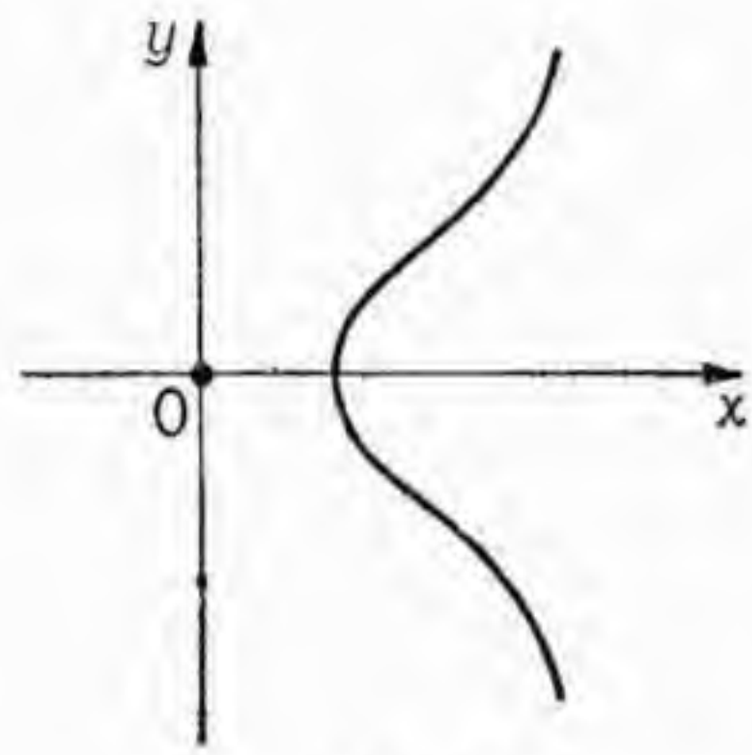

Fig. 106.

Por ejemplo, la curva $x^2 + y^2 - x^3 = 0$ tiene el origen como punto real, pero las tangentes en él son las rectas imaginarias $y = ix$, $y = -ix$. En un entorno del origen no hay ningún otro punto de la curva, puesto que para que y sea real debe ser $x > 1$ (fig. 106).

3. *Cúspides ordinarias o de primera especie.* Son los puntos dobles con las dos tangentes coincidentes, de manera tal que la tangente única tenga exactamente 3 puntos de coincidencia con la curva confundidos en el punto de contacto.

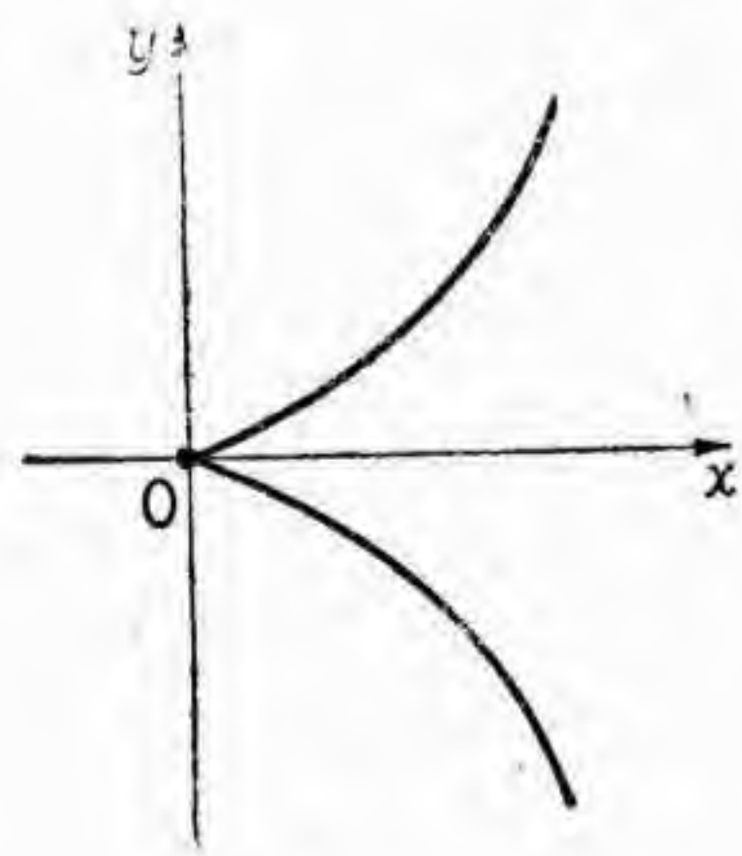

Fig. 107.

Se llaman también *puntos de retroceso* de primera especie, pues la forma de ellos es siempre la de la fig. 107, con dos ramas situadas a distinto lado de la tangente común.

Por ejemplo, la curva $y^2 - x^3 = 0$ tiene en el origen una cúspide ordinaria, puesto que la tangente única $y = 0$ tiene con la curva 3 puntos comunes en este punto, como se ve eliminado y entre la ecuación de la tangente y la de la curva, lo que da $x^3 = 0$.

4. *Tacnodos.* Son puntos dobles con las dos tangentes coincidentes, pero en los cuales la curva no presenta retroceso, si no que en el entorno del punto, se comporta como dos ramas tangentes en un punto ordinario. En un tacnodo, la curva y su tangente tienen por lo menos 4 puntos comunes confundidos en el punto de contacto.

Por ejemplo, la curva $y^2 + y^2 x - x^4 = 0$ tiene un tacnodo en el origen (fig. 108). En este caso la tangente separa a las dos ramas de la curva, pero puede ocurrir también que las dos estén de un mismo lado, por ejemplo para la curva $y^2 - 3x^2y - y^3 + x^4 = 0$ (fig. 109).

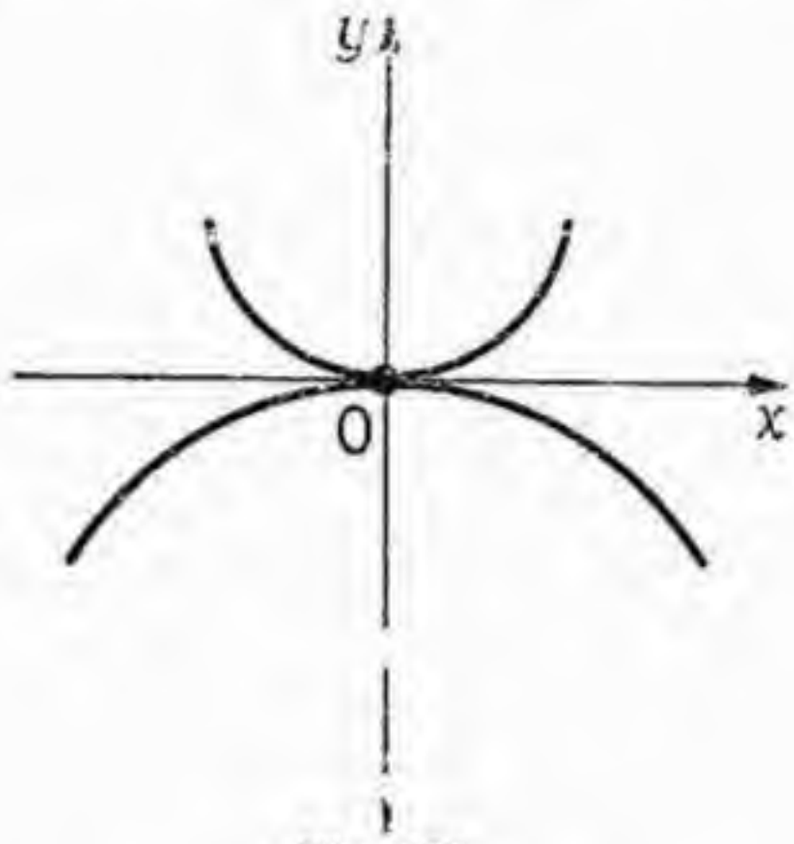

Fig. 108.

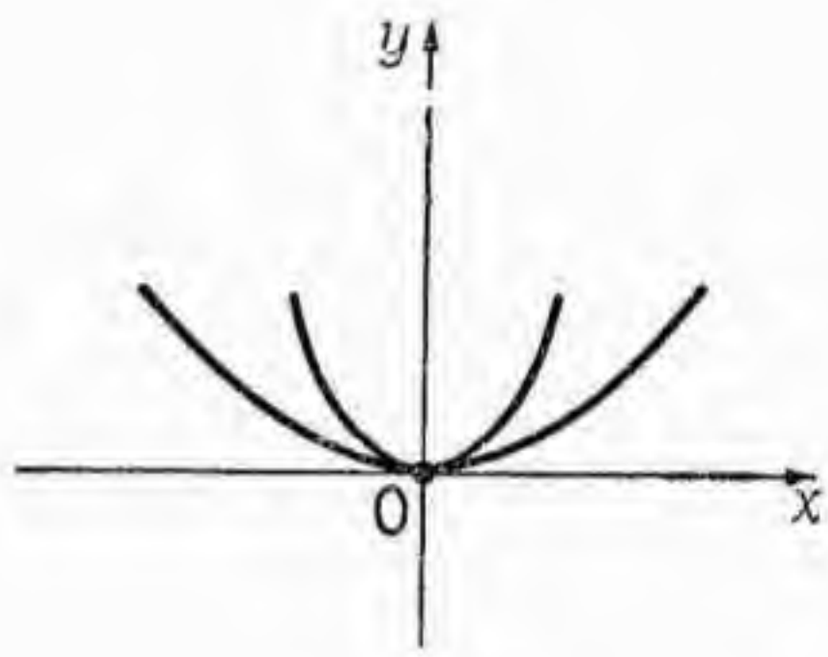

Fig. 109.

5. *Punto aislado con tangente real.* Puede darse el caso de que el punto sea aislado, o sea no haya otro punto real de la curva en un entorno del mismo, y sin embargo la tangente sea real.

Tal es el caso del origen para la curva $y^2 - y^2 x + x^4 = 0$, cuya tangente en el origen es el eje x.

6. *Cúspides de segunda especie.* Son puntos dobles con las dos tangentes coincidentes en los cuales la curva presenta un retroceso, pero manteniéndose las dos ramas de un mismo lado de la tangente común (en un entorno del punto) (fig. 110).

Se llaman también *puntos de retroceso de segunda especie.* En ellos, la curva y la tangente tienen por lo menos 4 puntos de intersección confundidos.

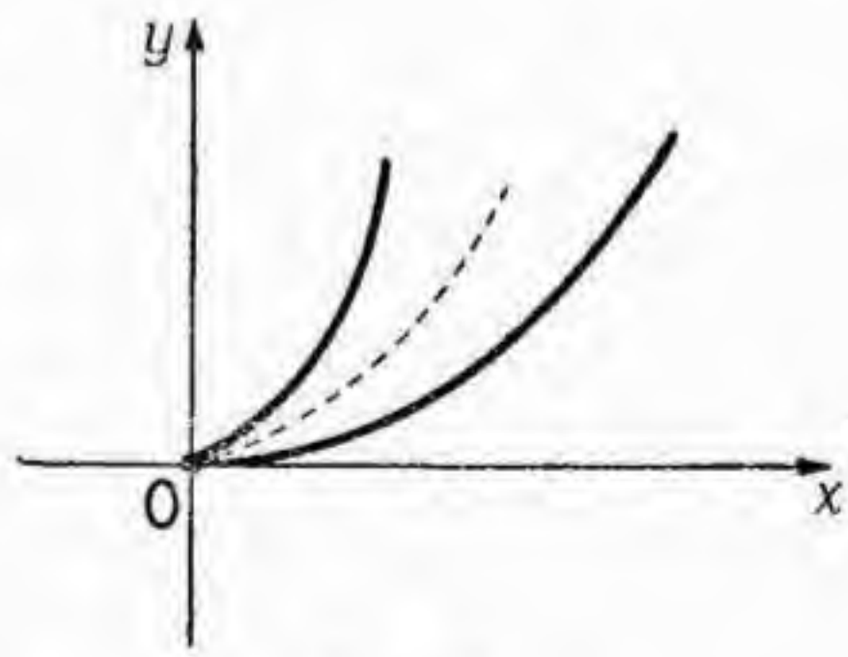

Fig. 110.

Por ejemplo, la curva $y^2 - 2x^2y + x^4 - x^5 = 0$ tiene en el origen una cúspide de segunda especie, como se ve inmedia-

tamente observando que se puede escribir en la forma $(y-x^2)^2 - x^5 = 0$, o sea $y = x^2 \pm x^{5/2}$.

Aunque en la representación gráfica todo punto doble es siempre de alguno de los tipos anteriores, pueden presentarse otros tipos más complicados si se tiene en cuenta el orden del contacto de cada rama con las tangentes o tangente a la curva, el cual puede ser tan elevado como se quiera si el orden de la curva es suficientemente grande.

Observación. Como se ve por los tipos anteriores, un punto doble de una curva irreducible nunca puede presentar el aspecto de un punto ordinario; siempre hay dos ramas de la curva que llegan a él. En cambio, para puntos singulares de orden de multiplicidad impar, puede ocurrir que el aspecto geométrico de la curva no haga notar en modo alguno la existencia de la singularidad

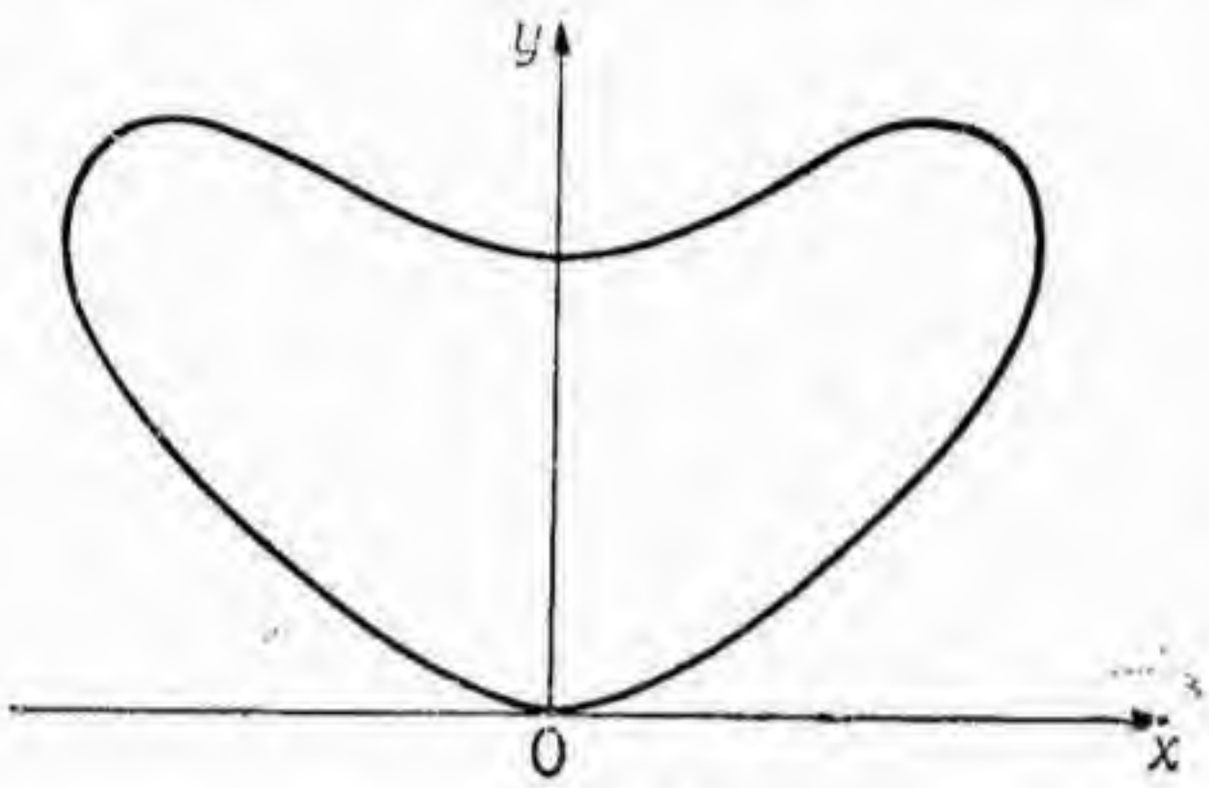

Fig. 111.

Por ejemplo, la curva $x^4 + y^4 - y(x^2 + y^2) = 0$ tiene el origen como punto *triple*. Sin embargo el aspecto aparente de este punto es el de un punto ordinario (fig. 111). Ello es debido a que, cuando la singularidad es de orden impar, puede haber una sola rama real que pase por el punto, siendo las restantes imaginarias.

6. **Estudio general de un punto doble.** — Dada la ecuación de una curva, ya dijimos que para estudiar uno de sus puntos era cómodo trasladar primero el origen de coordenadas al mismo. Una vez hecho esto, el orden de multiplicidad del punto se conoce inmediatamente, por ser igual al grado de los términos de menor grado. Lo que ya no es inmediato e incluso puede llegar a ser muy complicado en el caso de tangentes coincidentes, es averiguar la disposición o forma de la curva alrededor del punto múltiple. Aquí vamos a resolver el problema únicamente en el caso de un punto doble, siguiendo un método que sirve también para un punto mútliple cualquiera, pero que en tal caso los desarrollos son más complicados y entran ya en el dominio de la Geometría Algebraica.

Es fundamental el siguiente

LEMA. *Dada una ecuación algebraica de la forma*

[7] $$F(x, y) \equiv Ax + By + Cx^2 + Dxy + Ey^2 + \ldots + Py^n = 0$$

con $B \neq 0$, *ella se puede satisfacer por una serie de la forma*

[8] $$y = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots$$

la cual es convergente en un cierto entorno de $x = 0$.

La existencia de esta serie se deduce del teorema general sobre funciones implícitas, según el cual dada una función $F(x, y)$ con derivadas parciales F_x, F_y continuas y un punto (x_0, y_0) en el cual sea $F(x_0, y_0) = 0$, $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, existe un entorno de x_0 en el cual la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y como función unívoca de x, función $y = y(x)$ que es continua y derivable en dicho entorno de x_0. En el caso del lema, en que $F(x, y)$

es un polinomio, la función $y(x)$ no sólo es continua y derivable, sino que es analítica, o sea, desarrollable en serie de potencias en un entorno de x_0.

Admitida esta existencia, la serie [8] se calcula fácilmente por coeficientes indeterminados, sustituyendo [8] en [7] y anulando sucesivamente los coeficientes de x en la serie resultante. Se obtienen así las ecuaciones

$$\begin{aligned}
&A + B\,\alpha_1 = 0\\
&C + B\,\alpha_2 + D\,\alpha_1 + E\,\alpha_1^2 = 0\\
&F + B\,\alpha_3 + D\,\alpha_2 + 2\,E\,\alpha_1\,\alpha_2 + G\,\alpha_1 + H\,\alpha_1^2 = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

que permiten de manera recurrente ir calculando $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ Obsérvese que el hecho de ser $B \neq 0$ es fundamental, pues en caso contrario la primera ecuación ya no permite el cálculo de α_1.

Sentado este lema fundamental, sea una curva $f(x, y) = 0$ que tenga el origen como punto doble. Su ecuación general será de la forma

[9] $f(x, y) \equiv a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + b_0x^3 + b_1x^2y + b_2xy^2 + b_3y^3 + \ldots = 0$

donde algunos coeficientes pueden ser nulos, pero no a_0, a_1, a_2 a la vez, en cuyo caso el origen sería por lo menos triple.

Para estudiar el comportamiento de la curva en el entorno del origen, hagamos $y = \lambda x$. La ecuación de los coeficientes angulares de las tangentes es (§ 26-6)

[10] $$a_0 + a_1\lambda + a^2\lambda^2 = 0.$$

Consideremos primero el caso en que esta ecuación tenga dos raíces distintas, o sea $a_1^2 - 4a_0a_2 \neq 0$. Sean estas raíces λ_1, λ_2.

Hagamos

[11] $$y = x(\lambda_i + y_1)$$

siendo λ_i una de las raíces λ_1, λ_2. Sustituyendo en [9] y teniendo en cuenta que λ_i es raíz de [10] resulta, después de dividir por x^2,

[12] $$(a_1 + 2a_2\lambda_i)\,y_1 + a_2y_1^2 + (b_0 + b_1\lambda_i + b_2\lambda_i^2 + b_3\lambda_i^3)\,x + \ldots = 0.$$

Por ser λ_i raíz simple de [10] no anula a la derivada del primer miembro y por tanto es $a_1 + 2a_2\lambda_i \neq 0$. Por consiguiente, según el lema fundamental, en un entorno del origen existirá un desarrollo de la forma

$$y_1 = \alpha_1^1\,x + \alpha_2^1\,x^2 + \alpha_3^1\,x^3 + \ldots$$

donde $\alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots$, son coeficientes que dependen de λ_i.

Por tanto, sustituyendo en [11] queda

[13] $$y = \lambda_i x + \alpha_1^1\,x^2 + \alpha_2^1\,x^3 + \ldots$$

Estos dos desarrollos nos dan el comportamiento de la curva alrededor del origen respecto de las dos tangentes $y = \lambda_i x$.

Si λ_1, λ_2 son imaginarias, la curva no tiene puntos reales en un entorno del origen: se trata de un *punto aislado*.

Si λ_1, λ_2 son reales, el origen es un nodo y las dos ramas del mismo están aproximadas, en un entorno del origen, por las parábolas

$$y = \lambda_1 x + \alpha_1^1\,x^2 \quad , \quad y = \lambda_2 x + \alpha_1^2\,x^2.$$

Pasemos ahora al caso en que [10] tiene las dos raíces confundidas. Entonces el coeficiente de y en [12] resulta nulo y no puede aplicarse el método anterior.

En este caso hay una sola tangente en el origen y por una rotación de ejes podemos hacer que la misma sea el eje x. Entonces la ecuación de la curva toma la forma

[14] $$y^2 + (a_0x^3 + a_1x^2y + a_2xy^2 + a_3y^3) + (b_0x^4 + b_1x^3y + \ldots) + \ldots = 0$$

donde los coeficientes a_i, b_i ya no son, naturalmente, los mismos que aparecen en [9].

Haciendo

[15] $$y = xy_1$$

y dividiendo por x^2, la ecuación [14] queda

[16] $$y_1^2 + (a_0 + a_1y_1 + a_2y_1^2 + a_3y_1^3)\, x + b_0x^2 + b_1x^2y_1 + \ldots = 0.$$

Hagamos ahora

[17] $$x = x_1^2 \quad , \quad y_1 = x_1\,(\lambda + y_2)$$

siendo λ un parámetro que en seguida vamos a determinar. Sustituyendo y dividiendo por x_1^2, queda

[18]
$$(\lambda^2 + a_0) + 2\lambda y_2 + a_1\lambda x_1 + (b_0 + a_2\lambda^2)\, x_1^2 + y_2^2 + (a_1 + 2\lambda a_2)\, x_1y_2 + \ldots = 0.$$

Hay que distinguir dos casos:

a) $a_0 \neq 0$. Tomando $\lambda = \pm\sqrt{-a_0}$, en virtud del lema fundamental, de [18] se pueden deducir dos desarrollos, correspondientes a $\lambda_2 = +\sqrt{-a_0}$, $\lambda_2 = -\sqrt{-a_0}$. Sean éstos

$$y_2 = \alpha_1^i\, x_1 + \alpha_2^i\, x_1^2 + \alpha_3^i\, x_1^3 + \ldots \qquad (i = 1, 2)\,.$$

De aquí, según [17] y [15],

[19] $$y = \pm\sqrt{-a_0}\, x^{3/2} + \alpha_1^i\, x^2 + \alpha_2^i\, x^{5/2} + \alpha_3^i\, x^3 + \ldots$$

Resulta por tanto que la curva tiene dos ramas, una a cada lado de la tangente única, aproximadas por la cúbica $y^2 + a_0x^3 = 0$. El punto es una *cúspide de primera especie.*

b) $a_0 = 0$. En este caso, hagamos en [16]

[20] $$y_1 = x\,(\lambda + y_2)$$

con lo cual queda, después de dividir por x^2.

[21] $$\lambda^2 + a_1\lambda + b_0 + (2\lambda + a_1)\, y_2 + y_2^2 + (a_2\lambda^2 + b_1\lambda)\, x + \ldots = 0.$$

Si las raíces de la ecuación $\lambda^2 + a_1\lambda + b_0 = 0$ son distintas (o sea, $a_1^2 - 4b_0 \neq 0$), la derivada $2\lambda + a_1$ será distinta de cero para ellas, y por tanto, tomando por λ cualquiera de estas raíces λ_1, λ_2 existirán los desarrollos

$$y_2 = \alpha_1^i\, x + \alpha_2^i x^2 + \alpha_3^i\, x^3, + \ldots$$

de los cuales, según [20] y [15], se deduce

[22] $$y = \lambda_i x^2 + \alpha_1^i x^3 + \alpha_2^i x^4 + \ldots \qquad (i = 1, 2)$$

Esto nos dice que hay dos ramas tangentes al eje x, aproximadas respectivamente por las parábolas $y = \lambda_1 x^2$, $y = \lambda_2 x^2$.

Si λ_1, λ_2 son reales se trata de un *tacnodo;* si son imaginarias de un *punto aislado con tangente doble real,* la cual tiene 4 puntos comunes con la curva en el punto del contacto.

Queda finalmente el caso en que el término independiente de [21] tenga las dos raíces confundidas. Entonces, al tomar λ igual a esta raíz, que representaremos por λ_0, el término en y_2 de [21] desaparece, quedando una expresión de la forma

$$y_2^2 + Ax + Bx^2 + Cxy_2 + \ldots = 0$$

que es análoga a la [16], pero ahora con y_2 ligada a y por [20] y [15].

Se puede repetir todo lo anterior. Si es $A \neq 0$, por los cambios

[23] $$x = x_1^2 \quad , \quad y_2 = x_1\,(\lambda + y_3)$$

y eligiendo $\lambda = \pm\sqrt{-A}$, se llega a un desarrollo del tipo

$$y_3 = \alpha_1^i\, x_1 + \alpha_2^i\, x_1^2 + \ldots$$

de donde

$$y_2 = \pm\sqrt{-A}\, x_1 + \alpha_1^i\, x_1^2 + \alpha_2^i\, x_1^3 + \ldots$$

según [20]

$$y_1 = \lambda_0 x_1^2 \pm \sqrt{-A x_1^3} + \alpha_1' x_1^4 + \alpha_2' x_1^5 + \ldots$$

y finalmente, según [15] y poniendo de nuevo $x_1^2 = x$,

[24] $$y = \lambda_0 x^2 \pm \sqrt{-A} x^{5/2} + \alpha_1' x^3 + \alpha_2' x^{7/2} + \ldots$$

La curva presenta, en un entorno del origen, dos ramas situadas a uno y otro lado de la parábola $y = \lambda_0 x^2$, y sólo es real a un lado del eje x, el positivo o el negativo, según sea A negativo o positivo. El origen es, por tanto, una *cúspide de segunda especie.*

Si todavía fuera $A = 0$, habría que proseguir con nuevas sustituciones para y_2 y x_1, siempre hasta llegar a un coeficiente de $y_3, y_4, \ldots$ distinto de cero, para poder aplicar el lema fundamental y luego volver en orden inverso hasta las y, x primitivas.

En resumen, podemos formar el siguiente cuadro para clasificar los puntos dobles para curvas con coeficientes reales. Los resultados se refieren al origen de coordenadas.

I. Curva:

$$a_0 x^2 + a_1 xy + a_2 y^2 + \ldots = 0$$

a) $a_0 = a_1 = a_2 = 0$: punto de multiplicidad superior a dos.

b) $a_1^2 - 4 a_0 a_2 > 0$: nodo.

c) $a_1^2 - 4 a_0 a_2 < 0$: punto aislado con dos tangentes imaginarias.

d) $a_1^2 - 4 a_0 a_2 = 0$: los términos de segundo grado se pueden escribir en la forma $(\sqrt{a_0} x + \sqrt{a_2} y)^2$ y por tanto, llevando por una rotación de ejes, el eje x a coincidir con la recta $\sqrt{a_0} x + \sqrt{a_0} y = 0$, la ecuación de la curva quedará en la forma:

II. Curva:

$$y^2 + a_0 x^3 + a_1 x^2 y + a_2 x y^2 + a_3 y^3 + b_0 x^4 + b_1 x^3 y + \ldots = 0 \quad (^1)$$

e) $a_0 \neq 0$: cúspide de primera especie.

f) $a_0 = 0$, $a_1^2 - 4 b_0 > 0$: tacnodo.

g) $a_0 = 0$, $a_1^2 - 4 b_0 < 0$: punto aislado con tangente única real.

h) $a_0 = 0$, $a_1^2 - 4 b_0 = 0$; $-1/2\, a_1 a_2 + b_1 \neq 0$: cúspide de segunda especie.

Si es $-1/2\, a_1 a_2 + b_1 = 0$, hay que proseguir el análisis.

NOTAS Y EJERCICIOS. 1. De [14] se deduce que la tangente $y = 0$ tiene con la curva 3 puntos comunes en el origen si es $a_0 \neq 0$ y más de 3 si es $a_0 = 0$ (puesto que al hacer $y = 0$ en [14] queda x^3 factor común en el primer caso y por lo menos x^4 en el segundo). Por tanto, puesto que una recta y una curva irreducible de grado n sólo pueden tener a lo sumo n puntos comunes, resulta: *entre las curvas irreducibles, sólo pueden presentar tacnodos o cúspides de segunda especie las de grado igual o superior a cuatro.*

2. Comprobar que el origen es punto doble de la clase especificada para las siguientes curvas:

1. $2y^2 - x^2 + y^4 - x^4 = 0$ (nodo).
2. $y^2 - x^4 - y^4 = 0$ (tacnodo).
3. $y^2 + x^4 = 0$ (aislado con tangente real).
4. $(y - x)^2 + x^3 = 0$ (cúspide ordinaria).
5. $x^2 + y^2 + x^3 = 0$ (aislado con tangentes imaginarias).
6. $(y - x^2)^2 - y^3 (x - y) = 0$ (cúspide de 2ª especie).
7. $y^2 - y (2x^2 + xy + 4y^2) + x^4 + xy^3 + 4y^4 = 0$ (*cúspide* de 2ª especie).

---

[1] Los coeficientes de esta ecuación son naturalmente distintos de los indicados con la misma letra en el caso I.

8. $y^2 - 2y^3 - 3x^2y + 2x^4 + y^4 = 0$ (tacnodo).
9. $xy + x^3 - y^3 = 0$ (nodo).
10. $y^2 - xy^2 - 2x^2y + x^2y^2 + x^4 = 0$ (cúspide de 2ª especie).
11. $y^2 - 2yx^2 + x^4 - x^2y^2 + y^4 = 0$ (cúspide de 2ª especie)
12. $x^2 - xy + x^2y = 0$ (nodo).
13. $y^2 - 4x^3 + x^5 = 0$ (cúspide de 1ª especie).
14. $y^2 - 2xy + x^2 + x^3 + y^3 = 0$ (cúspide de 1ª especie).
15. $y^2 + xy^2 - x^4 = 0$ (tacnodo).
16. $2x^2 - xy + y^2 - x^3 = 0$ (aislado con tangentes imaginarias).
17. $(y + x^2)^2 - xy^2 = 0$ (cúspide de 2ª especie).

§ 28. Construcciones geométricas

1. **Construcciones con regla y compás.** — En la geometría elemental del ciclo secundario se estudian ya los problemas de construcciones geométricas, es decir, problemas en que se suponen conocidos los elementos de una figura dada y se pide determinar, gráficamente, los de otra ligada con la primera por relaciones geométricas. Se exige que la determinación de los elementos que se piden se pueda hacer, a partir de los datos, mediante construcciones geométricas en las que sólo se utilice la regla y el compás. Como ejemplos podemos citar los problemas siguientes:

1º Construir el cuadrado de área doble de uno dado.
2º Dividir un ángulo de dos partes iguales.
3º Construir el cuadrado de la misma área que un triángulo dado.

La resolución de estos problemas puede verse en cualquier texto de geometría elemental y su solución era ya conocida de los geómetras griegos. Éstos se interesaron mucho en esta clase de problemas, sobre todo porque algunos de ellos resistieron todos los esfuerzos que hicieron los geómetras para resolverlos; entre estos problemas no resueltos hubo tres que, acaso por su enunciado simple se hicieron famosos; dichos problemas son:

1º *El problema de la duplicación del cubo*, es decir la construcción del cubo de volumen doble de uno dado.

2º *El problema de la trisección del arco*, es decir la división de un ángulo cualquiera en tres partes iguales.

3º *El problema de la cuadratura del círculo*, es decir la construcción de un cuadrado de la misma área que un círculo dado.

Otros problemas de construcciones geométricas interesantes son los de *inscripción en la circunferencia de polígonos regulares*, cuya solución es bastante sencilla para los de un cierto

número de lados (3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 y 15 lados) mientras que no se conseguía resolverlos para otros (por ejemplo los de 7 y 9 lados).

A primera vista no se comprende por qué problemas tan análogos se resuelven unos fácilmente y otros se resisten tanto a ser resueltos. Como veremos en este parágrafo, los problemas no se resolvieron porque eran imposibles de resolver, al menos en la forma en que los griegos los plantearon, pero para la demostración de esta imposibilidad de solución es insuficiente la geometría elemental, acaso porque dicha demostración requiere un método general que la geometría elemental no posee. La geometría analítica, que se caracteriza precisamente por la generalidad de sus métodos, resultó el instrumento adecuado para el estudio de estos problemas, aun cuando fué también preciso para ello el perfeccionamiento del álgebra, obra de los matemáticos del siglo XIX.

Debemos hacer resaltar que la imposibilidad de resolver los problemas sólo existe cuando se admiten las limitaciones impuestas por los griegos, de utilizar únicamente la línea recta y las circunferencias en sus construcciones geométricas. Precisando este punto diremos:

DEFINICIÓN 1. *Un problema se puede resolver con regla y compás cuando se obtiene la solución del problema mediante un número finito de construcciones en el plano con dichos instrumentos, los cuales sólo se pueden utilizar en la forma siguiente:*

a) *La regla, para trazar rectas que pasen por dos puntos dados, o construídos a partir de los dados.*

b) *El compás para trazar circunferencias cuyo centro sea un punto dado o ya construído a partir de los dados y cuyo radio sea la distancia entre dos puntos dados o construídos a partir de los dados.*

Quedan pues excluídos de la construcción: el uso de la regla y el compás en forma distinta de la especificada, el uso de otros instrumentos, artificios como doblar el papel, construcciones realizadas en superficies no planas, etc. Fuera de estas limitaciones se pueden resolver los problemas, y los griegos ya lo consiguieron, en particular mediante el trazado en el plano de curvas distintas de la recta y la circunferencia.

Por otra parte, desde el punto de vista práctico estos problemas pueden considerarse como resueltos, ya que es fácil dar construcciones aproximadas con un error suficientemente pequeño, en particular muy inferior a los errores inherentes a los útiles de dibujo.

2. Cuerpos o campos de racionalidad. — Antes de iniciar el estudio del problema de las construcciones geométricas en geometría analítica vamos a dar unas nociones someras sobre el concepto algebraico de cuerpo o campo de racionalidad.

DEF. 2. *Un cuerpo es un conjunto de entes cualesquiera entre los que se han definido las operaciones de suma y producto, de modo que se cumplan las propiedades siguientes:*

A_1: La suma es asociativa.

A_2: La suma es conmutativa.

A_3: Existe el elemento 0 tal que $a + 0 = a$ para todo elemento a del cuerpo.

A_4: Para cada elemento del cuerpo existe otro que sumado con él da cero.

M_1: La multiplicación es asociativa.

M_2: La multiplicación es conmutativa.

M_3: Existe el elemento 1 tal que $a \,.\, 1 = a$ para todo elemento a del cuerpo.

M_4: Para cada elemento del cuerpo distinto de cero existe otro que multiplicado por él da 1.

D: La multiplicación es distributiva respecto de la adición.

El conjunto de los números racionales, el de los reales y el de los complejos son cuerpos. No lo son el conjunto de los enteros, el de los reales positivos ni el de los imaginarios puros (el primero no cumple M_4, el segundo no cumple A_4 y en el tercero el producto de dos elementos del conjunto no está definido dentro del conjunto). Son también ejemplos de cuerpo (demuéstrese como ejercicio), el conjunto de los números complejos cuyas partes reales e imaginarias son racionales y el conjunto de los números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$, en donde a y b toman todos los valores racionales.

De la definición de cuerpo se deduce que la diferencia de dos elementos del cuerpo está siempre definida dentro del cuerpo y lo mismo el cociente si el divisor es distinto de 0.

Consideremos ahora *el cuerpo R de los números racionales de la aritmética ordinaria, que será el que utilizaremos como base para nuestros razonamientos.*

Si añadimos un nuevo elemento x a R, un cuerpo que contenga a R y a x ha de contener todas las expresiones del tipo a_1x, a_2x^2, ..., a_nx^n y en general todos los polinomios

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

con coeficientes en el cuerpo de los racionales; también ha de contener el coeficiente de dos de estos elementos, es decir ha de contener a todas las fracciones racionales algebraicas

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

Se demuestra fácilmente que el conjunto de todas estas fracciones con las reglas de suma y producto del álgebra ordinaria es un cuerpo, el cual será el mínimo cuerpo que contenga a los racionales y al nuevo elemento x.

Si en vez de añadir un solo elemento x, añadimos n elementos, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se obtiene el mínimo cuerpo que contiene a los racionales y a estos n elementos, considerando el conjunto de las fracciones algebraicas

$$\frac{P(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

en donde P y Q son polinomios en las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Designaremos a este cuerpo con la notación $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Si en lugar de considerar la x como una variable indeterminada, la suponemos ligada por alguna condición al cuerpo de los racionales, por ejemplo por la condición $x^2 = 2$, los elementos de $R(x)$, que designaremos en este caso por la notación $R(\sqrt{2})$ no son todos distintos, por ejemplo son idénticos x^5 y $4x$.

En lo que sigue, cuando se añada a los elementos de un cuerpo otro ligado con ellos por una relación, nos limitaremos al caso en que la relación se expresa mediante una raíz cuadrada, es decir que supondremos que el elemento añadido tiene su cuadrado igual a un elemento del cuerpo primitivo.

Por consiguiente, los cuerpos que consideraremos serán siempre de la forma siguiente:

$$R_m = R(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

en donde las $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son indeterminadas, y_1 tiene como cuadrado una fracción algebraica en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sin ser ella misma una fracción algebraica, y_2 tiene como cuadrado una fracción algebraica en $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1$ sin ser ella misma una fracción algebraica, etc.

DEF. 3. Los elementos de un cuerpo R_m formado como se acaba de indicar a partir del cuerpo $R_0 = R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se denominan *irracionales cuadráticos sobre* R_0.

3. **Expresión analítica de las construcciones con regla y compás.** — Vamos a estudiar ahora la forma que toma, desde el punto de vista de la geometría analítica, el problema de las construcciones con regla y compás.

Podemos siempre considerar que los únicos datos son los puntos, ya que siempre es posible reemplazar las rectas por dos puntos cualesquiera y las circunferencias por su centro y un punto cualquiera de la curva.

Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas y sean $p_1, p_2, \ldots, p_n$ las coordenadas de los puntos datos del proble-

ma, las que podrán ser parámetros independientes todos o algunos dependientes de otros y también constantes numéricas.

Las únicas construcciones que podemos realizar son las de trazar rectas que pasen por dos puntos, circunferencias con centro en uno de los puntos y que pasen por otro y la determinación de los puntos de intersección de las rectas y circunferencias así obtenidas.

Las ecuaciones de estas rectas y circunferencias tienen como coeficientes funciones racionales, es decir fracciones algebraicas, de las coordenadas de los puntos que las determinan.

El punto de intersección de dos rectas tiene como coordenadas funciones racionales de los coeficientes de las ecuaciones de las rectas, luego mientras no tengamos que determinar intersecciones de recta con circunferencia o de dos circunferencias, las coordenadas de los puntos que obtengamos serán elementos del cuerpo $R_0 = R(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Al determinar los puntos de intersección de una recta y una circunferencia, o de dos circunferencias, hay que resolver una ecuación de segundo grado; luego, en general, las coordenadas de los puntos de intersección se expresarán mediante la raíz cuadrada de un elemento q_1 de R_0, es decir serán elementos del cuerpo $R_1 = R(p_1, p_2, \ldots, p_n, \sqrt{q_1})$.

Si en las construcciones siguientes no hay que obtener más puntos de intersección de rectas con circunferencias o de circunferencias entre sí, los resultados serán elementos de R_1; en caso contrario habrá que considerar un nuevo cuerpo $R(p_1, p_2, \ldots, p_n, \sqrt{q_1}, \sqrt{q_2})$ en donde q_2 es un elemento de R_1. Así sucesivamente, como el número de construcciones es finito, las coordenadas de los puntos soluciones serán elementos de un cierto cuerpo $R_m = R(p_1, p_2, \ldots, p_n, \sqrt{q_1}, \ldots, \sqrt{q_m})$ en donde q_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ es un elemento del cuerpo R_{i-1}, es decir que las soluciones se expresan en función de las coordenadas de los datos mediante operaciones racionales y extracciones de raíces cuadradas en número finito.

Vamos a ver que, recíprocamente, si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son las coordenadas de un cierto número de puntos, todo punto cuyas coordenadas se expresen en función de las de los datos mediante un número finito de operaciones racionales y extracciones de raíces cuadradas es construible con regla y compás partiendo de los puntos datos.

Basta en efecto recordar que ya la geometría elemental indica la forma de construir las longitudes $a + b$; $a - b$; $a \cdot b$; a/b y $\sqrt{a}$, cuando se conocen las longitudes a, b y el segmento unidad; este último es conocido si se supone dado el sistema de coordenadas y si no, se determina mediante la elección de los puntos de coordenadas $(0, 0)$ y $(0, 1)$. Queda así probado el siguiente *teorema fundamental*:

TEOREMA 1. *La condición necesaria y suficiente para que un punto pueda ser obtenido, mediante construcciones con regla y compás, a partir de otros dados, es que sus coordenadas se expresen en función de las coordenadas de los datos mediante un número finito de operaciones racionales y extracciones de raíces cuadradas.*

Apliquemos este teorema a los tres primeros problemas enunciados al principio del nº 1.

Sea l el lado de un cuadrado; obtener el cuadrado de área doble equivale a construir, partiendo del punto de abscisa l el punto de abscisa x tal que $x^2 = 2l^2$, es decir $x = l\sqrt{2}$, luego el problema es resoluble con regla y compás.

El problema de dividir un ángulo en dos partes iguales se reduce a determinar el punto de coordenadas

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}\ ,\ \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)$$

cuando se conoce el punto de coordenadas $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, pero sabemos por la trigonometría que se tiene

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\ ,\quad \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

luego el problema es resoluble con regla y compás.

El problema de construir un cuadrado equivalente a un triángulo dado es también resoluble con regla y compás, pues si tomamos un sistema de coordenadas tal que los vértices del triángulo sean $(0, 0)$, $(b, 0)$, (c, h) el problema se reduce a determinar un punto de abscisa $x = \sqrt{\frac{1}{2}\, b\, .\, h}$.

En estos tres problemas es muy simple el probar que son construibles con regla y compás porque la incógnita está ligada a los datos por ecuaciones algebraicas de segundo grado. Si pasamos al problema de la duplicación del cubo, vemos que la incógnita está ligada al dato por una ecuación de grado tres. ¿Qué pasará en este caso, y en general qué pasará cuando la incógnita esté ligada a los datos por ecuaciones algebraicas de grado mayor que dos o por otro tipo de relaciones? ¿Cómo podremos saber si se puede poner la incógnita en función de los datos mediante operaciones racionales y raíces cuadradas? Vamos a estudiar ahora este problema.

4. **Irracionales cuadráticos conjugados.** — DEF. 4. Dado un irracional cuadrático cualquiera se denominan *irracionales cuadráticos conjugados* del dado, los que se obtienen cambiando en la expresión de éste los signos más y menos delante de todos o de algunos de los signos de raíz que figuran en la expresión del irracional cuadrático dado.

Ejemplos: sea el irracional cuadrático sobre $R(a, b)$

$$\sqrt{a - \sqrt{b}}$$

sus conjugados son

$$-\sqrt{a - \sqrt{b}} \; ; \; \sqrt{a + \sqrt{b}} \; ; \; -\sqrt{a + \sqrt{b}} \; ;$$

Consideremos el irracional sobre el cuerpo de los números racionales

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{13}$$

tiene como conjugados

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{13} \; ; \; \sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{13} \; ;$$
$$\sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{13} \; ; \; -\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{13} \; ;$$
$$-\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{13} \; ; \; -\sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{13} \; ;$$
$$-\sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{13}.$$

A primera vista parece que, como se obtienen los irracionales conjugados atribuyendo el doble signo a todos los signos de raíz y combinándolos de todas las manera posibles, el número de conjugados de un irracional cuadrático es, incluyéndolo a él mismo, 2^n, siendo n el número de signos de raíz que aparecen en el irracional, pero puede suceder que algunos cambios de signo dejen invariable la expresión; por ejemplo, en el irracional

$$\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

queda invariable si se cambia el signo a las raíces de 3.

Consideremos ahora un cuerpo $R_0 = R(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y sea x_m irracional cuadrático sobre R_0, es decir, de acuerdo con lo establecido en el nº 2, un elemento del cuerpo R_m que será por consiguiente de la forma

$$x_m = \frac{a_m + b_m \sqrt{q_m}}{c_m + d_m \sqrt{q_m}}$$

en donde a_m, b_m, c_m y d_m son elementos de R_{m-1}; x_m puede ponerse en la forma

$$x_m = \frac{(a_m + b_m \sqrt{q_m})(c_m - d_m \sqrt{q_m})}{c^2_m - d^2_m q_m} = h_m + k_m \sqrt{q_m}$$

en donde h_m, k_m pertenecen a R_{m-1}.

Supongamos ahora que x_m fuese solución de una ecuación

$P(x) = 0$, en donde $P(x)$ es un polinomio cuyos coeficientes son elementos de R_0; se tendría entonces

$$P(h_m + k_m \sqrt{q_m}) = 0.$$

Desarrollando $(h_m + k_m \sqrt{q_m})^i$ por la fórmula del binomio de Newton y sustituyendo en la ecuación se tendrá una expresión de la forma $H_m + K_m \sqrt{q_m} = 0$, en donde H_m y K_m son elementos de R_{m-1}, pero esta igualdad implica que H_m y K_m son ambos nulos, pues en caso contrario se tendría

$$\sqrt{q_m} = -\frac{H_m}{K_m}$$

y $\sqrt{q_m}$ sería entonces un elementos de R_{m-1}, contra la hipótesis.

Ahora bien, los desarrollos de $(a+b)^i$ y de $(a-b)^i$ sólo difieren en el signo de las potencias impares de b, luego se tiene

$$P(h_m - k_m \sqrt{q_m}) = H_m - K_m \sqrt{q_m} = 0.$$

Como h_m, k_m y q_m son elementos de R_{m-1}, se tiene:

$$h_m = h'_{m-1} + k'_{m-1} \sqrt{q_{m-1}} \quad ; \quad k_m = h''_{m-1} + k''_{m-1} \sqrt{q_{m-1}} \quad ;$$

$$q_m = h_{m-1} + k_{m-1} \sqrt{q_{m-1}} \quad ,$$

en donde h'_{m-1}, h''_{m-1}, h_{m-1}, k'_{m-1}, k''_{m-1}, k_{m-1} y q_m pertenecen a R_{m-2}, mientras que $\sqrt{q_{m-1}}$ no pertenece a R_{m-2}. Por lo tanto como H_m es un polinomio en h_m, k_m y q_m, se tiene

$$H_m = H_{m-1} + K_{m-1} \sqrt{q_{m-1}}$$

en donde H_{m-1} y K_{m-1} pertenecen a R_{m-2}, luego como se tiene $H_m = 0$, se deduce, por un razonamiento idéntico al hecho anteriormente, que se ha de tener $H_{m-1} = 0$ y $K_{m-1} = 0$, lo que nos indica que H_m es también cero si se cambia el signo del radical en alguna o en todas las expresiones de h_m, k_m y q_m.

Un razonamiento análogo es válido para K_m, luego se ha de cumplir

$$P[h'_{m-1} \pm k'_{m-1} \sqrt{q_{m-1}} \pm (h''_{m-1} \pm k''_{m-1} \sqrt{q_{m-1}})$$
$$\sqrt{h_{m-1} \pm k_{m-1} \sqrt{q_{m-1}}})] = 0.$$

Poniendo ahora los elementos en R_{m-2} que figuran en estas expresiones en función de elementos de R_{m-3} y de $\sqrt{q_{m-2}}$, obtendríamos nuevas soluciones de la ecuación cambiando los signos de los radicales, y continuando esta operación se vería que todos los irracionales conjugados de x_m son soluciones de la ecuación. Podemos por consecuencia enunciar el teorema siguiente:

TEOR. 2. *Si un irracional cuadrático sobre un cuerpo es raíz de una ecuación algebraica con coeficientes elementos de dicho cuerpo, todos sus conjugados son también soluciones de la misma ecuación.*

5. Ecuación cuya raíz es un irracional cuadrático. — Consideremos el irracional cuadrático del número anterior x_m y formemos el polinomio $P(x) = \Pi(x - x_i)$, en donde los x_i son todos los conjugados, distintos o no, que se obtienen atribuyendo el doble signo a todos los radicales que figuran en la expresión x_m; su número será por consiguiente 2^r, siendo r el número de signos de raíz que figuran en la expresión de x_m.

Los coeficientes de este polinomio son elementos de R_0; en efecto, basta ver que siendo x_m de la forma $h_m + k_m \sqrt{q_m}$, el polinomio no altera al cambiar el signo de $\sqrt{q_m}$, luego sus coeficientes no contienen más que potencias pares de $\sqrt{q_m}$, es decir son elementos de R_{m-1}; aplicando el mismo razonamiento a $\sqrt{q_{m-1}}$ se vería que los coeficientes son elementos de R_{m-2} y así sucesivamente se obtiene que son elementos de R_0. Vemos, pues, que *todo irracional cuadrático sobre un cuerpo* R_0 *es solución de una ecuación algebraica cuyos coeficientes son elementos de* R_0.

Entre todas las ecuaciones algebraicas con coeficientes en R_0 que admiten a x_m como raíz, y por lo tanto, según el teorema 2 a todos sus conjugados, habrá por lo menos una de menor grado. Sea $p(x) = 0$ esta ecuación; $p(x)$ es irreducible, es decir no se puede descomponer en el producto de dos polinomios $p_1(x) \cdot p_2(x)$ con coeficientes en R_0 y de grado uno por lo menos. En efecto, si así fuese, uno de ellos tendría como raíz a x_m y por tanto a todos sus conjugados, y no sería $p(x)$ la ecuación de menor grado que tiene esas raíces.

Siendo $p(x)$ irreducible carece de raíces múltiples, pues en caso contrario su derivada $p'(x)$, cuyos coeficientes pertenecen a R_0, tendría raíces comunes con $p(x)$ y el máximo común divisor $d(x)$ de $p(x)$ y $p'(x)$, que obteniéndose por el algoritmo de Euclides tiene sus coeficientes en R_0, no sería una constante, y por consiguiente $p(x)$ no sería irreducible.

La ecuación $p(x) = 0$ no puede tener otras soluciones que los conjugados de x_m, pues en caso contrario, el máximo común divisor de $p(x)$ y $P(x)$ sería una ecuación de menor grado que $p(x)$ y que admite x_m como raíz, por consiguiente se ve que $p(x)$ tiene la forma

$$p(x) = C(x - x_1) \ldots (x - x_k)$$

en donde los $x_1, \ldots, x_k$, son los *conjugados distintos de* x_m.

Cualquier polinomio que tenga como raíces $x_1, \ldots, x_k$ tiene que ser un múltiplo de $p(x)$, luego éste es *el único polinomio*

irreducible, salvo una constante, que admite estas raíces. En particular $P(x)$ es múltiplo de $p(x)$, es decir que se tiene

$$P(x) = p(x) \,.\, p_1(x)$$

pero como $P(x)$ sólo admite las raíces $x_1, \ldots, x_k$, $p_1(x)$ las admite también, es por consiguiente un múltiplo de $p(x)$, es decir que se tiene:

$$P(x) = [p(x)]^2 p_2(x)$$

y repitiendo el razonamiento se llega finalmente a que

$$P(x) = [p(x)]^p C.$$

Ahora bien, el grado de $P(x)$ es 2^r, si el de $p(x)$ es q, se debe tener $2^r = p \,.\, q$, luego p y q también tienen que ser potencias de dos. Obtenemos así los siguientes teoremas:

TEOR. 3. *El número de conjugados de un irracional cuadrático que son iguales entre sí, es una potencia de dos, y es el mismo cualquiera que sea el conjugado que se tome.*

TEOR. 4. *Todo irracional cuadrático sobre un cuerpo es raíz de una ecuación algebraica con coeficientes elementos del cuerpo, que es irreducible y cuyo grado es una potencia de dos.*

Estos teoremas nos permiten ahora dilucidar en parte el problema planteado al final del nº 3. Si la incógnita de un problema de construcciones geométricas está ligada, con los datos, por una ecuación algebraica irreducible cuyo grado no es una potencia de dos, entonces la incógnita no puede ser un irracional cuadrático puesto que éstos son soluciones de una única ecuación irreducible, y por lo tanto, de acuerdo con el teorema 1, el problema no puede ser resuelto con regla y compás, por no ser expresable la incógnita en función de los datos mediante operaciones racionales y extracciones de raíces cuadradas.

Ejemplos de aplicación del teorema 4:

Dado un irracional cuadrático para encontrar la ecuación que lo tiene como raíz, hay que obtener todos sus conjugados distintos y formar la ecuación $(x - x_1) \ldots (x - x_k) = 0$. En muchos casos se puede obtener la ecuación en forma más rápida realizando operaciones en la expresión del irracional.

1º Sea el irracional $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; sus conjugados son $-\sqrt{a} + \sqrt{b}$; $\sqrt{a} - \sqrt{b}$; $-\sqrt{a} - \sqrt{b}$; la ecuación a que satisface es

$$(x - \sqrt{a} - \sqrt{b})(x - \sqrt{a} + \sqrt{b})(x + \sqrt{a} - \sqrt{b})$$
$$(x + \sqrt{a} + \sqrt{b}) = 0$$
$$[(x - \sqrt{a})^2 - b][(x + \sqrt{a})^2 - b] = 0$$

$$(x^2 + a - b - 2x\sqrt{a})(x^2 + a - b + 2x\sqrt{a}) = 0$$
$$(x^2 + a - b)^2 - 4ax^2 = 0$$

Puede obtenerse esta ecuación en la forma siguiente:

$$x = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
$$x^2 + a - 2x\sqrt{a} = b$$
$$(x^2 + a - b)^2 = 4ax^2$$

2º Sea el irracional $x = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}$:

$$x^2 = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{4 - 2} = 4 + 2\sqrt{2}$$
$$(x^2 - 4)^2 = 8$$

3º Consideremos ahora $x = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$:

$$x - \sqrt{5} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$
$$x^2 + 5 - 2x\sqrt{5} = 2 + 3 + \sqrt{6}$$
$$x^2 = 2x\sqrt{5} + \sqrt{6}$$
$$x^4 = 20x^2 + 6 + 4x\sqrt{30}$$
$$(x^4 - 20x^2 - 6)^2 = 480x^2$$

4º El irracional

$$x = \sqrt{p + \sqrt{q + \sqrt{r}}}$$

satisface a la ecuación de grado 8

$$[(x^2 - p)^2 - q]^2 - r = 0$$

como se ve inmediatamente; en cambio resulta engorroso el cálculo mediante la obtención de los ocho conjugados.

6. **Problemas de tercer grado.** — Vamos a considerar ahora los problemas en que la incógnita está ligada con los datos mediante una ecuación de grado tres:

$$t(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

cuyos coeficientes son elementos del cuerpo R_0. Es fácil ver que la condición necesaria y suficiente para que las raíces de esta ecuación sean irracionales cuadráticos es que una de ellas sea un elemento de R_0. En efecto: si existe una raíz racional r dividiendo $t(x)$ por $x - r$ queda un polinomio de segundo grado que nos da las otras dos raíces que son, por ser la ecuación de segundo grado, irracionales cuadráticos. Recíprocamente si la ecuación tiene una raíz que es un irracional, ésta debe ser raíz de una ecuación $p(x) = 0$ irreducible de grado par (teorema 4); $p(x)$ debe dividir a $t(x)$, por consiguiente su

grado es dos y se tiene $t(x) = p(x)q(x)$, el grado de $q(x)$ tiene que ser 1, es decir ha de ser del tipo $mx + n$ que admite la raíz $-n/m$ de R_0.

Consideremos ahora una ecuación

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} \ldots a_{n-1}x + a_n = 0$$

con coeficientes en un cuerpo que sea el de los racionales o el de los polinomios con coeficientes racionales; sea α una raíz racional de la ecuación, es decir una raíz que pertenezca al cuerpo de los coeficientes, siempre se puede poner en la forma $\alpha = p/q$, en donde p y q son números enteros, o polinomios, primos entre sí. Tendremos

$$a_0p^n + a_1p^{n-1}q + \ldots + a_{n-1}pq^{n-1} + a_nq^n = 0 \quad ;$$
$$a_0p^n + q(a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}pq^{n-2} + a_nq^{n-1}) = 0 \quad ;$$
$$p(a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2}q + \ldots + a_{n-1}q) + a_nq^n = 0 \quad ;$$

luego p debe dividir a a_n y q debe dividir a a_0.

Esta observación nos puede indicar si una ecuación admite o no raíces racionales [1] y la vamos a aplicar al esclarecimiento de los problemas de la duplicación del cubo y de la trisección del ángulo.

En el problema de la duplicación del cubo tomemos como unidad la longitud de la arista del cubo que queremos duplicar; sea x la longitud de la arista del cubo de volumen doble; se tiene la ecuación $x^3 - 2 = 0$, cuyas únicas raíces posibles racionales son ± 1 y ± 2, y como ninguno de estos valores satisface a la ecuación, ésta carece de raíces racionales, luego no tiene raíces irracionales cuadráticas y por lo tanto podemos enunciar el

TEOR. 5. *El problema de la duplicación del cubo no es resoluble con regla y compás.*

Pasemos ahora al problema de la trisección del ángulo. Dado un ángulo α y el segmento unidad se puede determinar con regla y compás el segmento cuya longitud es el seno de dicho ángulo y recíprocamente si se conoce el segmento unidad y el de longitud igual al seno se puede determinar el ángulo; el problema de la trisección se reduce pues al de construir el $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{3}$ cuando se conoce $\operatorname{sen} \alpha$. La relación que liga a estos dos senos es

$$\operatorname{sen} \alpha = 3 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{3} - 4 \operatorname{sen}^3 \frac{\alpha}{3}$$

[1] Para el caso en que R_0 es el cuerpo de los racionales se puede ver en Rey Pastor: *Lecciones de Álgebra*, pág. 34, un método sistemático para determinar todas las raíces racionales.

y poniendo sen $\alpha = a$, sen $\frac{\alpha}{3} = x$, se tiene la ecuación

$$4x^3 - 3x + a = 0$$

cuyas únicas raíces racionales posibles son

$$\pm 1 \quad ; \quad \pm \frac{1}{2} \; ; \quad \pm \frac{1}{4} \quad ; \quad \pm a \quad ; \quad \pm \frac{a}{2} \; ; \quad \pm \frac{a}{4}$$

y como ninguna de ellas es raíz de la ecuación, cualquiera que sea a, se deduce:

TEOR. 6. *El problema de la trisección del ángulo no es en general resoluble con regla y compás.*

El teorema anterior expresa la imposibilidad de resolver el problema, cualquiera que sea el ángulo, pero pueden existir valores numéricos particulares para los que la solución es posible; por ejemplo para $a = 1$, la ecuación tiene la raíz $\frac{1}{2}$, lo que corresponde a la posibilidad de trisecar con regla y compás el ángulo recto, o lo que es lo mismo de construir con regla y compás el lado del dodecágono regular.

Si tomamos $a = \frac{1}{2}$, es decir un ángulo de 30°, la ecuación toma la forma

$$4x^3 - 3x + \tfrac{1}{2} = 0$$

Las únicas raíces racionales posibles son ± 1; $\pm \frac{1}{2}$; $\pm \frac{1}{4}$; $\pm \frac{1}{8}$, y ninguna de ellas es raíz de la ecuación, luego no es posible construir con regla y compás el ángulo de 10°. Como siempre es posible con regla y compás construir el ángulo mitad de uno dado se deduce que no son posibles de construir con regla y compás los ángulos de 20° y de 40°; esto último nos prueba que *no es posible la construcción con regla y compás del eneágono regular*. Vamos a tratar ahora el problema general de la construcción con regla y compás de los polígonos regulares.

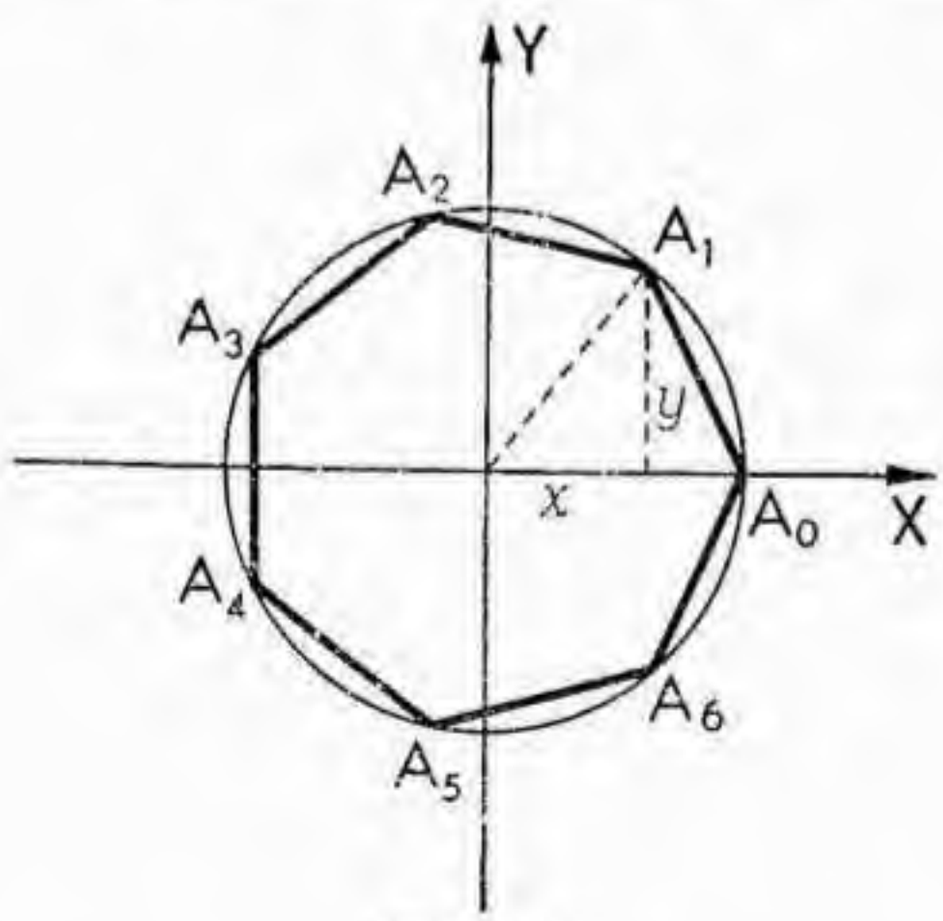

Fig. 112.

7. El problema de inscripción de polígonos regulares en el círculo. — Como siempre se puede bisecar un ángulo con regla y compás, la inscripción de polígonos regulares de número par de lados no ofrece dificultades; sólo trataremos en este parágrafo la inscripción de polígonos de número impar de lados.

Dada una circunferencia, con el origen en el centro de un sistema de coordenadas rectangulares, y el segmento unidad igual al radio; supon-

gamos un polígono regular de n lados (n impar), inscrito en la circunferencia, con un vértice A_0 en el punto (1, 0). Las coordenadas de los vértices A_1, A_2, ..., sucesivos son (fig. 112)

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n},\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\right);\ \left(\cos\frac{4\pi}{n},\ \operatorname{sen}\frac{4\pi}{n}\right)\ ;\ \ldots$$

Tomando la variable compleja $z = x + iy$, el problema de determinar los puntos A_1, A_2, ..., equivale al de determinar las raíces enésimas de la unidad (si n es el número de lados del polígono), es decir, la solución en el campo complejo de la ecuación $z^n - 1 = 0$; después de dividir por la raíz $z = 1$ (que equivale geométricamente al punto A_0) la ecuación toma la forma

[1] $$C(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0$$

que es la denominada *ecuación ciclotomica.*

Esta ecuación es de las denominadas recíprocas; como el grado es par, $n - 1 = 2m$, dividiendo por z^m, la ecuación toma la forma

$$\left(z^m + \frac{1}{z^m}\right) + \left(z^{m-1} + \frac{1}{z^{m-1}}\right) + \ldots + \left(z + \frac{1}{z}\right) = 0$$

poniendo $z + \dfrac{1}{z} = u$ y teniendo en cuenta que

$$z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) - 2 = u^2 - 2$$

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) - \left(z + \frac{1}{z}\right) = u^3 - 3u$$

.....

$$z^m + \frac{1}{z^m} = \left(z^{m-1} + \frac{1}{z^{m-1}}\right)\left(z + \frac{1}{z}\right) - \left(z^{m-2} + \frac{1}{z^{m-2}}\right)$$

se obtiene una ecuación de la forma

[2] $$\varphi(u) = a_0u^m + a_1u^{m-1} + \ldots + a_{m-1}u + a_m = 0.$$

Si las raíces de esta ecuación son irracionales cuadráticos, también lo son las de la [1], pues cada raíz de [2] nos da las raíces de [1] resolviendo una ecuación de segundo grado en z

$$z + \frac{1}{z} = u_1 \quad ; \quad z^2 - u_1z + 1 = 0.$$

Veamos cuál es el significado de la nueva incógnita; si z_i es una raíz de la ciclotómica, $z_i = x_i + iy_i$, se tiene

$$x^2_i + y^2_i = 1 \quad ;$$

$$u_i = z_i + \frac{1}{z_i} = x_i + iy_i + \frac{1}{x_i + y_i} = x_i + iy_i +$$

$$+ \frac{x_i - iy_i}{x^2_i + y^2_i} = 2x_i \quad ;$$

es decir, que las raíces de [2] son el doble de las abscisas de los vértices del polígono.

El problema de la inscripción de los polígonos regulares se reduce al de la determinación de las raíces de [2]; será pues necesario y suficiente para que la inscripción se pueda hacer con regla y compás que las raíces de la ecuación [2] sean irracionales cuadráticos sobre el cuerpo de los números racionales. En particular si [2] es irreducible tiene que ser de grado potencia de dos para que el problema tenga solución.

Como aplicación directa de este resultado veamos la inscripción del pentágono y del eptágono: las ecuaciones ciclotómicas son

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \quad ; \quad z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

y las ecuaciones en u son

$$u^2 + u - 1 = 0 \quad ; \quad u^3 + u^2 - 2u - 1 = 0.$$

La primera es de segundo grado y por consiguiente el pentágono es, como se sabe desde la geometría elemental, inscriptible con regla y compás. Las únicas raíces posibles racionales de la segunda son ± 1; como no la satisfacen, se tiene en consecuencia el siguiente resultado: *No es posible construir el eptágono regular con regla y compás.*

8. **Irreducibilidad de la ecuación ciclotómica.** — El problema de la irreducibilidad de la ecuación [2] se reduce al de la irreducibilidad de [1], puesto que se puede demostrar que *si la ecuación* [1] *es irreducible en el cuerpo de los racionales, también lo es la* [2].

En efecto, se tiene

$$C(z) = z^m \varphi\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Si fuese $\varphi(u) = \varphi_1(u) \cdot \varphi_2(u)$, en donde $\varphi_1(u)$ y $\varphi_2(u)$ son polinomios con coeficientes racionales de grados p y q tales que $p + q = m$, se tendría

$$C(z) = z^m \varphi\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^p \varphi_1\left(z + \frac{1}{z}\right) z^q \varphi_2\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

pero

$$z^p \varphi_1\left(z + \frac{1}{z}\right) = c_1(z) \quad ; \quad z^q \varphi_2\left(z + \frac{1}{z}\right) = c_2(z)$$

en donde $c_1(z)$ y $c_2(z)$ son polinomios en z de coeficientes racionales, puesto que desaparecen las potencias de z en el denominador; por consiguiente $C(z)$ no sería irreducible como lo habíamos supuesto.

Antes de estudiar la irreducibilidad de la ecuación ciclotómica demostraremos varios teoremas preliminares.

TEOR. 7. *Si el producto de dos polinomios $\varphi(z)$ y $\psi(z)$ de coeficientes enteros, tiene sus coeficientes divisibles por un mismo número primo p, uno al menos de los dos polinomios $\varphi(z)$, $\psi(z)$, tiene todos sus coeficientes múltiplos de p.*

Sean:

$$\varphi(z) = a_0 z^m + \ldots + a_{h-1} z^{m-h+1} + a_h z^{m-h} + \ldots + a_m$$
$$\psi(z) = b_0 z^n + \ldots + b_{k-1} z^{n-k+1} + b_k z^{n-k} + \ldots + b_n$$

poniendo de manifiesto en cada uno el primer coeficiente a_h y b_k respectivamente que no sea múltiplo de p. Al efectuar el producto resulta como coeficiente de $z^{m+n-h-k}$

[3] $$a_h b_k + a_{h-1} b_{k+1} + a_{h-2} b_{k+2} + \ldots + b_{k-1} a_{h+1} + b_{k-2} a_{h+2} + \ldots$$

donde todos los términos, excepto el primero, son múltiplos de p, luego no puede ser la suma un múltiplo de p, contra lo supuesto.

TEOR. 8. *Si el producto de dos polinomios*

$$\varphi(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_h z^{m-h} + a_{h+1} z^{m-h-1} + \ldots + a_m$$
$$\psi(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_k z^{n-k} + b_{k+1} z^{n-k-1} + \ldots + b_n$$

cuyos coeficientes son enteros y el primero igual a 1, es otro polinomio:

$$F(z) = z^{m+n} + c_1 z^{m+n-1} + \ldots + c_{m+n-1} z + c_{m+n}$$

cuyos coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_{m+n}$, son múltiplos de un número primo p, el último c_{m+n} es múltiplo de p^2 (Eisenstein).

Todas las a o todas las b deben ser múltiplos de p; pues suponiendo

que a_k, b_k sean los primeros coeficientes no múltiplos de p, *a contar desde el último*, el coeficiente de $z^{m+n-h-k}$ en el producto es [3] y como todos sus términos son múltiplos de p, debe ser $a_h \cdot b_k$ múltiplo de p; luego, contra lo supuesto, a_h ó b_k son uno de ellos múltiplo de p.

Suponiendo, por ejemplo, que todas las a sean múltiplos de p, si fuese b_k el primer coeficiente, b no múltiplo de p (contando desde la derecha), el coeficiente de z^{m+n-k} sería

$$b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \ldots + a_{k-1} b_1 + a_k$$

en donde todos los sumandos, salvo el primero, son múltiplos de p; luego dicho coeficiente no sería múltiplo de p, contra lo supuesto.

Siendo pues, todas las a y todas las b múltiplos de p, el último coeficiente $c_{m+n} = a_m \cdot b_n$ tiene que ser múltiplo de p^2.

TEOR. 9. *Si un polinomio* f(z) *de coeficientes enteros es el producto* $\varphi(z)$, $\psi(z)$ *de dos polinomios de coeficientes racionales, es también el producto de dos polinomios de coeficientes enteros. (Gauss).*

Reduciendo a un común denominador los coeficientes de $\varphi(z)$ y de $\psi(z)$, tendremos:

$$f(z) = \frac{1}{A}(a_0 z^m + \ldots + a_m)\frac{1}{B}(b_0 z^n + \ldots + b_n)$$

siendo $a_0, \ldots, a_m$, A, $b_0, \ldots, b_m$, B, números enteros. Obtenemos, pues, esta identidad entre polinomios de coeficientes *enteros*:

$$A \cdot B \cdot f(z) = (a_0 z^m + \ldots + a_m)(b_0 z^n + \ldots + b_n)$$

Si p es un factor primo de A ó B, en virtud del teorema 7, debe dividir a todas las a_i ó a todas las b_i; suprimido este factor p en ambos miembros, hacemos lo mismo con otro factor primo q, etc., hasta obtener en resumen:

$$f(z) = (a'_0 z^m + a'_1 z^{m-1} + \ldots + a'_m)(b'_0 z^n + b'_1 z^{n-1} + \ldots + b'_n)$$

siendo *enteros* todos los coeficientes.

TEOR. 10. *La ecuación ciclotómica*

$$z^{p-1} + z^{p-2} + z^{p-3} + \ldots + z^2 + z + 1 = 0$$

es irreducible en el cuerpo de los racionales si p es primo.

En efecto: si este polinomio fuese el producto de otros dos de coeficientes racionales, sería también, por el teorema 9, el producto de dos polinomios de coeficientes enteros, y lo mismo sucedería poniendo $z+1$ en lugar de z, es decir el polinomio

$$\frac{(z+1)^p - 1}{(z+1)-1} = z^{p-1} + pz^{p-2} + \frac{p(p-1)}{2!}z^{p-3} +$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}z^{p-4} + \ldots + \frac{p(p-1)}{2}z + p$$

sería el producto de dos polinomios, del tipo de los del teorema 8, y ello no es posible, en virtud de dicho teorema, por ser múltiplos de p sus coeficientes y no ser el último múltiplo de p^2.

9. **Condiciones de construcción con regla y compás de los polígonos regulares.** — El teorema 10 del número anterior es fundamental para determinar las condiciones de construcción con regla y compás de un polígono regular de un número primo de lados. En ese caso la ecuación [1] es, por el teorema 10, irreducible y, por lo enunciado al principio del parágrafo anterior, también es irreducible la [2]; luego, para que la construcción sea posible, debe ser $n-1$ una potencia de 2, es decir, ha de ser $n = 2^p + 1$.

Si p admitiera un factor impar i, sería $p = i \,.\, q$; en la igualdad elemental

$$x^i + 1 = (x+1)\,(x^{i-1} - x^{i-2} + \ldots - x + 1)$$

hacemos $x = 2^q$, tendríamos:

$$n = 2^p + 1 = (2^q)^i + 1 = (2^q + 1)\,[2^{q(i-1)} - 2^{q(i-2)} + \ldots - 2^q + 1]$$

y n no sería primo, luego p sólo puede tener factores pares, es decir, ha de ser él mismo una potencia de 2. Podemos por lo tanto enunciar ahora el resultado siguiente:

Para que se pueda construir con regla y compás el polígono regular de un número primo n de lados es necesario que n sea de la forma $2^{2^\mu} + 1$.

Demos ahora valores a μ; para $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$, obtenemos para n los valores 3, 5, 17, 257 y 65.537 que son primos. Para $\mu = 5$, 6 y 7 se ha demostrado que n no es primo. Para $\mu = 8$ no se sabe si n es primo o compuesto, lo que no nos debe extrañar si pensamos que tiene 77 cifras.

Los casos en que n vale 3 y 5 son los resultados clásicos de la construcción con regla y compás del triángulo equilátero y del pentágono regular. Más adelante probaremos que el polígono de 17 lados es constructible con regla y compás.

Pasemos ahora al caso en que n es un número impar cualquiera y consideremos dentro de él dos casos diferentes:

a) *n es una potencia p^α de un número primo impar*; consideremos primero el caso $\alpha = 2$, vamos a probar que en este caso no se puede construir el polígono; con ello quedará probada la imposibilidad para todos los valores de α ya que si se puede construir un polígono regular de n lados se construyen automáticamente todos los polígonos regulares cuyo número de lados sea un divisor de n.

La ecuación a resolver es del tipo $z^{p^2} - 1 = 0$, que se descompone en la forma

$$(z^p - 1)\,(z^{p(p-1)} + z^{p(p-2)} + \ldots + z^p + 1) = 0.$$

El primer factor del primer miembro nos da los vértices de p lados; nos debemos preocupar, pues, únicamente del segundo factor, es decir, de la ecuación

$$[4] \qquad z^{p(p-1)} + z^{p(p-2)} + \ldots + z^p + 1 = 0.$$

Esta ecuación es recíproca; la ecuación en u es del grado $\dfrac{p(p-1)}{2}$ que, siendo p primo e impar no puede ser nunca una potencia de dos; vamos a probar que esta ecuación es irreducible y con ello quedará probada la imposibilidad de construir el polígono. El razonamiento utilizado al comienzo del nº 8 nos muestra que basta probar que es irreducible la ecuación [4].

El procedimiento para probar la irreducibilidad de [4] es análogo al empleado para probar la irreducibilidad de la ecuación ciclotómica cuando p era primo. Se pone $z = x + 1$, y la ecuación toma la forma

$$Q(x) = (x+1)^{p(p-1)} + (x+1)^{p(p-2)} + \ldots + (x+1)^p + 1 = \\ = \frac{(x+1)^{p^2} - 1}{(x+1)^p - 1}.$$

Sabemos (Teorema 10 del número anterior) que

$$(x+1)^p - 1 = x^p + pP_1(x)$$

siendo $P_1(x)$ un polinomio cuyo término independiente es 1. Análogamente, es decir, mediante el desarrollo según el binomio de Newton, se prueba que

$$(x+1)^{p^2} - 1 = x^{p^2} + p \,.\, P_2(x)$$

siendo $P_2(x)$ un polinomio cuyo término independiente es p.

$Q(x)$ es el cociente de estos dos polinomios y es un polinomio de coeficientes enteros: como los primeros coeficientes del dividendo y divisor son la unidad y todos los demás son múltiplos de p, se deduce que $Q(x)$ tiene todos los coeficientes múltiplos de p, salvo el primero que es igual a la unidad; el término independiente de $Q(x)$ es p, cociente del término independiente p^2 del dividendo por el término independiente p del divisor; luego por el teorema 8, $Q(x)$ es irreducible, como queríamos probar. Pasemos ahora al segundo caso.

b) *n es un número impar con varios factores primos distintos.* Sea $n = p \cdot q$, en donde p y q son primos entre sí; entonces sabemos[1] que existen dos enteros a y b tales que

$$1 = ap + bq \quad ; \quad \text{luego,} \frac{1}{n} = \frac{a}{q} + \frac{b}{p} \quad ;$$

lo que prueba que si se sabe dividir la circunferencia en p y en q partes iguales se sabe también dividir en n partes. Es, por otra parte, evidente, que si no se puede dividir con regla y compás la circunferencia en p ó en q partes iguales no se podrá dividir con regla y compás en n partes.

Por consiguiente, si n está descompuesto en factores primos *distintos* $n = p_1 \cdot p_2 \ldots p_r$, la condición necesaria y suficiente para que se pueda construir con regla y compás el polígono de n lados, es que se puedan inscribir con regla y compás todos los polígonos de $p_1, p_2, \ldots, p_r$ lados.

Resumiendo los resultados que hemos obtenido hasta ahora, podemos enunciar el teorema siguiente:

TEOR. 11. *Para que sea posible la construcción con regla y compás de un polígono regular de un número impar de lados, es necesario que n sea de la forma*

$$n = (2^{2^\alpha} + 1)(2^{2^\beta} + 1) \ldots (2^{2^\lambda} + 1)$$

en donde los $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ son números naturales distintos dos a dos.

Utilizando recursos de carácter más superior *se puede demostrar que esta condición es suficiente*[2].

Sin necesidad de este resultando y utilizando la posibilidad de construcción del polígono de 17 lados, que enseguida demostraremos, llegamos al siguiente resultado de interés práctico:

TEOR. 12. *Entre todos los polígonos regulares con un número impar de lados inferior a 257, los únicos que se pueden construir con regla y compás son los de 3, 5, 15, 17, 51, 85 y 255 lados.*

En efecto, según el teorema 11, el número de lados debe descomponerse en un producto de factores primos, distintos dos a dos, y de la forma 2^{2^α}; números primos de esta forma menores que 257 sólo hay 3, 5 y 17 y sus productos son $3 \times 5 = 15$; $3 \times 17 = 51$; $5 \times 17 = 85$; $3 \times 5 \times 17 = 255$. Para la inscripción de los polígonos de 15, 51, 85 y 255 se aplican las fórmulas de descomposición

$$\frac{1}{15} = \frac{2}{3} - \frac{3}{5}^{*} \quad ; \quad \frac{1}{51} = \frac{2}{3} - \frac{11}{17} \quad ;$$

$$\frac{1}{85} = \frac{7}{17} - \frac{2}{5} \quad ; \quad \frac{1}{255} = \frac{8}{17} - \frac{7}{15} \, .$$

---

[1] Ver REY PASTOR, PI CALLEJA, TREJO: *Análisis Matemático*, vol. I, pág. 49.
[2] Ver REY PASTOR: *Lecciones de Álgebra*, pág. 233.
* En la práctica es preferible aplicar la descomposición

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$$

10. **El polígono de diecisiete lados.** — Vamos a probar, ahora, la posibilidad de la construcción con regla y compás del polígono de 17 lados.

De acuerdo con lo dicho al principio del nº 7, sean $x_1, x_2, \ldots, x_{16}$ las dieciséis raíces complejas de la unidad, es decir, las raíces de la ecuación ciclotómica de grado 16. Las propiedades elementales de los números complejos nos indican que se tiene $x_m \cdot x_n = x_r$, siendo r el resto, módulo 17, de la suma $m+n$. (Es claro que se considera $x_0 = 1$).

Formemos las sumas

$$y_0 = x_1 + x_9 + x_{13} + x_{15} + x_{16} + x_8 + x_4 + x_2$$
$$y_1 = x_3 + x_{10} + x_5 + x_{11} + x_{14} + x_7 + x_{12} + x_6$$

y tenemos que la suma $y_0 + y_1$ es la suma de las raíces de la ecuación ciclotómica de grado 16, y por lo tanto es igual al coeficiente del término de grado 15 cambiado de signo, es decir, $y_0 + y_1 = -1$. El producto $y_0 \cdot y_1$ se forma fácilmente aplicando la regla de multiplicación que acabamos de enunciar y se obtiene el cuádruplo de la suma de las raíces, es decir $y_0 \cdot y_1 = -4$. Por consiguiente, y_0 é y_1 son las raíces de la ecuación de segundo grado

$$y^2 + y - 4 = 0$$

y por consiguiente son construibles con regla y compás. Pongamos ahora

$$z_0 = x_1 + x_{13} + x_{16} + x_4$$
$$z_1 = x_9 + x_{15} + x_8 + x_2$$
$$z_2 = x_3 + x_5 + x_{14} + x_{12}$$
$$z_3 = x_{10} + x_{11} + x_7 + x_6$$

y haciendo los cálculos se tiene:

$$z_0 + z_1 = y_0 \quad ; \quad z_0 \cdot z_1 = -1 \quad ; \quad z_2 + z_3 = y_1 \quad ; \quad z_2 \cdot z_3 = -1 \quad ;$$

luego, z_0 y z_1, z_2 y z_3 son respectivamente las raíces de las ecuaciones

$$z^2 - y_0 z - 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - y_1 z - 1 = 0$$

y por consiguiente se pueden construir con regla y compás.

Formemos ahora

$$u_0 = x_1 + x_{16}$$
$$u_1 = x_4 + x_{13}$$

y se tiene $u_0 + u_1 = z_0$; $u_0 \cdot u_1 = z_2$; luego u_0 y u_1 son las raíces de la ecuación de segundo grado

$$u^2 - z_0 u - z_2 = 0$$

y son por consiguiente construibles con regla y compás.

Se tiene ahora $x_1 + x_{16} = u_0$; $x_1 \cdot x_{16} = 1$; luego x_1 y x_{16} son las raíces de la ecuación de segundo grado

$$x^2 - u_0 x + 1 = 0$$

y por consiguiente x_1 es construible con regla y compás, con lo que queda probada la posibilidad de construir el polígono regular de 17 lados con regla y compás.

De esta forma la resolución de la ecuación de grado 16 se reduce a la resolución sucesiva de cuatro ecuaciones de segundo grado y puede deducirse, de esta forma de resolver la ecuación, un procedimiento para construir gráficamente el polígono[1].

NOTA: Puede parecer muy artificiosa la forma en que se agrupan las distintas raíces de la ecuación ciclotómica para resolverla, pero esta agrupación tiene un sentido profundo que se explica en la teoría de ecuaciones de Galois.

---

[1] Ver REY PASTOR: *Lecciones de Algebra*, pág. 178.

11. La cuadratura del círculo. — Supongamos un círculo dado y tomemos su radio como unidad; su área es π, si x es el lado del cuadrado de la misma área, se tiene $x^2 = \pi$; $x = \sqrt{\pi}$, luego el problema de la cuadratura del círculo se reduce a ver si π es un irracional cuadrático sobre el cuerpo de los números racionales. Sabemos (teorema 4) que para ello es necesario que π sea raíz de una ecuación algebraica irreducible de coeficientes racionales cuyo grado sea una potencia de dos.

Podemos ahora plantearnos el problema siguiente:

Un número real cualquiera ¿es raíz de una ecuación algebraica de coeficientes racionales?

Este problema fué resuelto por primera vez en 1844 por Liouville, que construyó unos números reales que no podían ser raíces de ninguna ecuación algebraica de coeficientes racionales. Como consecuencia de este descubrimiento, se clasificaron los números reales en *algebraicos*, los que podían ser soluciones de una ecuación algebraica de coeficientes racionales (por ejemplo, $\sqrt{1+\sqrt{3}}$, $\sqrt[3]{2}$), y *transcendentes*, los que no podían ser soluciones de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales. Es claro que los irracionales cuadráticos sobre el cuerpo de los racionales forman una clase particular de los números algebraicos.

Los números transcendentes de Liouville eran números creados a propósito para demostrar la existencia de tales números, pero aparte de este papel, importante sin duda, no tenían ninguna otra aplicación en las matemáticas. En 1873 Hermite probaba la transcendencia del número e, que como es sabido es uno de los más importantes de la matemática, y basándose en esta demostración en 1882 Lindemann demostró la transcendencia de π [1]. Con este resultado, uno de los más resonantes del siglo, *quedaba probada la imposibilidad de la cuadratura del círculo con regla y compás*, ya que π, no siendo algebraico, con mayor razón no podía ser irracional cuadrático.

Como dijimos al principio de este parágrafo, la imposibilidad *teórica* de la cuadratura del círculo, y en general de todos los problemas de construcciones geométricas, es distinta de la imposibilidad práctica. Vamos ahora, a título de ejemplo, a dar una construcción aproximada de π con regla y compás.

Dada una circunferencia de centro O y de radio unidad, tracemos (fig. 113) una tangente en un punto cualquiera A, sobre ella tomaremos el segmento AB de longitud 11/5 y el segmento BC de longitud 2/5. Se une el centro O con los puntos

[1] Una demostración de las transcendencias de e y de π puede estudiarse en REY PASTOR: *Elementos de la Teoría de Funciones*, 3ª edición, página 229.

B y C, y sobre la semirrecta AO se toma un segmento AD igual a OB. Por el punto D se traza una paralela a OC que corta a la recta AC en el punto E. Vamos a calcular el valor del segmento AE.

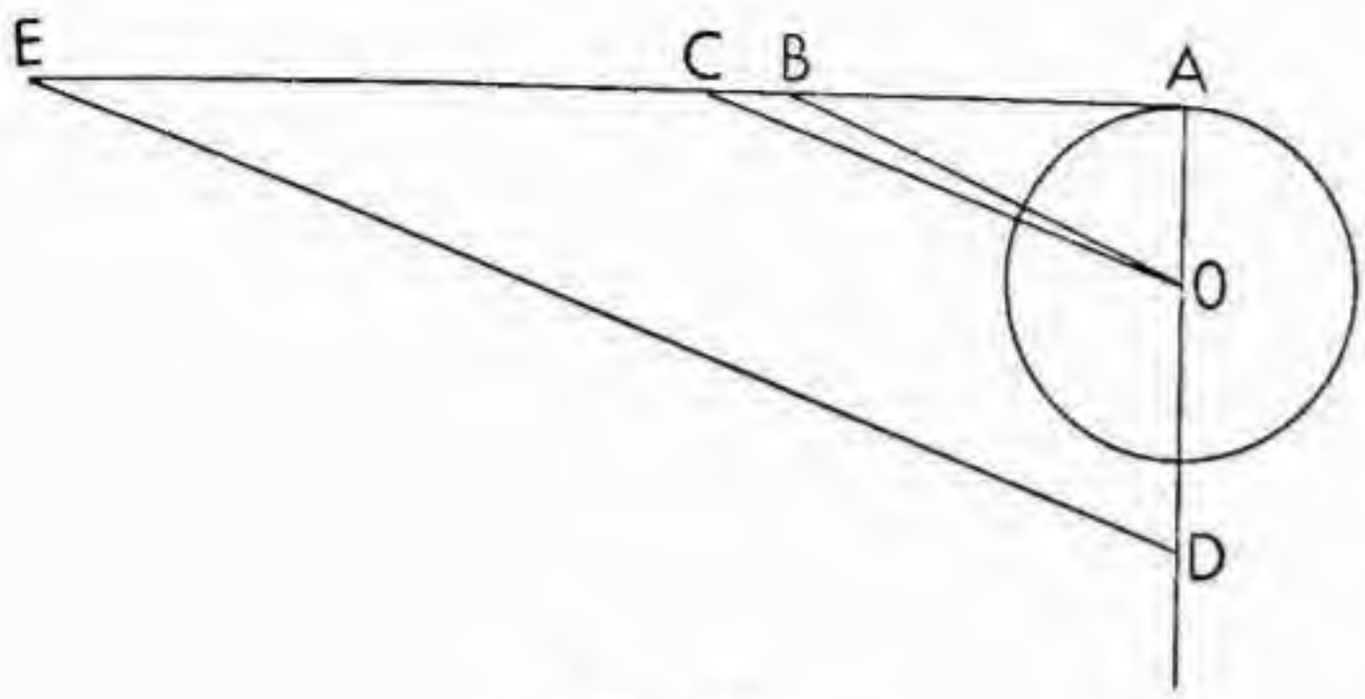

Fig. 113.

Por la semejanza de los triángulos ADE y AOC se tiene:

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AO} \quad ; \quad AC = \frac{13}{5} \quad ; \quad AO = 1$$

$$AE = \frac{13}{5} AD = \frac{13}{5} OB$$

Además se tiene:

$$OB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{11}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{146}}{5}$$

$$\frac{AE}{2} = \frac{13}{10} OB = \frac{13}{50} \sqrt{146} = 3{,}1415919$$

por consiguiente, la mitad del segmento AE nos da la longitud de π con un error menor que la millonésima parte del diámetro, es decir si el diámetro es de un decímetro con un error menor que una diezmilésima de milímetro, muy inferior al inherente a los útiles de dibujo.

12. **Construcciones mediante el trazado de curvas no construíbles con regla y compás.** — Ante el fracaso de los intentos para resolver con el sólo uso de la regla y el compás los problemas de la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo, los griegos imaginaron resolverlos trazando en el plano curvas distintas de la recta y la circunferencia con la ayuda de instrumentos distintos de la regla y del compás; así, mediante el trazado de la cisoide de Diócles, resolvieron el problema de la duplicación del cubo, mediante el uso de la concoide de Nicomedes resolvieron el de la trisección del ángulo y mediante el uso de la cuadratriz de Dinostrato, el de la cuadratura del círculo. (Ver las notas al capítulo).

Se puede demostrar, por otra parte, que todos los problemas geométricos en que la incógnita está ligada con los datos

mediante ecuaciones algebraicas de grado 3 ó 4 (y por consiguiente la duplicación del cubo y la trisección del ángulo), pueden resolverse con regla y compás, si se supone, además, que *se ha trazado en el plano previamente una elipse, hipérbola o parábola arbitraria.*

Limitaremos la demostración al caso de la parábola. Eligiendo adecuadamente los ejes y el segmento unidad se puede siempre obtener $y = x^2$, como ecuación de la parábola.

Consideremos ahora una ecuación de cuarto grado

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

cuyos coeficientes sean irracionales cuadráticos sobre el cuerpo de los datos. Podemos siempre suponer $a_0 = 1$, y haciendo el campo de variable $x = x' - a_1/4$, obtenemos una ecuación del tipo

[5] $$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

Consideremos la circunferencia de ecuación

[6] $$x^2 + y^2 + qx + (p - 1)y + r = 0$$

Si x_0 es una raíz de [5], el punto (x_0, x^2_0) es un punto de la circunferencia [6], como se ve reemplazando en la ecuación; recíprocamente, si consideramos un punto (x_0, y_0) que esté en la circunferencia y en la parábola, entonces x_0 es raíz de la ecuación [5], como se ve reemplazando en esta ecuación x por x_0 é y por x^2_0.

Las raíces de [5] son, pues, las abscisas de los puntos de intersección de la parábola $y = x^2$, que suponemos construída, y de la circunferencia de ecuación [6], es decir de una circunferencia de centro

$$\left(-\frac{q}{2}, \; -\frac{p-1}{2}\right)$$

y cuyo radio al cuadrado es

$$\frac{q^2}{4} + \frac{(p-1)^2}{4} - r \quad ;$$

como estos datos son constructibles con regla y compás, a partir de p, q y r, también lo son las raíces de [5], como queríamos demostrar. Se puede observar que la circunferencia [6] será real siempre que la ecuación [5] tenga alguna raíz real.

Si la ecuación es de tercer grado, se puede, multiplicándola por x, convertirla en una de cuarto grado sin término independiente de la forma

[5′] $$x^4 + px^2 + qx = 0.$$

La circunferencia [6] toma la forma

[6′] $$x^2 + y^2 + qx + (p - 1)y = 0$$

y las abscisas de los puntos de intersección de esta circunferencia con la parábola son, con excepción del valor 0, si es simple, las raíces de [5′].

Para resolver el problema de la duplicación del cubo con este método, basta determinar la intersección de la parábola con la circunferencia de centro $(1, \frac{1}{2})$ y radio $\sqrt{5/2}$. Un método análogo se emplearía para la trisección del ángulo.

Veamos ahora cómo se puede resolver el problema de la duplicación del cubo, *cuando se supone trazada la cisoide*. Sabemos (§ 25-3, haciendo $p = 2$) que la ecuación de esta curva es

$$y^2(1 - x) = x^3 \quad \text{ó} \quad \left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{y}{1 - x}$$

Las rectas de ecuaciones $y = \lambda x$; $y = \lambda^3(1 - x)$, se cortan en puntos de la curva, cualquiera que sea el valor del parámetro λ. Por consiguiente, si trazamos la recta de ecuación $y = 2(1 - x)$, la recta que pasa por el origen y el punto de intersección de la primera recta con la cisoide tiene como ecuación $y = \sqrt[3]{2}x$, y por lo tanto la ordenada de esta recta correspondiente a la abscisa $x = 1$, es $\sqrt[3]{2}$, luego dicha construcción nos resuelve el problema de la duplicación del cubo.

En lo que respecta a la cuadratura del círculo, la solución puede obtenerse mediante el uso de intégrafos, es decir de aparatos que trazan la curva primitiva de una dada [1]. Si aplicamos este aparato a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, entre el punto $(1, 0)$ y el $(0, 1)$, la diferencia de ordenadas entre los puntos extremos de la curva trazada por el intégrafo será igual al área de un cuadrante, es decir $\pi/4$, y por consiguiente se obtiene así la solución del problema de la cuadratura del círculo.

NOTAS Y COMPLEMENTOS AL CAPÍTULO V

1. CURVAS ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES. La geometría analítica permitió a Descartes, por primera vez, clasificar las curvas en algebraicas y trascendentes, o en "geométricas" y "mecánicas", como él las llamaba respectivamente. La definición de Descartes no es muy precisa, pero es de mucha importancia histórica: "Yo no sabría nada mejor que decir que todos los puntos de aquéllas (curvas) que se pueden llamar geométricas, es decir, que caen bajo alguna medida precisa y exacta, tienen necesariamente alguna relación con todos los puntos de una línea recta que puede ser expresada por alguna ecuación, la misma para todos los puntos". El nombre actual de curvas algebraicas y trascendentes se debe a Leibniz.

2. LOS PRIMEROS LUGARES GEOMÉTRICOS. Ya hemos dicho que la geometría analítica es el instrumento más indicado para el estudio de los

[1] Ver, por ejemplo: REY PASTOR, PI CALLEJA Y TREJO: *Análisis Matemático*, vol. I, pág. 757.

lugares geométricos. Descartes supo reconocerlo e hizo aplicación de ello a la solución de un famoso problema de Pappus, que sólo se había resuelto en casos particulares. El problema es el siguiente: Dadas $2n-1$ (ó $2n$) rectas, determinar el lugar geométrico de los puntos que trazando por ellos $2n-1$ (ó $2n$) rectas que forman respectivamente con las anteriores ángulos dados, el producto de n segmentos así determinados, esté en una razón dada con el producto de los $n-1$ restantes, por un segmento fijo (o de los n restantes). La solución es que, hasta 4 veces, el lugar es una recta o una cónica, pero por 5 ó más rectas, es una curva de grado superior a dos.

Fermat, el otro creador de la geometría analítica, en su famosa memoria *Ad locos planos et solidos isagoge* (Introducción a los lugares planos y sólidos) trata también un lugar geométrico no fácil de estudiar sin los recursos de la geometría analítica, a saber: "Dados dos puntos fijos M, N encontrar el lugar geométrico de los puntos I tales que si se trazan los segmentos IM, IN la suma de sus cuadrados sea al triángulo IMN en una razón dada". La solución es una circunferencia.

3. Las curvas de los tres problemas clásicos. Muchas curvas clásicas fueron ideadas con el objeto de resolver los tres problemas clásicos de la trisección del ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo. Veamos algunos ejemplos.

La cisoide sirve para la duplicación del cubo. En efecto, construyendo la cisoide cuyo parámetro p sea igual al doble de la arista del cubo dado, que podemos tomar por unidad, o sea $p=2$, la recta $y=\lambda x$ corta a la misma en el punto $P(x=\lambda^2/(1+\lambda^2),\ y=\lambda^3/(1+\lambda^2))$. Este punto, unido con el $A(1, 0)$ determina sobre el eje y el segmento $OB=\lambda^3$. Por tanto, procediendo a la inversa, tomando dos unidades sobre el eje y para tener $OB=\lambda^3=2$ y luego AB para determinar P, la recta OP corta a la asíntota $x=1$ de la cisoide en el punto H tal que $AH=\lambda$. Luego AH, igual a la raíz cúbica de 2, será la arista del cubo de volumen 2.

La concoide de la recta sirve para trisecar el ángulo. Sea el ángulo

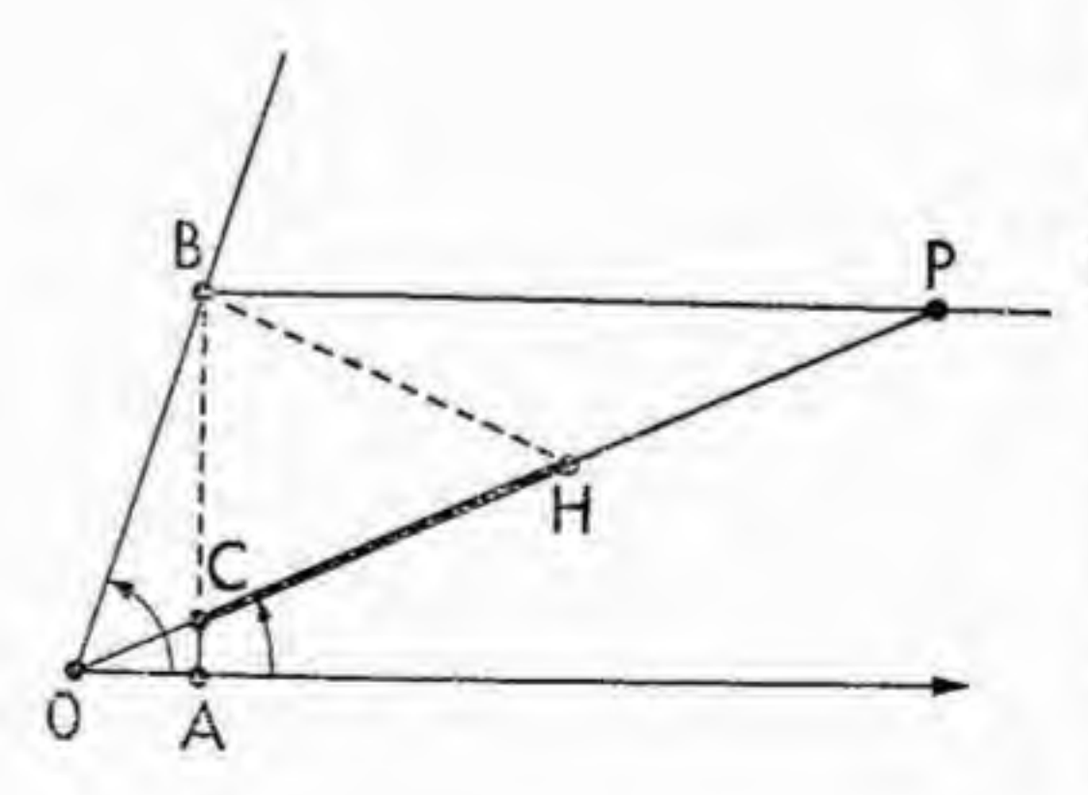

Fig. 113 (a).

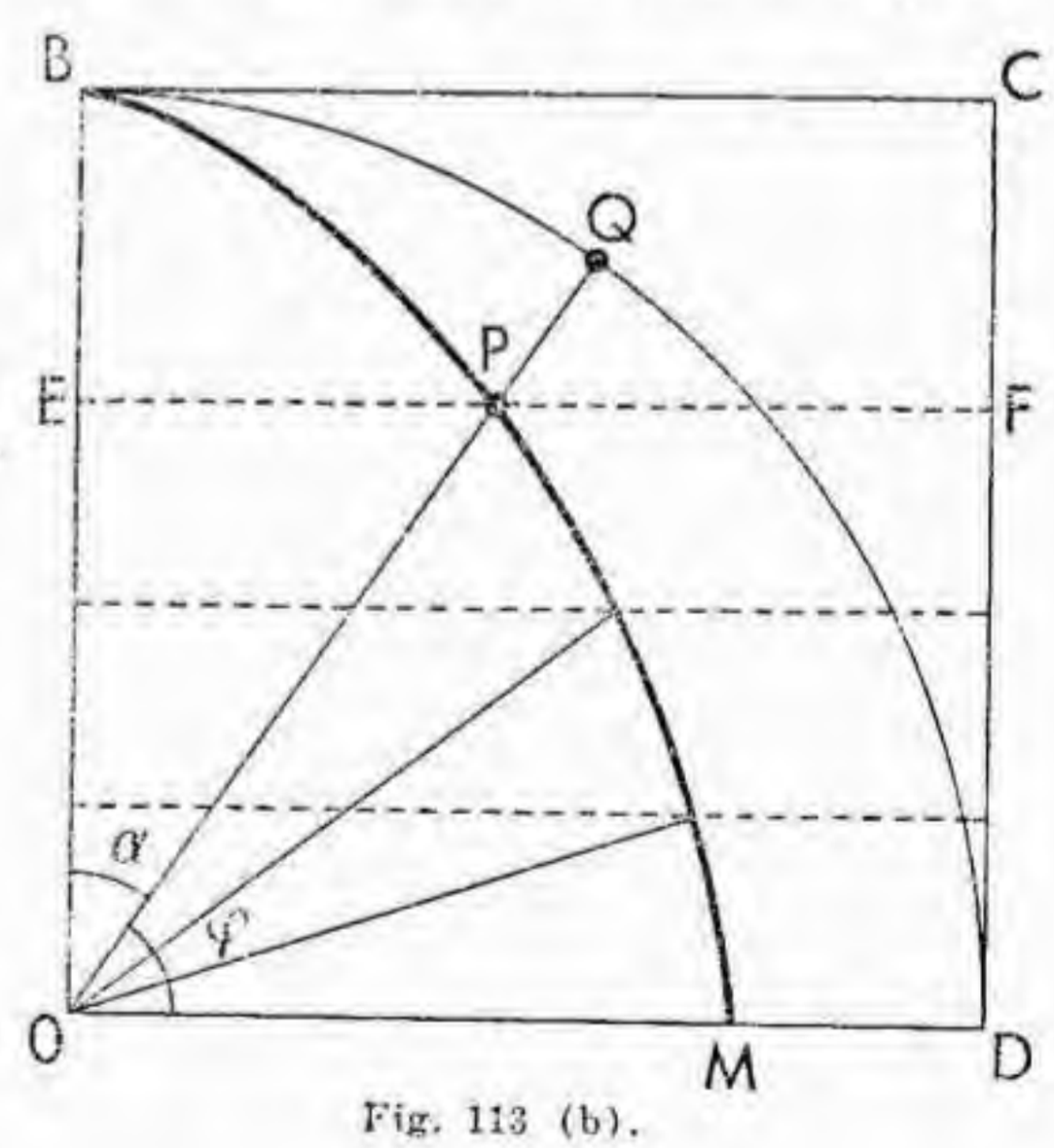

Fig. 113 (b).

AOB (fig. 113, *a*); construyamos la concoide respecto de O de la recta AB con intervalo $h=2OB$. Sea P el punto en que la paralela a OA por B corta a la concoide; afirmamos que el ángulo POA es un tercio de BOA. En efecto, $CP=2OB$ y por tanto si H es el punto medio de CP, por ser el triángulo CBP rectángulo en B, será $HC=HP=HB=OB$. Luego

los triángulos OBH y HBP son isósceles y por tanto áng. BOH = áng. BHO = 2 áng. BPH = 2 áng. HOA, lo que prueba lo afirmado.

La cuadratriz de Hipias y Dinostrato. Se puede considerar engendrada por la intersección del radio OQ de una circunferencia que gira con movimiento uniforme de OB á OD, al mismo tiempo que un segmento BC desciende también con movimiento uniforme hasta OD (fig. 113, *b*).

La ecuación se deduce escribiendo la proporcionalidad entre el ángulo girado por OQ y el camino recorrido por el segmento BC al descender, o sea, poniendo $OB = OD = r$, $\alpha/EB = (\pi/2)/r$, o bien puesto que $EB = r - y$, $\alpha = \pi/2 - \pi y/2r$, y de aquí,

$$x = y \operatorname{tg} \alpha = y \cot \frac{\pi y}{2r}.$$

Esta curva puede servir para dividir un ángulo en cualquier número de partes iguales, puesto que de su ecuación se deduce

$$\operatorname{arc\,tg}(y/x) = \pi y/2r$$

es decir, el ángulo φ del radio vector con el eje x es proporcional a y. Bastará por tanto dividir y en n partes y trazando los radios vectores correspondientes se tendrá φ dividido en n partes (en la figura se ha hecho para $n = 3$). Ésta fué la aplicación que hizo Hipias de la cuadratriz.

Más tarde Dinostrato observó que también podía servir para cuadrar el círculo, puesto que, para $y = 0$ es $x_0 = OM = 2r/\pi$ y por tanto $\pi = 2r/x_0$. Tenido π, el área de un círculo de radio a será $\pi a^2 = 2ra^2/x_0$, expresión fácil de construir.

4. BIBLIOGRAFÍA. La teoría de curvas en general (tangente, máximos y mínimos, inflexión, asíntotas, ...) suele estar tratada en los libros de Cálculo Infinitesimal, pues su estudio equivale al de las funciones que las representan.

El estudio particular de muchas curvas clásicas y ejemplos notables por alguna de las particularidades que presentan, se encuentra en las siguientes obras:

F. GÓMES TEIXEIRA, *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches*. Vol. I, Coimbra 1908; Vol. II, Coimbra 1909.

G. LORIA, *Spezielle algelraische und traszendente ebene Kurven*, 2 vol. Leipzig-Berlín, Teubner, 1911.

SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven*. Leipzig, 1882.

H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven*. Sammlung Schubert, vol. 56, 1908.

El libro de Gómes Teixeira es un verdadero catálogo de curvas notables; el de Loria tiene muchas referencias a la parte histórica de cada una de ellas: el de Wieleitner clasifica las curvas a partir de su generación cinemática y por sus relaciones mutuas a través de las transformaciones que las convierten unas en otras.

Dedicados exclusivamente a las curvas algebraicas, se pueden citar:

H. WIELEITNER, *Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung*. Sammlung Schubert, vol. 43, 1905.

H. WIELEITNER, *Algebraische Kurven* I (*Gestaltliche Verhältnisse*). Sammlung Göschen, 1914.

E. BEUTEL, *Algebraische Kurven* II (*Theorie und Kurven dritter und vierter Ordnung*). Sammlung Göschen, 1911.

L. BERZORI, *Allgemeine theorie der höheren algebraischen Kurven*. Enzyclopädie der math. Wissenschaften, vol. III, parte 2ª, Leipzig, 1906.

En la misma Enciclopedia hay otro artículo de G. KOHN-G. LORIA sobre *Spezielle ebene algebraische Kurven*.

Sobre construcciones geométricas existe una excelente obra:

H. LEBESGUE, *Leçons sur les constructions géométriques*, París, Gauthier-Villars, 1950.

CAPÍTULO VI

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

§ 29. TRANSFORMACIONES EN GENERAL. CONGRUENCIAS

1. **Transformaciones en general.** — Sean π y π' dos planos dados, que pueden ser distintos o superpuestos. Dar una "transformación puntual" del plano π en el π', o dar una "correspondencia" entre los puntos de π y los de π', significa dar una cierta ley que permita asignar a cada punto P del plano π un punto P′ del plano π'. El punto P′ se dice que es el "transformado" o el "correspondiente" o el "homólogo" del P. Representando por **T** a la transformación, se suele indicar $P' = \mathbf{T}P$ y se lee: P′ igual al transformado de P.

Por ejemplo, si al punto $P(x, y)$ de un plano se hace corresponder en el otro el punto P′ de coordenadas

$$x' = 2x + 3y \quad , \quad y' = x + 2y - 1$$

se tiene una transformación o una correspondencia entre ambos. En ella, al punto $(0, 0)$ corresponde el $(0, -1)$; al punto $(1, 0)$ corresponde el $(2, 0)$; al $(1, 1)$ el $(5, 2)$, etc.

A veces se estudian transformaciones tales que a un punto del plano π corresponde otro elemento, por ejemplo una recta, del plano π'. Estas transformaciones no puntuales no las vamos a considerar, de manera que en lo sucesivo, al decir simplemente "transformación", ya entenderemos que se trata de una transformación puntual o correspondencia punto a punto.

Conviene tener presente las siguientes definiciones:

Transformación inversa. Sea **T** una transformación del plano π en π', representada por $P' = \mathbf{T}P$. Si cada punto P′ de π' es el transformado de un solo punto P de π, la transformación de π' en π que al punto P′ le hace corresponder el P, se llama la transformación inversa de **T**. Se suele representar por $\mathbf{T}^{-1}$, o sea

$$\text{de } P' = \mathbf{T}P \text{ se deduce } P = \mathbf{T}^{-1}P'.$$

Por ejemplo, la inversa de la transformación antes considerada es la

$$x = 2x' - 3y' - 3 \quad , \quad y = 2y' - x' + 2$$

que al punto $(0, 0)$ le hace corresponder el punto $(-3, 2)$, al $(0, 1)$ el $(-6, 4)$, etc.

Puede ocurrir que un mismo punto P′ sea correspondiente de varios puntos P; entonces diremos que la transformación no tiene inversa, aunque a veces se estudia también este tipo más general de transformaciones no unívocas. Por ejemplo, en la transformación $x' = x^2$, $y' = y$ a cada punto (x', y') corresponden los dos puntos $(\pm \sqrt{x'}\ y')$.

Elementos unidos de una transformación. Supongamos que los dos planos π, π' sean coincidentes, es decir, sean uno mismo. Se llaman puntos unidos de una transformación **T** aquellos que coinciden con sus transformados. Es decir, los que están definidos por la relación P = **T**P.

Por ejemplo, si la transformación antes considerada opera entre los puntos de un mismo plano, el punto $x = 3/2$, $y = -1/2$ es unido, puesto que a él corresponde el punto $x' = 3/2$, $y' = -1/2$, que coincide con el primero.

Transformación idéntica. Cuando todos los elementos de una transformación son elementos unidos, la transformación se llama idéntica, o una identidad. Está definida por las ecuaciones $x' = x$, $y' = y$, y significa simplemente que cada elemento es correspondiente de sí mismo.

Producto de transformaciones. Supongamos que los dos planos π, π' sean superpuestos o coincidentes. Se llama producto de dos transformaciones $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ a la transformación que resulta al aplicarlas sucesivamente, una después de la otra.

Es decir, si la primera es $P' = \mathbf{T}_1 P$ y luego aplicamos $\mathbf{T}_2$ a P′ obteniendo $P'' = \mathbf{T}_2 P'$, la transformación producto es la $P'' = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1 P$ que hace pasar directamente de P a P″.

Sea, por ejemplo, la transformación **T** definida por

$$x' = \frac{1}{x} \quad , \quad y' = x - y + 1$$

y la $\mathbf{T}_2$ definida por

$$x' = x + y \quad , \quad y' = 3x - 2 .$$

Aplicando $\mathbf{T}_2$ al punto P′ resulta el punto P″ de coordenadas

$$x'' = x' + y' = \frac{1}{x} + x - y + 1 \quad ,$$

$$y'' = 3x' - 2 = \frac{3}{x} - 2 .$$

Estas son las ecuaciones de la transformación producto $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$.

El producto de transformaciones no es en general conmuta-

tivo. En efecto, en el mismo ejemplo anterior, si aplicamos primero $\mathbf{T}_2$ a P y luego $\mathbf{T}_1$ a P′ obtenemos

$$x'' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{x+y} \quad , \quad y'' = x' - y' + 1 = -2x + y + 3$$

que no es el mismo punto P″ de antes.

Obsérvese que la notación $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ indica que primero hay que aplicar $\mathbf{T}_1$ y luego $\mathbf{T}_2$ (aunque pudiera parecer lo contrario).

Según la definición anterior, el producto de una transformación por su inversa es igual a la transformación idéntica. En efecto, al pasar de P a P′ por **T** y luego de P′ a P por la inversa $\mathbf{T}^{-1}$, el resultado es otra vez el elemento P de partida, o sea, $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}$ = identidad. Por la misma razón es también $\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}$ = identidad.

NOTAS Y EJEMPLOS: 1. Representemos por E a la transformacion idéntica. Como ella no modifica nada es $\mathbf{TE} = \mathbf{ET} = \mathbf{T}$ cualquiera que sea la transformación **T**. De aquí se deduce que si el producto de dos transformaciones es la identidad, una de ellas es la inversa de la otra. En efecto, si $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{E}$, multiplicando ambos miembros por $\mathbf{T}_2^{-1}$ resulta $\mathbf{T}_1 = \mathbf{E}\mathbf{T}_2^{-1}$, de donde, $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2^{-1}$.

2. La inversa de un producto $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ es igual a $\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{T}_2^{-1}$, es decir, al producto en orden cambiado de las inversas. En efecto, según la proposición de la nota anterior, bastará demostrar que el producto de las dos es la identidad, o sea, que se verifica $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{T}_2^{-1} = \mathbf{E}$, lo cual es evidente, pues $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1\mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{T}_2^{-1} = \mathbf{T}_2\mathbf{E}\mathbf{T}_2^{-1} = \mathbf{T}_2\mathbf{T}_2^{-1} = \mathbf{E}$. Simbólicamente, esta regla se indica

$$(\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1)^{-1} = \mathbf{T}_1^{-1}\mathbf{T}_2^{-1}.$$

2. **Grupos de transformaciones.** — Consideremos un conjunto de transformaciones, finito o infinito, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$, . . ., que indicaremos abreviadamente por $\mathbf{T}_i$. Este conjunto de transformaciones se dice que forma un *grupo*, cuando se cumplen las dos siguientes condiciones:

a) El producto de dos transformaciones cualesquiera del conjunto pertenece también al conjunto.

b) La inversa de toda transformación del conjunto pertenece al conjunto.

Consecuencia de estas dos condiciones es que todo grupo contiene la transformación idéntica. En efecto, de una transformación cualquiera, por *b*) la inversa pertenece al conjunto y por *a*) el producto de las dos, que es la identidad, también pertenece al conjunto.

EJEMPLOS: 1. El conjunto de todas las transformaciones de la forma $x' = x + a$, $y' = y + b$, donde a, b son números reales cualesquiera, forma un grupo. En efecto, el producto de dos de ellas, sean $(x' = x + a_1, y' = y + b_1)$ y $(x' = x + a_2, y' = y + b_2)$, es la transformación $x'' = x + (a_1 + a_2)$, $y'' = y + (b_1 + b_2)$ que pertenece al conjunto. Además, la

transformación inversa de la $x' = x + a$, $y' = y + b$, es la $x' = x - a$, $y' = y - b$, que también pertenece al conjunto.

2. Las n transformaciones

$$x' = x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta \quad , \quad y' = x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta$$

para $\theta = 0, \pi/n, 2\pi/n, 3\pi/n, \ldots, (n-1)\pi/n$ *forman un grupo.* Compruébese que se cumplen las condiciones a), b).

3. Las transformaciones $x' = x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta$, $y' = y$, para los mismos valores de θ anteriores, no forman grupo. Compruébese que no se satisfacen las condiciones a), b).

4. Las transformaciones $x' = ax$, $y' = by$, para a, b valores reales cualesquiera, distintos de cero, forman grupo. Las mismas transformaciones, pero únicamente para valores enteros de a, b no forman grupo, por no cumplirse b).

3. **Traslaciones.** — DEFINICIÓN 1. Se llama *traslación*, en el plano, a la transformación que a cada punto P le hace corresponder el punto P′ tal que el segmento orientado o vector PP′ tiene siempre una longitud y una orientación constantes.

A la longitud o módulo del vector PP′ se le llama *amplitud* de la traslación.

Una traslación queda determinada dando el punto O′(a, b) transformado del origen O. En efecto, si P′(x', y') es el transformado de un punto general P(x, y), según la definición deberá ser $x' - x = a$, $y' - y = b$ y por tanto las ecuaciones de la traslación son

$$[1] \qquad x' = x + a \quad , \quad y' = y + b .$$

Si representamos por **T** a esta traslación, podremos escribir P′ = **T**P. Las constantes a, b son los parámetros de la traslación; para cada par de valores de los mismos se tiene una traslación particular. Para los valores $-a$, $-b$ se tiene la traslación inversa $\mathbf{T}^{-1}$. Para los valores $a = 0$, $b = 0$ se tiene la identidad o traslación idéntica.

Si $\mathbf{T}_1 (x' = x + a_1, \ y' = y + b_1)$ y $\mathbf{T}_2 (x' = x + a_2, \ y' = y + b_2)$ son dos traslaciones, su producto es la transformación $\mathbf{T}_2\mathbf{T}_1$ definida por las ecuaciones

$$x' = x + a_1 + a_2 \quad , \quad y' = y + b_1 + b_2$$

que por ser del mismo tipo [1] resulta también una traslación. Por consiguiente, según nº 2,

El conjunto de todas las traslaciones forma un grupo.

4. **Rotaciones.** — Sea A(a, b) un punto fijo del plano. Girando alrededor de A un ángulo φ constante, a cada punto P(x, y) le corresponderá un punto P′(x', y') tal que AP = AP′ y áng. PAP′ = φ.

DEF. 2. La correspondencia entre P y P′ definida de esta manera, se llama una *rotación* de centro A y ángulo φ.

El ángulo φ puede ser positivo o negativo; en el primer caso la rotación se hace en el sentido contrario al de las agujas de un reloj y se llama *directa*; en el segundo se hace en el mismo sentido de las agujas de un reloj y se llama *inversa*.

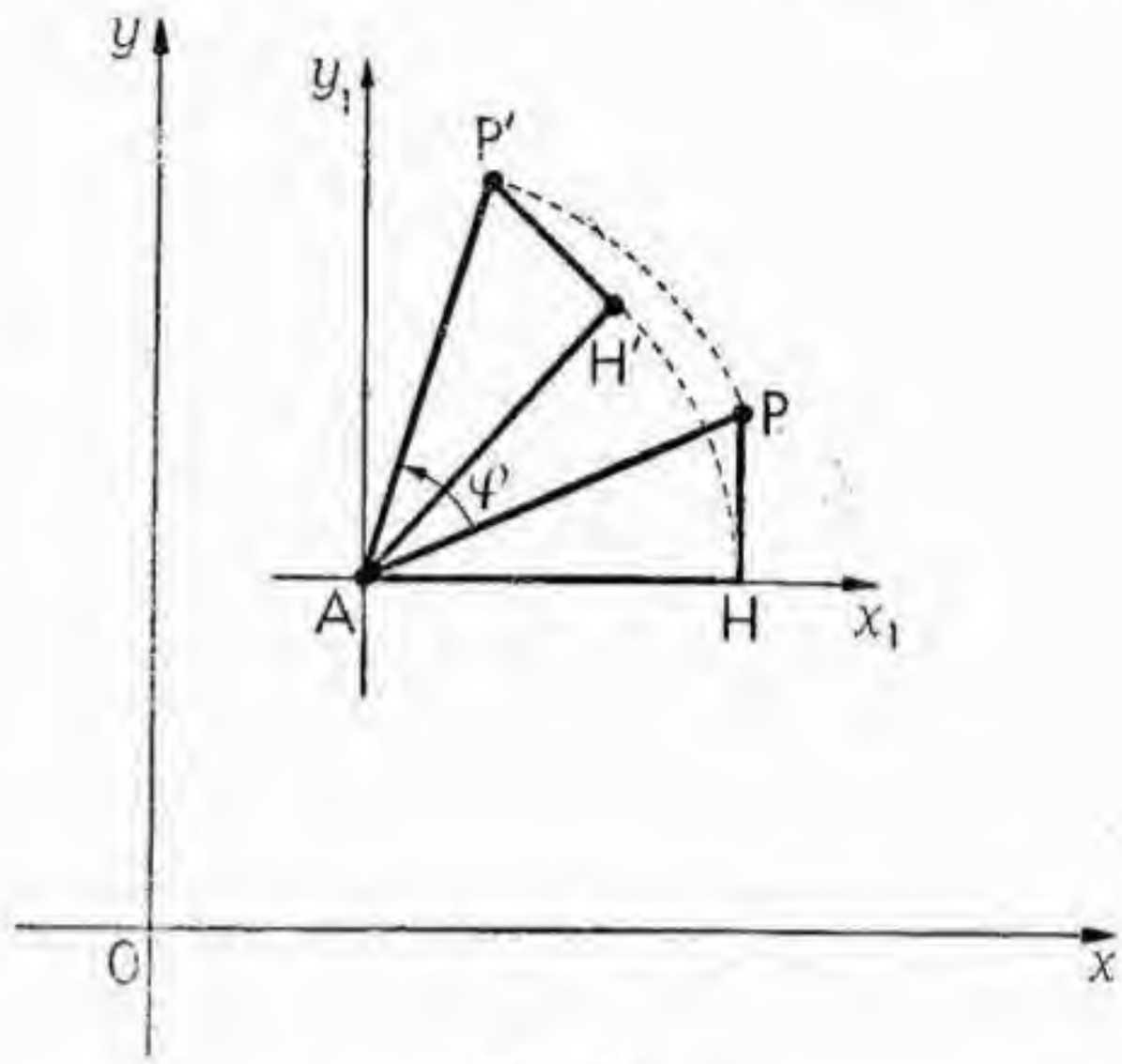

Fig. 114.

Las ecuaciones de la rotación se obtendrán expresando x', y' en función de x, y, y de las constantes a, b, φ que la determinan. Para ello observemos que si primero trasladamos los ejes, paralelamente, de manera que el origen pase a ser el punto A, las nuevas coordenadas de P serán (fig. 114)

$$[2] \qquad x_1 = \mathrm{AH} = x - a \quad , \quad y_1 = \mathrm{PH} = y - b .$$

Si luego se gira AP de un ángulo φ alrededor de A hasta la posición AP', las coordenadas de P' en el sistema trasladado x_1, y_1 serán (como se ve, girando todo el triángulo APH y proyectando la poligonal AH'P' sobre los ejes x_1, y_1),

$$x'_1 = x_1 \cos\varphi - y_1 \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad y'_1 = x_1 \operatorname{sen}\varphi + y_1 \cos\varphi$$

y por tanto, volviendo nuevamente al sistema de coordenadas primitivo, para lo cual hay que tener en cuenta [2] y que $x' = x'_1 + a$, $y' = y'_1 + b$, resulta que las ecuaciones de la rotación definida por los parámetros a, b, φ (o sea, la rotación de centro $\mathrm{A}(a, b)$ y ángulo φ) son

$$[3] \qquad \begin{aligned} x' &= (x - a)\cos\varphi - (y - b)\operatorname{sen}\varphi + a \\ y' &= (x - a)\operatorname{sen}\varphi + (y - \mathrm{b})\cos\varphi + b \end{aligned}$$

Dados dos segmentos iguales y no paralelos PQ, P'Q' existe siempre una rotación única que lleva el primero sobre el segundo. En efecto, basta considerar el punto de encuentro A de las mediatrices de los dos segmentos PP', QQ'. Los triángulos PAQ y P'AQ' son iguales por tener sus tres lados iguales, y por tanto se pueden superponer girando alrededor de A un ángulo φ = áng. PAP' = áng. QAQ' (fig. 115). Esto nos dice que

Una rotación queda determinada dando dos pares de pun-

tos homólogos P, P′ *y* Q, Q′ *tales que los segmentos* PQ *y* P′Q′ *sean iguales pero no paralelos.*

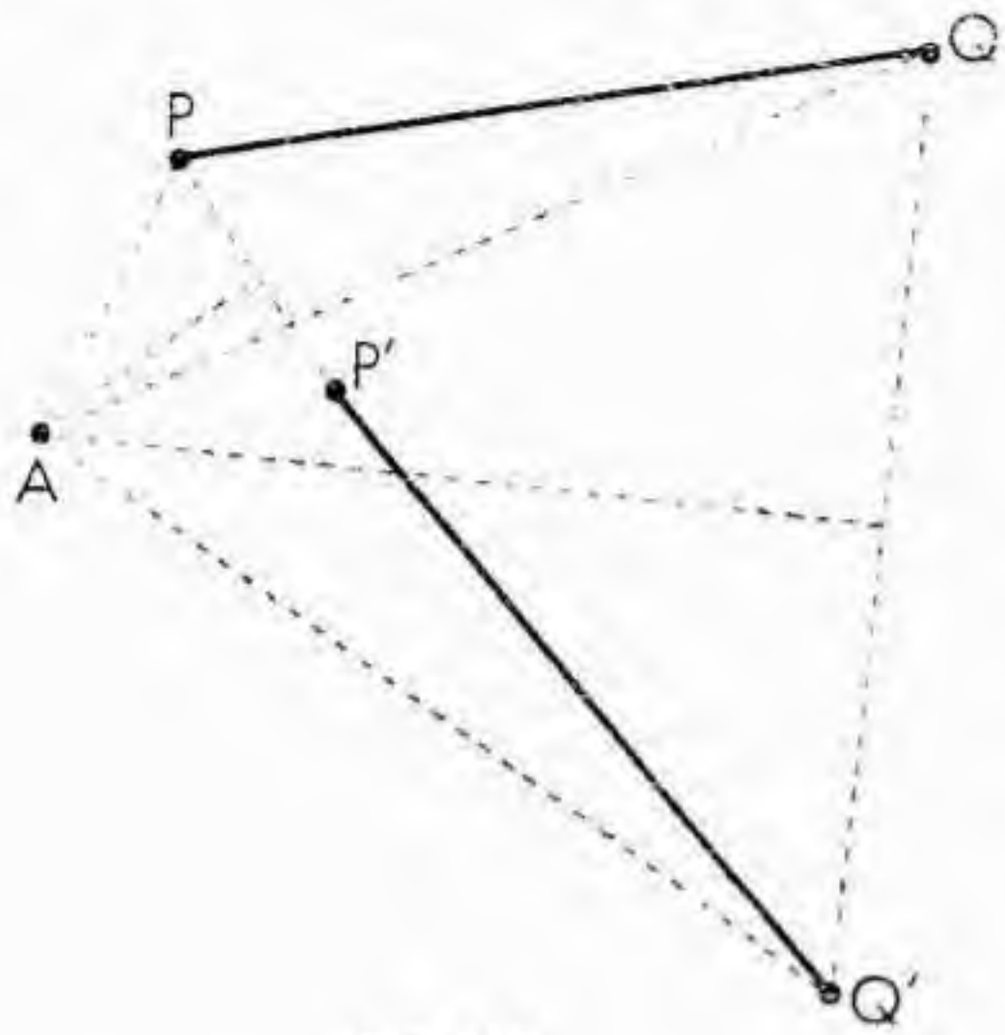

Fig. 115.

Si dichos segmentos son iguales y paralelos, en la construcción anterior se ve que el punto A resulta en el infinito y no existe tal rotación; en este caso los segmentos pueden llevarse a coincidir por una traslación. De aquí que a veces convenga considerar a las traslaciones como rotaciones de centro impropio.

5. **Condiciones para que una transformación lineal sea una rotación.** — Es interesante resolver el problema siguiente. Dadas las ecuaciones de una transformación entre los puntos del plano que sean de la forma

$$[4] \qquad x' = Ax + By + C \quad , \quad y' = Px + Qy + R$$

con A, B, C, P, Q, R constantes dadas, ¿cuándo ellas representarán una traslación o una rotación?

Para que representen una traslación, según [1], la condición necesaria y suficiente es que sean $A = 1$, $B = 0$, $P = 0$, $Q = 1$. Entonces la traslación que representan es la que lleva el origen al punto de coordenadas C, R.

Para que representen una rotación, las ecuaciones [4] deben poder escribirse en la forma [3] para valores convenientes de a, b, φ y por tanto debe ser, en primer lugar,

$$[5] \qquad A = Q \quad , \quad B = -P \quad , \quad A^2 + B^2 = 1.$$

Si estas condiciones se cumplen, el ángulo de rotación φ está determinado por cualquiera de las condiciones $A = \cos\varphi$, $B = -\operatorname{sen}\varphi$. Además, igualando los términos independientes de [4] y [3], teniendo en cuenta las últimas relaciones entre $\operatorname{sen}\varphi$, $\cos\varphi$ y A, B, resultan las ecuaciones

$$[6] \qquad C = (1 - A)a - Bb \quad , \quad R = Ba + (1 - A)b.$$

Este sistema de ecuaciones permite encontrar las coordenadas a, b del centro de rotación, siempre y cuando el determinante del sistema sea distinto de cero, o sea $(1 - A)^2 + B^2 = 2(1 - A) \neq 0$, es decir, $A \neq 1$. Por tanto:

La condición necesaria y suficiente para que las ecuaciones [4] *representen una rotación es que se cumplan las relaciones* [5] *y sea* $A \neq 1$.

Si se cumplen las relaciones [5], pero es $A = 1$, resulta $Q = 1$, $B = 0$, $P = 0$ y la transformación se reduce a $x' = x + C$, $y' = y + R$, que es una traslación.

EJEMPLO. La transformación definida por las ecuaciones

$$x' = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\, y - 1 \quad , \quad y' = -\frac{\sqrt{3}}{2}\, x + \tfrac{1}{2} y + 5$$

es una rotación, pues se cumplen las condiciones [5]. El ángulo de giro vale 60°, por ser $\cos \varphi = \frac{1}{2}$. Las coordenadas del centro de rotación se obtendrán resolviendo el sistema [6] que en este caso se escribe

$$-1 = \tfrac{1}{2} a - \frac{\sqrt{3}}{2}\, b \quad , \quad 5 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a + \tfrac{1}{2} b$$

dando las soluciones $a = \frac{1}{2}(5\sqrt{3} - 1)$, $b = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{3})$.

6. **Productos de rotaciones y traslaciones.** — El resultado anterior permite establecer fácilmente los siguientes teoremas:

a) *El producto de una traslación por una rotación es otra rotación del mismo ángulo.*

En efecto, sea la traslación $\mathbf{T}(x' = x + m,\ y' = y + n)$ y la rotación **R** de centro $L(p, q)$ y ángulo α de ecuaciones (análogas a las [3]),

$$[7] \qquad \begin{aligned} x' &= (x - p)\cos\alpha - (y - q)\operatorname{sen}\alpha + p, \\ y' &= (x - p)\operatorname{sen}\alpha + (y - q)\cos\alpha + q. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de la transformación producto **RT**, o sea, el resultado de realizar una transformación después de otra, serán

$$[8] \qquad \begin{aligned} x' &= (x + m - p)\cos\alpha - (y + n - q)\operatorname{sen}\alpha + p \\ y' &= (x + m - p)\operatorname{sen}\alpha + (y + n - q)\cos\alpha + q \end{aligned}$$

Comparando con [4], vemos que es $A = \cos\alpha$, $B = -\operatorname{sen}\alpha$, $P = \operatorname{sen}\alpha$, $Q = \cos\alpha$ y por tanto se cumplen las condiciones [5]; además, el ángulo de giro es el mismo α de la rotación primitiva.

El centro $A(a, b)$ de la rotación producto se puede hallar analíticamente resolviendo el sistema [6] aplicado a este caso, pero es más simple encontrarlo por la siguiente construcción geométricas (fig. 116).

Supongamos que por la traslación dada **T** el centro de rotación L pase a L_1, o sea, $L_1 = \mathbf{T}L$. Sea $L_2 = \mathbf{T}^{-1} L$ el punto que por la traslación **T** pasa a L y sea $L' = \mathbf{R}L_1$ el resultado de aplicar a L_1 la rotación dada **R** de centro L y ángulo α.

Por el producto **RT**, el punto L_2 pasa a L (puesto que por

la traslación pasa a L y luego, por la rotación, no cambia), y el punto L pasa a L'. Por tanto el segmento L_2L pasa a LL' y el centro A de la rotación producto se hallará, según la construcción ya mencionada (nº 4), como intersección de las mediatrices de los segmentos L_2L y LL'.

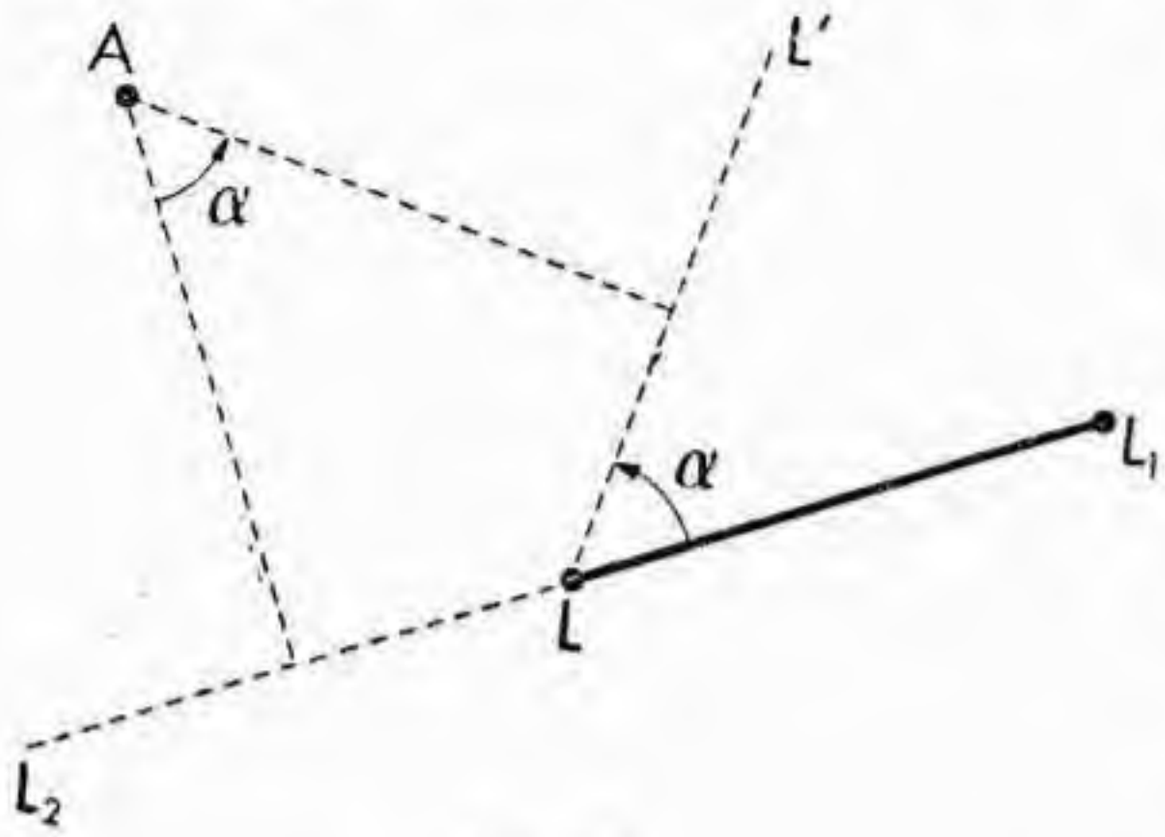

Fig. 116.

b) El producto de dos rotaciones es una rotación cuyo ángulo es igual a la suma algebraica de los ángulos de rotación de los factores. Si las dos rotaciones son del mismo ángulo y sentidos opuestos, el producto es una traslación.

Sea la rotación $\mathbf{R}_1$ de centro $L_1(p_1, q_1)$ y ángulo α_1 y la rotación $\mathbf{R}_2$ de centro $L_2(p_2, q_2)$ y ángulo α_2. Sus ecuaciones serán análogas a las [7] con sólo poner los subíndices respectivos a los parámetros p, q, α. Por tanto, el producto tendrá por ecuaciones

$$x' = [(x - p_1)\cos\alpha_1 - (y - q_1)\operatorname{sen}\alpha_1 + p_1 - p_2]\cos\alpha_2 - [(x - p_1)\operatorname{sen}\alpha_1 + (y - q_1)\cos\alpha_1 + q_1 - q_2]\operatorname{sen}\alpha_2 + p_2$$

[9]

$$y' = [(x - p_1)\cos\alpha_1 - (y - q_1)\operatorname{sen}\alpha_1 + p_1 - p_2]\operatorname{sen}\alpha_2 + [(x - p_1)\operatorname{sen}\alpha_1 + (y - q_1)\cos\alpha_1 + q_1 - q_2]\cos\alpha_2 + q_2$$

o sea

$$x' = x\cos(\alpha_1 + \alpha_2) - y\operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2) + C$$
$$y' = x\operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2) + y\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + R$$

siendo C, R los términos independientes de x, y en [9]. Como estas ecuaciones son del tipo [3], con $\varphi = \alpha_1 + \alpha_2$ queda demostrada la primera parte del teorema. Si $\alpha_2 = -\alpha_1$, las ecuaciones últimas quedan $x' = x + C$, $y' = y + R$ que representan una traslación, con lo cual queda demostrada la segunda parte.

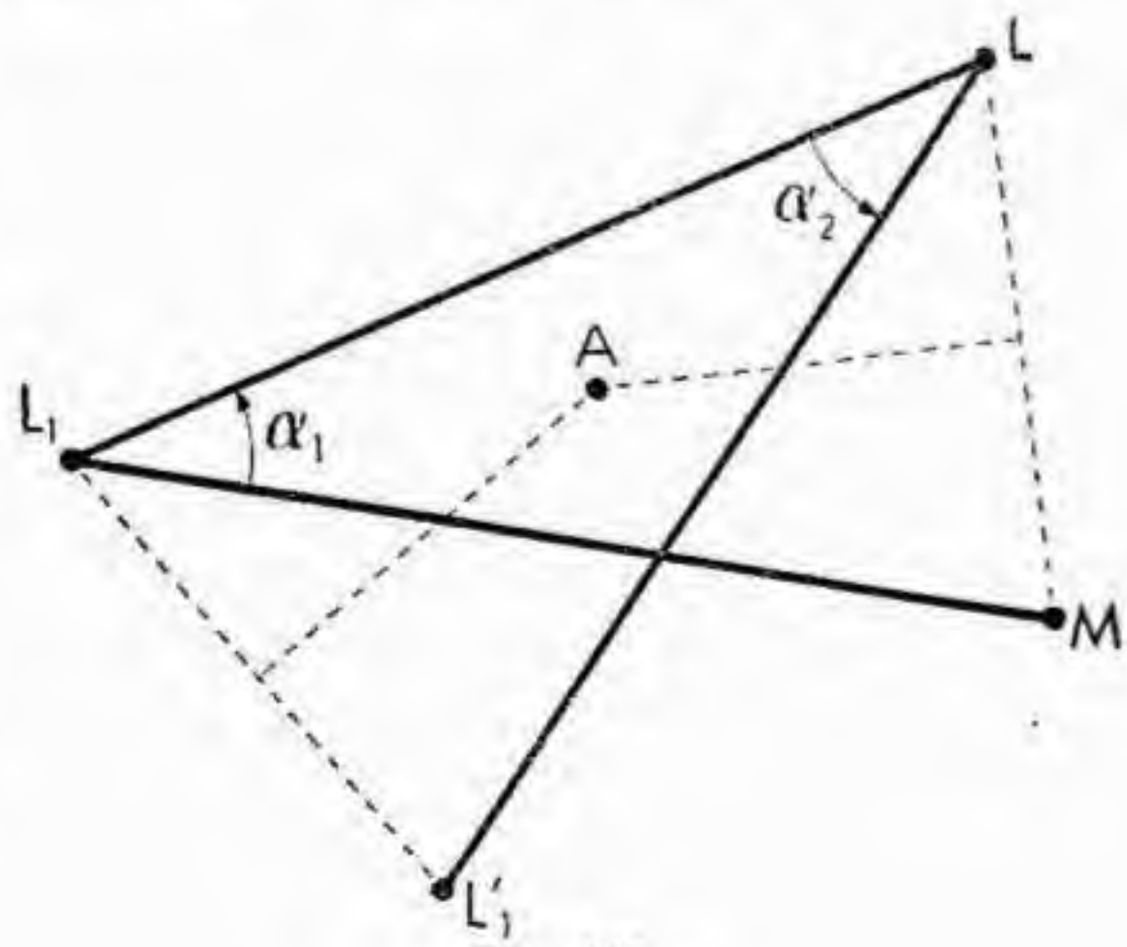

Fig. 117.

El centro de la rota-

ción producto puede hallarse fácilmente por la siguiente construcción geométrica (fig. 117).

Sea $M = R_1^{-1} L_2$, o sea, M es el punto que girado por la rotación R_1 de centro L_1 nos da el punto L_2. Sea además $L'_1 = R_2 L_1$ el punto que resulta al girar L_1 por la rotación R_2 de centro L_2 y ángulo α_2. Por la rotación producto R_2R_1 el punto L_1 pasa a L'_1 (puesto que por R_1 no cambia y por R_2 pasa a L'_1) y el punto M pasa a L_2, puesto que por R_2 este último punto no cambia. Por tanto, por R_2R_1 el segmento L_1M pasa a ser el segmento L'_1L_2. El centro buscado de la rotación producto será el punto A donde se encuentran las mediatrices de los segmentos $L_1L'_1$ y ML_2.

Observemos que si α_1, α_2 son iguales y de sentidos opuestos, los segmentos L_1M y L'_1L_2 resultan paralelos y por tanto la rotación producto es una traslación, de acuerdo al enunciado.

EJERCICIOS: 1. Demostrar que el producto de dos traslaciones es conmutativo.

2. Comprobar analítica y gráficamente que el producto de una traslación por una rotación no es en general conmutativo.

3. Análogamente, comprobar que el producto de dos rotaciones tampoco es en general conmutativo.

4. Demostrar: *a*) El conjunto de todas las rotaciones alrededor de un punto fijo, forma un grupo; *b*) El conjunto de todas las rotaciones del plano, no forma grupo; *c*) El conjunto de todas las rotaciones, más las traslaciones, forma grupo.

7. **Simetría respecto de un punto.** — DEF. 3. Dado un punto fijo $A(a, b)$, se llama simetría respecto del mismo, a la transformación que a todo punto $P(x, y)$ le hace corresponder el punto $P'(x', y')$ situado sobre la recta AP y tal que la distancia P'A sea igual a la AP.

La simetría respecto de un punto A equivale, por tanto, a una rotación de 180° alrededor de A. Por consiguiente, sus ecuaciones se obtendrán poniendo en [3] $\varphi = 180°$, resultando

$$[10] \qquad x' = 2a - x \quad , \quad y' = 2b - y$$

ecuaciones que también resultan inmediatamente de la definición.

Una simetría respecto del origen de coordenadas estará dada por las ecuaciones $x' = -x$, $y' = -y$. Por consiguiente: *para que una curva sea simétrica respecto del origen de coordenadas, o sea, se superponga sobre sí misma por una tal simetría, es necesario y suficiente que su ecuación no cambie por la sustitución* $x' = -x$, $y' = -y$.

Aplicando los teoremas del número anterior al caso $\varphi = 180°$, resulta

a) *El producto de una traslación por una simetría respecto de un punto, es otra simetría respecto de un punto.*

b) *El producto de dos simetrías, cada una respecto de un punto, es una traslación. En efecto, se puede considerar que la primera simetría es una rotación de 180° y la segunda otra rotación de —180°.*

8. **Simetrías respecto de un eje.** — DEF. 4. Dada una recta r, se llama simetría respecto de la misma, a la transformación que a cada punto P le hace corresponder el punto P′ tal que la recta r resulta ser la perpendicular en el punto medio del segmento PP′ (fig. 118).

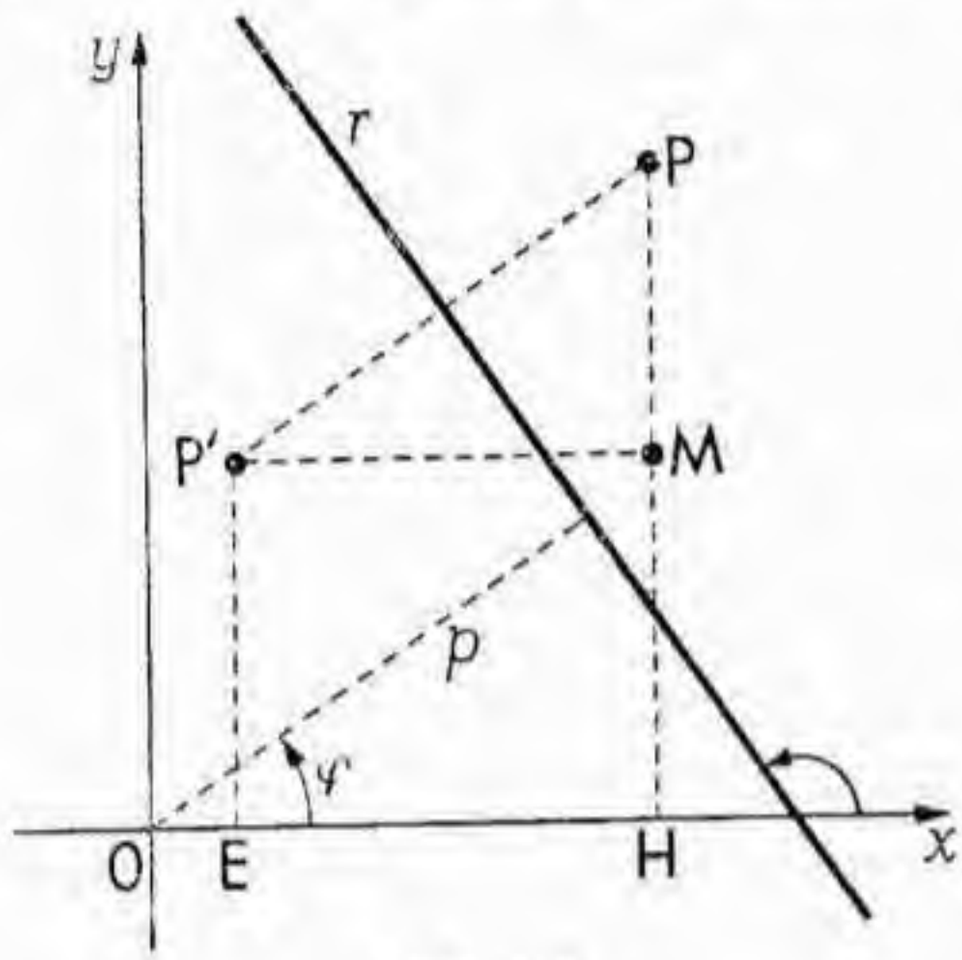

Fig. 118.

La recta r se llama *eje de simetría.*

Supuesta dada la recta r por su ecuación normal (§ 10-3), la distancia a la misma del punto $P(x, y)$ vale $x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi - p$ y por tanto la distancia PP′ será el doble de esta expresión. En consecuencia, las coordenadas del punto transformado P′ serán

$$x' = x - \mathrm{EH} = x - 2(x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi - p) \cos \varphi$$
$$y' = y - \mathrm{PM} = y - 2(x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi - p) \operatorname{sen} \varphi .$$

Éstas son las ecuaciones de una simetría respecto de la recta r; el parámetro p es la distancia de r al origen y el ángulo φ es el que forma la normal a r con el eje x.

Ordenando términos y recordando que $2 \cos^2 \varphi - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \varphi = \cos 2 \varphi$, $2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi = \operatorname{sen} 2 \varphi$, las ecuaciones generales de una simetría respecto de un eje resultan

$$[11] \qquad \begin{aligned} x' &= - x \cos 2 \varphi - y \operatorname{sen} 2 \varphi + 2 p \cos \varphi \\ y' &= - x \operatorname{sen} 2 \varphi + y \cos 2 \varphi + 2 p \operatorname{sen} \varphi . \end{aligned}$$

Para ver en qué casos una transformación lineal general de la forma [4] representa una simetría respecto de un eje, bastará igualar los coeficientes homólogos en [4] y [11], resultando que, en primer lugar, deberá ser

$$[12] \qquad A = - Q \quad , \quad B = P \quad , \quad A^2 + B^2 = 1 .$$

Si estas condiciones se cumplen, el ángulo φ estará determinado por ser $A = - Q = - \cos 2 \varphi$. Además, se debe cumplir

$$C = 2 p \cos \varphi \quad , \quad R = 2 p \operatorname{sen} \varphi .$$

Para que estas condiciones sean compatibles debe ser $C/\cos\varphi = R/\operatorname{sen}\varphi$, o bien, teniendo en cuenta que $A = -\cos 2\varphi$,

$$[14] \qquad \frac{C^2}{1-A} = \frac{R^2}{1+A}.$$

Si estas condiciones se cumplen, cualquiera de las ecuaciones [13] permite calcular p, con lo cual queda determinado el eje de simetría y por tanto la simetría. En consecuencia

Para que las ecuaciones [4] *representen una simetría respecto de un eje, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones* [12] *y* [14].

Casos particulares. a) Si el eje de simetría es el eje x, en las ecuaciones generales [11] hay que poner $p = 0$, $\varphi = \pi/2$, con lo cual queda $x' = x$, $y' = -y$. Análogamente, si el eje de simetría es el eje y, sus ecuaciones son $x' = -x$, $y' = y$, como, por otra parte, es evidente que así debe ser por consideraciones geométricas.

b) Si el eje de simetría es la bisectriz del primer cuadrante, o sea la recta $y = x$, en [11] hay que poner $p = 0$, $\varphi = (3/4)\pi$, con lo cual queda $x' = y$, $y' = x$.

Si el eje de simetría es la bisectriz del segundo cuadrante, o sea la recta $y = -x$, es $p = 0$, $\varphi = \pi/4$, quedando $x' = -y$, $y' = -x$. Por tanto se puede enunciar

Las condiciones necesarias y suficientes para que una curva tenga por eje de simetría: a) el eje x; *b) el eje* y; *c) la bisectriz del primer cuadrante; d) la bisectriz del segundo cuadrante, son, respectivamente, que sus ecuaciones no cambien por las sustituciones: a)* $x' = x$, $y' = -y$; *b)* $x' = -x$, $y' = y$; *c)* $x' = y$, $y' = x$; *d)* $x' = -y$, $y' = -x$.

EJERCICIOS: 1. Probar que la curva $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 - 3 = 0$ tiene por eje de simetría la bisectriz del primer cuadrante.

2. Hallar las ecuaciones de una simetría respecto de la recta $x = a$. Análogamente respecto de la recta $y = o$.

3. Hallar las ecuaciones de una simetría respecto de la recta $y = ax$.

9. **Producto de simetrías.** — Queremos estudiar el producto de dos simetrías respecto de dos ejes distintos r_1, r_2. Supongamos primero que estos ejes no sean paralelos y sea α el ángulo que forman entre sí. Para simplificar los cálculos podemos tomar unos ejes coordenados tales que el eje x sea la recta r_1 y el origen de coordenadas sea su punto de intersección con r_2. Entonces, para la simetría respecto de r_1 las fórmulas de transformación son, simplemente,

$$[15] \qquad x_1 = x \quad , \quad y_1 = -y.$$

Las ecuaciones de la segunda simetría serán las [11] con $p = 0$ y $\varphi = \pi/2 + \alpha$. Por tanto, las ecuaciones de la transformación producto seran

$$[16] \qquad \begin{aligned} x' &= x \cos 2\alpha - y \operatorname{sen} 2\alpha \\ y' &= x \operatorname{sen} 2\alpha + y \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Esta transformación producto resulta de la forma [3] con $a = b = 0$, $\varphi = 2\alpha$. Por tanto: *el producto de dos simetrías respecto de dos rectas equivale a una rotación alrededor de su punto de intersección, cuyo ángulo de giro es igual al doble del ángulo entre las dos rectas.*

Si los ejes de las dos simetrías son paralelos, tomando siempre uno de ellos como eje x, las ecuaciones de la simetría correspondiente serán las [15]. Si los dos ejes están a una distancia p, las ecuaciones de la segunda simetría serán $x' = x_1$, $y' = 2p - y_1$. Por tanto, la transformación producto es

$$x' = x \quad , \quad y' = y + 2p$$

o sea, comparando con [1]

El producto de dos simetrías de ejes paralelos es una traslación de dirección normal a los ejes y de amplitud igual al doble de la distancia entre los mismos.

10. **Producto de una simetría por una traslación paralela al eje.** — Son interesantes las transformaciones que se obtienen por la aplicación sucesiva de una simetría respecto de un eje y una traslación paralela al mismo. Estas transformaciones se llaman, a veces, *antitraslaciones*.

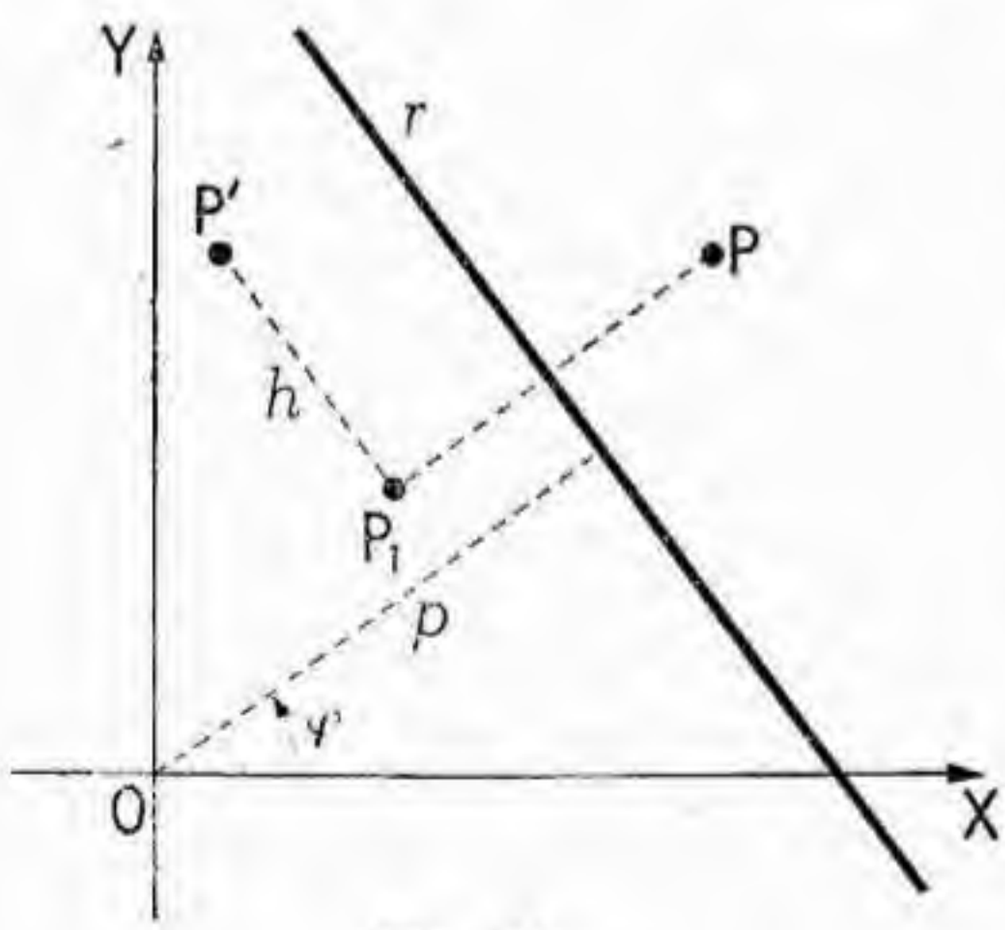

Fig. 119.

Supongamos que el eje sea la recta perpendicular a la dirección φ, distante del origen la distancia p. El ángulo de este eje con el eje x será de $90° + \varphi$ y por tanto si h es la amplitud de la translación (fig. 119), sus ecuaciones serán

$$x' = x_1 - h \operatorname{sen} \varphi \quad , \quad y' = y_1 + h \cos \varphi .$$

Por tanto, si después de la simetría [11] se realiza la traslación anterior, las ecuaciones de la transformación resultante serán

$$[17] \quad \begin{aligned} x' &= -x\cos 2\varphi - y \operatorname{sen} 2\varphi + 2p\cos\varphi - h\operatorname{sen}\varphi \\ y' &= -x\operatorname{sen} 2\varphi + y\cos 2\varphi + 2p\operatorname{sen}\varphi + h\cos\varphi. \end{aligned}$$

Para que una transformación lineal [4] sea una transformación de este tipo, deberán cumplirse las condiciones [12]. Las restantes condiciones [13] son ahora

$$C = 2p\cos\varphi - h\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad R = 2p\operatorname{sen}\varphi + h\cos\varphi$$

sistema que, dado φ, permite siempre encontrar las incógnitas p, h. Por tanto

Para que una transformación lineal del tipo [4] *represente el producto de una simetría respecto de un eje por una traslación paralela al mismo, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones* [12].

EJERCICIOS: 1. Comprobar analíticamente que el producto de una simetría respecto de un eje por una traslación paralela al mismo, es conmutativo.

2. Hallar las ecuaciones de una simetría respecto del eje x, seguida de una traslación de amplitud a paralela al mismo.

3. Hallar las ecuaciones de la transformación producto de una simetría respecto del origen de coordenadas, por una traslación de amplitud a paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

4. Hallar las ecuaciones de una rotación de 60° alrededor del punto (1, 1).

11. **Congruencias.** — DEF. 4. Se llama congruencia a toda transformación representada por ecuaciones de la forma

$$[18] \qquad x' = Ax + By + C \quad , \quad y' = Px + Qy + R$$

que tenga la propiedad de conservar las longitudes de los segmentos.

Es decir, si M_1, M_2 son dos puntos cualesquiera y M'_1, M'_2 son sus transformados, el segmento M_1M_2 debe tener la misma longitud que el segmento transformado $M'_1M'_2$.

Queremos ver las condiciones que deben cumplir los coeficientes de las ecuaciones [18] para que esto ocurra. Escribiendo que la longitud del segmento que une $M_1(x_1, y_1)$ con $M_2(x_2, y_2)$ es igual a la del segmento que une $M'_1(x'_1, y'_1)$ con $M'_2(x'_2, y'_2)$, se tiene

$$(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

o sea, sustituyendo en el primer miembro los valores dados por las ecuaciones [18], resulta

$$\begin{aligned} [A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2)]^2 + [P(x_1 - x_2) + Q(x_1 - y_2)]^2 &= \\ = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \end{aligned}$$

y si esta igualdad debe verificarse cualquiera que sea el par de puntos M_1, M_2, o sea, cualesquiera que sean los valores x_1,

y_1, x_2, y_2, los coeficientes de estas variables en ambos miembros deben ser iguales, resultando las condiciones

$$[19] \qquad A^2 + P^2 = 1 \quad , \quad B^2 + Q^2 = 1 \quad , \quad AB + PQ = 0.$$

Por tanto

Las condiciones necesarias y suficientes para que las ecuaciones [18] *representen una congruencia, es que se cumplan las condiciones* [19].

Multiplicando la primera ecuación [19] por B^2, la segunda por P^2 y restando miembro a miembro, teniendo en cuenta que de la tercera se deduce $AB = -PQ$ y por tanto $A^2B^2 = P^2Q^2$, resulta

$$P^2 - B^2 = 0$$

y por tanto $P = \pm B$. Pueden ocurrir tres casos:

a) $P = -B \neq 0$. En este caso la última ecuación [19], dividiendo por P, da la condición $A = Q$. Según el nº 5, por cumplirse las condiciones [5], la congruencia será una rotación si $A \neq 1$, o una traslación si $A = 1$.

b) $P = B \neq 0$. La última ecuación [19] da $A = -Q$. Por tanto, según nº 10, la congruencia es una simetría respecto de un eje seguida de una traslación paralela al mismo eje (traslación que puede ser de amplitud nula y reducirse por tanto la congruencia a una sola simetría).

c) $P = B = 0$. En este caso las ecuaciones [19] dan $A = \pm 1$, $Q = \pm 1$. Si A y Q son de mismo signo, se cumplen las condiciones [5] y la congruencia es una rotación. Si son de sentido contrario, se cumplen las condiciones [12], y se trata de una simetría respecto de un eje seguida de traslación.

Observemos finalmente que en el caso en que la congruencia es una rotación o una traslación, el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ P & Q \end{vmatrix}$$

de la transformación [18], debido a las condiciones [19] vale $+1$ y en los casos en que la congruencia es una simetría seguida de traslación vale -1. Se tiene por tanto

Toda congruencia es siempre o bien una traslación, o bien una rotación, o bien una simetría respecto de un eje seguida de una traslación paralela al mismo. En los dos primeros casos el determinante Δ *vale* $+1$ *y en el tercero* -1.

NOTA. Las congruencias de determinante $\Delta = +1$, se llaman *acordes*, y aquellas con $\Delta = -1$, *discordes*. En las primeras, dos figuras homólogas pueden llevarse a superponer por una traslación o por una rotación del plano sobre sí mismo. En cambio, en las segundas, dos figuras homólogas sólo pueden superponerse a traves de una simetría respecto

de un eje y por tanto, si se quiere mover una figura hasta superponerla con su homóloga por un movimiento continuo, es necesario salir del plano. Por ejemplo, los triángulos simétricos $M_1M_2M_3$ y $M'_1M'_2M_3'$ de la figura 120 son congruentes, pero no es posible superponer uno sobre otro por un movimiento dentro del plano.

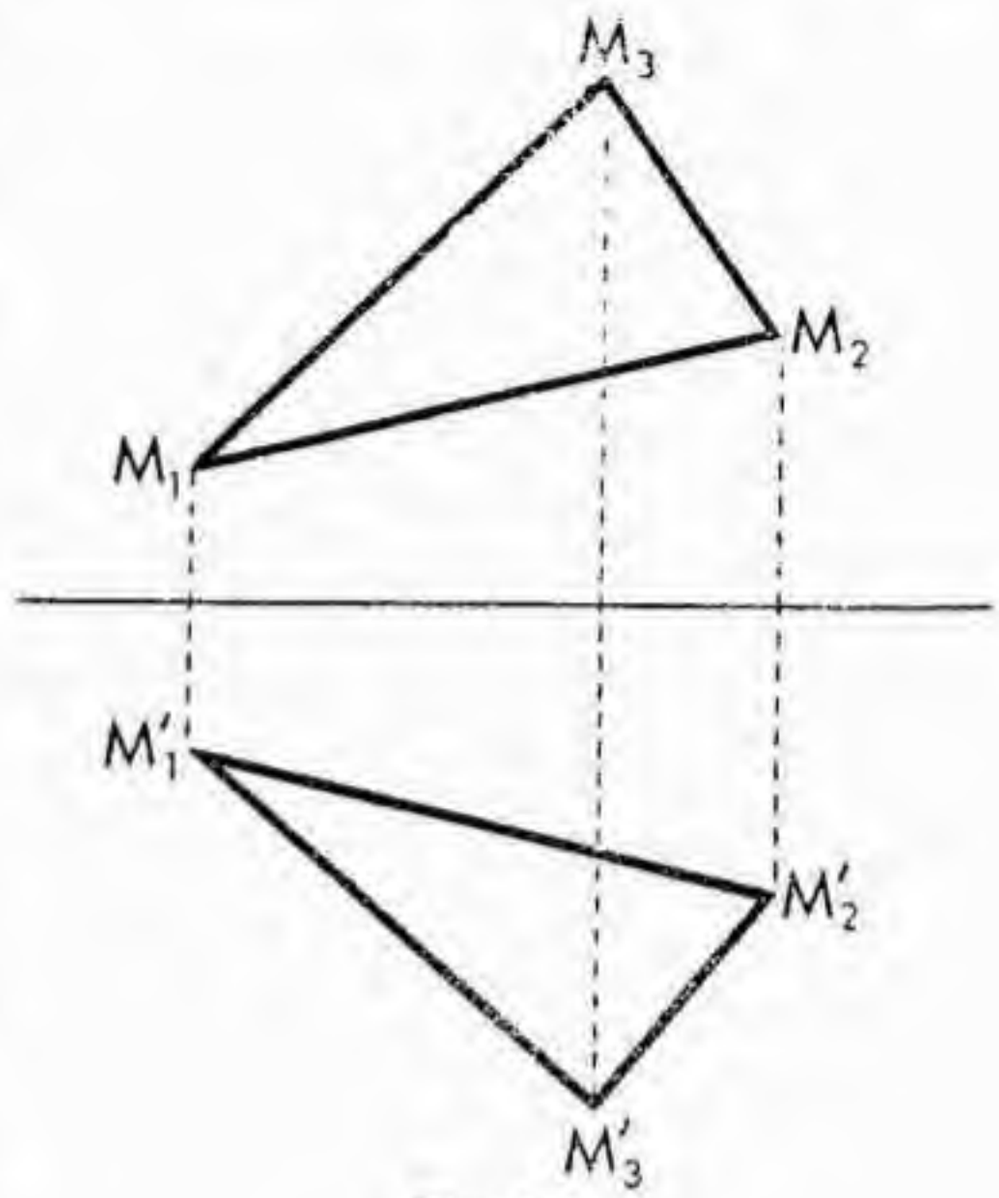

Fig. 120.

EJERCICIOS: 1. Probar: *a*) El producto de dos congruencias acordes es una congruencia acorde; *b*) El producto de una congruencia acorde por otra discorde, es una congruencia discorde; *c*) El producto de dos congruencias discordes, es una congruencia acorde.

2. Probar que el conjunto de todas las congruencias forma un grupo.

3. Probar que el conjunto de todas las congruencias acordes forma un grupo, pero el conjunto de todas las congruencias discordes no forma grupo.

§ 30. TRANSFORMACIONES LINEALES. AFINIDAD

1. **Homotecias.** — DEFINICIÓN 1. Dado un punto fijo L y una constante h, se llama homotecia de centro L y razón h a la transformación que a todo punto $P(x, y)$ hace corresponder el $P'(x', y')$ situado sobre la recta LP y tal que

$$[1] \qquad \frac{LP'}{LP} = h.$$

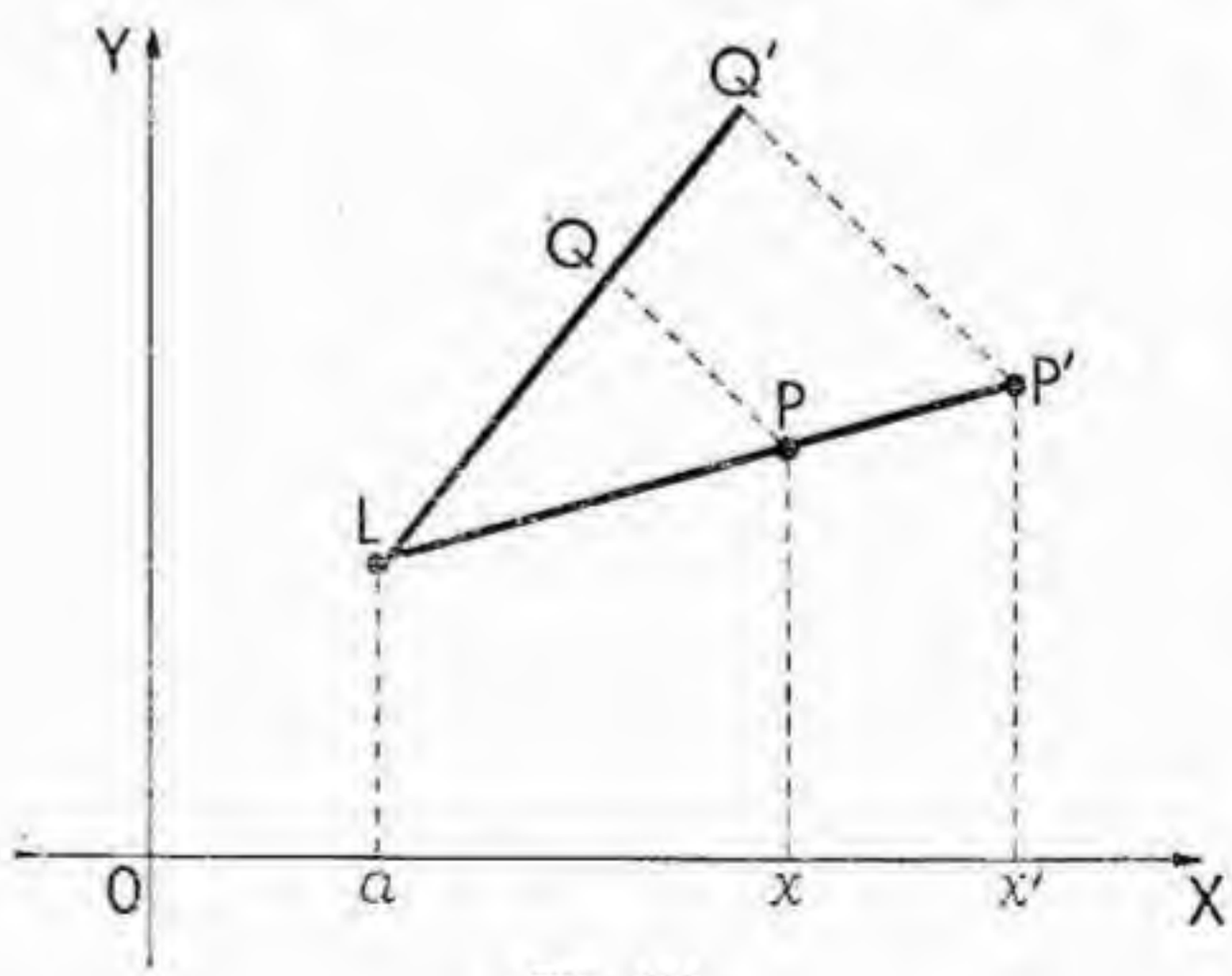

Fig. 121.

Si $h > 0$, se toma LP' del mismo sentido que LP y la homotecia se llama *directa*; si $h < 0$ el segmento LP' se toma en sentido opuesto al LP y la homotecia se llama *inversa*.

Si P, P' y Q, Q' son dos pares de puntos homólogos, será

$$\frac{LP'}{LP} = \frac{LQ'}{LQ} = \frac{P'Q'}{PQ} = h$$

y por tanto: *en una homotecia, los segmentos homólogos son paralelos y la razón entre sus longitudes es igual a la razón de homotecia.*

Si las coordenadas de L son a, b por semejanza de triángulos, se deduce (fig. 121)

$$\frac{x' - a}{x - a} = \frac{y' - b}{y - b} = \frac{\mathrm{LP}'}{\mathrm{LP}} = h$$

y por tanto las ecuaciones de una homotecia son

$$[2] \qquad x' = h(x - a) + a \quad , \quad y' = h(y - b) + b .$$

La relación [1] no puede aplicarse cuando P es el mismo punto L, pero entonces, para que las ecuaciones [2] sigan valiendo, se conviene en que el punto transformado del centro de homotecia sea el mismo punto.

Además, para $h = 1$, resulta $x' = x$, $y' = y$, o sea: *la homotecia de razón 1 es la identidad.*

La inversa de la transformación [2] es

$$x = (1/h)(x' - a) + a \quad , \quad y = (1/h)(y' - b) + b$$

que comparando con [2] nos dice: *la inversa de una homotecia es otra homotecia del mismo centro cuya razón es la inversa de la razón de la homotecia dada.*

Para que la transformación lineal

$$[3] \qquad x' = \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} \quad , \quad y' = \mathrm{P}x + \mathrm{Q}y + \mathrm{R}$$

represente una homotecia, comparando con [2] resulta que deberá ser

$$[4] \qquad \mathrm{B} = 0 \quad , \quad \mathrm{P} = 0 \quad , \quad \mathrm{A} = \mathrm{Q}.$$

El valor $\mathrm{A} = \mathrm{Q}$ será la razón de homotecia y las coordenadas del centro se obtendrán de las ecuaciones que resultan al igualar en [2] y [3] los términos independientes, o sea, poniendo $h = \mathrm{A}$,

$$[5] \qquad (1 - \mathrm{A})a = \mathrm{C} \quad , \quad (1 - \mathrm{A})b = \mathrm{R}.$$

Este sistema nos dará a, b, siempre y cuando sea $\mathrm{A} \neq 1$. Si $\mathrm{A} = 1$, cumpliéndose además [4], la transformación [3] es una traslación. En resumen

La condición necesaria y suficiente para que las ecuaciones [3] *representen una homotecia, es que se cumplan las relaciones* [4] *y sea* $\mathrm{A} \neq 1$. *Si se cumplen las relaciones* [4] *y es* $\mathrm{A} = 1$, *se tiene una traslación.*

EJEMPLO. Las ecuaciones

$$x' = 3x + 5 \quad , \quad y' = 3y - 2$$

representan una homotecia de razón 3, por cumplirse las condiciones [4]. Las coordenadas del centro de homotecia, soluciones del sistema [5], son $a = -5/2$, $b = 2/2 = 1$.

2. **Producto de homotecias.** — Queremos estudiar el producto de dos homotecas $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$. Para simplificar los cálculos podemos tomar el origen de coordenadas en el centro de la homotecia $\mathbf{H}_1$ con lo cual sus ecuaciones serán de la forma

$$x_1 = hx \quad , \quad y_1 = hy$$

como resulta al hacer en [2], $a = b = 0$.

Si tomamos además el eje x de manera que pase por el centro de la segunda homotecia, sus ecuaciones serán de la forma

$$x' = h_1x_1 + a_1(1 - h_1) \quad , \quad y' = h_1y_1$$

siendo h_1 su razón de homotecia y a_1 la abscisa de su centro.

La transformación producto $\mathbf{H}_2\mathbf{H}_1$ será

[6] $$x' = hh_1x + a_1(1 - h_1) \quad , \quad y' = hh_1y.$$

Comparando con [2] vemos que esta transformación es otra homotecia, de razón hh_1 y cuyo centro tiene por coordenadas (soluciones del sistema [5])

$$a = a_1 \frac{1 - hh_1}{1 - h_1} \quad , \quad b = 0$$

es decir, está también sobre el eje x. Tenemos por tanto el teorema:

El producto de dos homotecias es otra homotecia cuya razón es igual al producto de las razones y cuyo centro está alineado con los centros de las dos homotecias dadas.

Si las razones de homotecia son inversas una de otra, o sea, es $hh_1 = 1$, el producto pasa a ser una traslación paralela a la recta que une los centros de homotecia, como se ve inmediatamente por la forma que entonces toma la transformación producto [6].

EJERCICIO. Hallar la razón y el centro de homotecia del producto de la homotecia $(x' = 2x - 3, \quad y' = 2y + 2)$ por la homotecia $(x' = -3x - 1, \quad y' = -3y + 4)$.

3. **Circunferencias homotéticas.** — Para hallar la transformada de una circunferencia

[7] $$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

por una homotecia

[8] $$x' = hx + C \quad , \quad y' = hy + R$$

bastará sustituir x, y en función de x', y' en la ecuación [7]. Haciendo la sustitución y multiplicando ambos miembros por h^2 para quitar denominadores, resulta

$$[x' - (C + h\alpha)]^2 + [(y' - (R + h\beta)]^2 = r^2h^2$$

que es otra circunferencia cuyo radio r' y centro (α', β') están dados por las ecuaciones

[9] $$r'^2 = r^2h^2 \quad , \quad \alpha' = C + h\alpha \quad , \quad \beta' = R + h\beta.$$

Recíprocamente, dadas dos circunferencias cualesquiera, una de centro (α, β) y radio r y otra de centro (α', β') y radio r', las ecuaciones [9] permiten determinar dos razones de homotecia $h = \pm r'/r$ y para cada una de ellas los valores $C = \alpha' - h\alpha$, $R = \beta' - \beta h$, con los cuales las ecuaciones [5] dan las coordenadas de un centro de homotecia

$$a = \frac{\alpha' - h\alpha}{1 - h} \quad , \quad b = \frac{\beta' - h\beta}{1 - h}$$

Recordando (§ 3-3) vemos que el punto (a, b) está alineado con (α, β) y $(\alpha' \beta')$ y precisamente es el punto que divide al segmento determinado por estos últimos en la razón h. En resumen

Dadas dos circunferencias no concéntricas, existen dos homotecias que transforman una en otra. Las razones de estas homotecias son iguales a las razones entre los radios con signo positivo y negativo respectivamente, y los centros de homotecia son los puntos que dividen al segmento determinado por los centros de las circunferencias en la misma razón $\pm r'/r$.

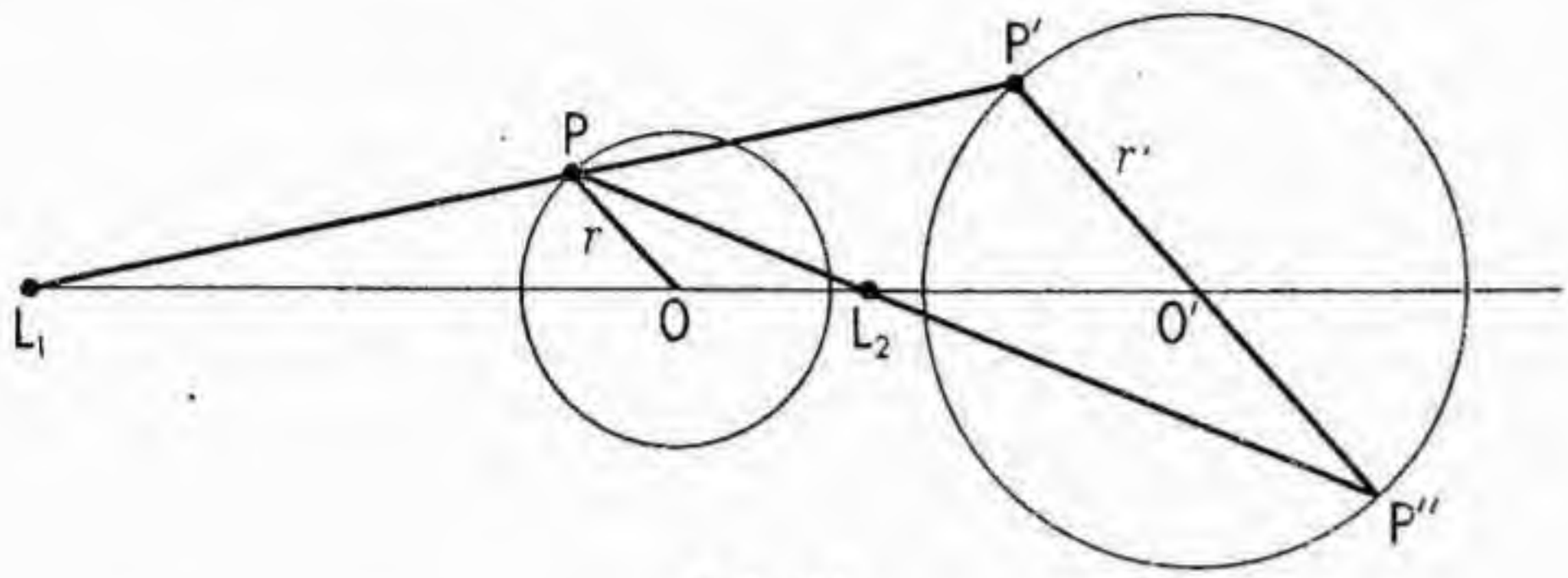

Fig. 122.

El centro correspondiente a la razón positiva, se llama *centro de homotecia directa*, y el otro, *centro de homotecia inversa*.

La construcción geométrica de los centros de homotecia es fácil (fig. 122). Basta tomar un radio cualquiera OP en una circunferencia y el diámetro P'P'' paralelo en la otra. Los centros de homotecia L_1, L_2 son los puntos en que las rectas PP' y PP'' cortan a la recta de los centros, puesto que en efecto éstos son los puntos que dividen al segmento OO' en las razones $L_1O'/L_1O = r'/r$, $L_2O'/L_2O = -r'/r$.

EJERCICIO. Tres circunferencias coplanarias con centros distintos y radios desiguales tienen dos a dos un centro de homotecia directa y un centro de homotecia inversa. Probar que los tres centros de homotecia directa pertenecen a una misma recta (*eje de homotecia directa*) y que cada dos centros de homotecia inversa están alineados con un centro de homotecia directa (formando tres *ejes de homotecia inversa*).

4. **Semejanzas.** — DEF. 2. Se llama semejanza a toda transformación de la forma

$$[10] \qquad x' = Ax + By + C \quad , \quad y' = Px + Qy + R$$

tal que la razón entre dos segmentos homólogos cualesquiera sea constante.

Es decir, dados dos puntos $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ y sus transformados $M'_1(x'_1, y'_1)$, $M'_2(x'_2, y'_2)$ se debe cumplir

$$[11] \qquad \frac{M'_1 M'_2}{M_1 M_2} = h.$$

La constante h, positiva o negativa, se llama *razón de semejanza*.

Conservándose constante la razón entre los segmentos, dos triángulos homólogos tendrán sus lados proporcionales y por tanto, según la geometría elemental, ellos tendrán los ángulos iguales. Lo mismo vale para los ángulos correspondientes de

dos figuras homólogas cualesquiera; es decir: *la semejanza es una transformación que conserva los ángulos.*

Sea **S** una semejanza de razón h; si se multiplica por una homotecia **H** de razón $1/h$ y centro cualquiera, los puntos M'_1, M'_2 pasarán a M''_1, M''_2 tales que

$$[12] \qquad \frac{M''_1 M''_2}{M'_1 M'_2} = \frac{1}{h}$$

y por tanto la relación entre los puntos primitivos M_1, M_2 y los M''_1, M''_2 de la transformación producto **HS**, será (multiplicando [11] y [12])

$$\frac{M''_1 M''_2}{M_1 M_2} = 1$$

que según (§ 29-11) es una congruencia **K**. Es decir **K** = **HS**. De aquí, multiplicando ambos miembros por $\mathbf{H}^{-1}$ resulta $\mathbf{S} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{K}$ y como $\mathbf{H}^{-1}$, inversa de una homotecia, es también una homotecia [1], resulta

Toda semejanza es igual al producto de una congruencia por una homotecia.

Sustituyendo en [11] las distancias M_1M_2 y $M'_1M'_2$ en función de las coordenadas de los extremos, elevando al cuadrado ambos miembros y quitando denominadores, se obtiene

$$(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 = h^2[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2].$$

Para que la transformación general [10] represente una semejanza, será necesario que esta condición se cumpla para cualquier par de puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) al sustituir en el primer miembro los valores [10]. Haciendo esta sustitución (análogamente al § 29-11) e igualando los coeficientes de los términos semejantes, resulta $A^2 + P^2 = h^2$, $B^2 + Q^2 = h^2$, $AB + PQ = 0$. Por tanto

Las condiciones necesarias y suficientes para que la transformación lineal [10] *represente una semejanza,* son

$$[13] \qquad A^2 + P^2 = B^2 + Q^2 \quad , \quad AB + PQ = 0.$$

En este caso, el cuadrado de la razón de semejanza vale $h^2 = A^2 + P^2 = B^2 + Q^2$.

EJERCICIOS: 1. Probar que el producto de dos semejanzas es otra semejanza cuya razón es igual al producto de las razones de ambas.

2. El triángulo de vértices (0, 0), (1, 0), (0, 1) y el de vértices (0, 0) (3, 3), (6, 0) son semejantes. Hallar las ecuaciones de la semejanza que lleva el primero a coincidir con el segundo.

3. Hallar las ecuaciones de la semejanza que tiene como pares de puntos homólogos A(—1, 0), A'(1, 3) y B(0, 1), B'(2, 1).

5. **Afinidades.** — Después de las transformaciones especiales que hemos estudiado en los números anteriores, pasemos a la transformación más general de la forma

$$[14] \qquad x' = Ax + By + C \quad , \quad y' = Px + Qy + R$$

donde a los coeficientes no se les exige otra condición que la de ser

$$[15] \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ P & Q \end{vmatrix} \neq 0$$

para que la correspondencia sea biunívoca, es decir, sea posible mediante [14] calcular x, y dados x', y'.

DEF. 3. Se llama afinidad en el plano, a toda transformación de la forma [14], con la condición [15].

El valor Δ se llama *constante de la afinidad.*

Obsérvese que todas las transformaciones anteriores (rotaciones, congruencias, homotecias, semejanzas) son casos particulares de la afinidad.

Las afinidades conservan el grado de las curvas algebraicas. Es decir, si $f(x', y') = 0$ es de grado n, su transformada $f(Ax + By + C,\ Px + Qy + R) = 0$, será también de grado n, puesto que el grado de un polinomio no cambia al sustituir las variables por otras ligadas a ellas por expresiones lineales, como son las [14]. En particular, las afinidades transforman rectas en rectas.

La propiedad fundamental de las afinidades es que ellas *conservan la razón simple de tres puntos alineados.*

En efecto, dados tres puntos $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, su razón simple es

$$(A_1A_2A_3) = \frac{A_1A_3}{A_2A_3} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}$$

o bien, por una propiedad elemental de las proporciones,

$$(A_1A_2A_3) = \frac{A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1)}{A(x_3 - x_2) + B(y_3 - y_2)}.$$

La razón simple de los puntos transformados vale, aplicando [14],

$$(A'_1A'_2A'_3) = \frac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2} = \frac{A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1)}{A(x_3 - x_2) + B(y_3 - y_2)} =$$
$$= (A_1A_2A_3),$$

lo cual demuestra el teorema.

Otra propiedad importante de las afinidades es la siguiente:

En toda afinidad, el cociente entre las áreas homólogas es igual a la constante de la afinidad.

En efecto, supongamos el triángulo formado por los tres puntos $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ y el triángulo formado por los puntos homólogos $M'_i(x'_i, y'_i)$. Escribiendo el área de este último en forma de determinante (§ 10-6), se tiene

$$T' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} Ax_1 + By_1 + C & Px_1 + Qy_1 + R & 1 \\ Ax_2 + By_2 + C & Px_2 + Qy_2 + R & 1 \\ Ax_3 + By_3 + C & Px_3 + Qy_3 + R & 1 \end{vmatrix}$$

Restando de la primera columna del segundo determinante, la última multiplicada por C, y de la segunda fila la última multiplicada por R, resulta

$$T' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} Ax_1 + By_1 & Px_1 + Qy_1 & 1 \\ Ax_2 + By_2 & Px_2 + Qy_2 & 1 \\ Ax_3 + By_3 & Px_3 + Qy_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} A & B & 0 \\ P & Q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \Delta T$$

donde T es el área del triángulo $M_1M_2M_3$. Queda así probado el teorema para triángulos. Para una figura poligonal, basta descomponerla en triángulos y entonces si $T_1, T_2, \ldots, T_n$ son las áreas de estos triángulos y $T'_1, T'_2, \ldots, T'_n$ las áreas de los transformados, será

$$\Delta = \frac{T'_1}{T_1} = \frac{T'_2}{T_2} = \frac{T'_3}{T_3} = \ldots = \frac{T'_n}{T_n} =$$

$$= \frac{T'_1 + T'_2 + T'_3 + \ldots + T'_n}{T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n}$$

que prueba también el teorema en este caso.

Para figuras cualesquiera, basta aproximarlas por polígonos, y si la relación se cumple para cualquiera de éstos, se cumplirá también en el límite, quedando así probado el teorema en general.

Si $\Delta = 1$, las áreas no cambian por la afinidad, y se dice que se trata de una *equiafinidad* o de una *afinidad unimodular*.

La demostración del teorema anterior es más directa utilizando la fórmula del cambio de variables para integrales dobles. En efecto, si F es una figura cualquiera y F' es su transformada, el área de esta última es la integral de $dx'dy'$, o sea,

$$[16] \qquad \iint_{F'} dx'dy' - \iint_{F} \begin{vmatrix} A & B \\ P & Q \end{vmatrix} dxdy = \Delta \iint_{F} dxdy$$

puesto que el jacobiano de la transformación [14] es precisamente Δ. Como las integrales del primero y del último miembro de [16] son las áreas de F' y F respectivamente, queda demostrado el teorema.

EJERCICIOS: 1. Probar que el producto de dos afinidades es otra afinidad cuya constante es el producto de las constantes.

2. Probar que una afinidad queda determinada por 3 pares de puntos homólogos.

3. Hallar las ecuaciones de la afinidad que tiene como pares de puntos homólogos A(0, 0), A′(0, 3); B(1, 0), B′(—1, 2); C(—1, 1), C′(2, 8).

4. Probar que por una afinidad, la especie de una cónica no cambia, es decir, las elipses se transforman en elipses, las hipérbolas en hipérbolas y las parábolas en parábolas.

6. **Clasificación de las afinidades.** — Queremos hallar los puntos unidos de la afinidad [14], o sea, los puntos que son homólogos de sí mismos. Para ello bastará hacer $x = x'$, $y = y'$ y resolver el sistema de ecuaciones resultante, que es

$$[17] \qquad \begin{aligned} (A-1)x + By + C &= 0 \\ Px + (Q-1)y + R &= 0. \end{aligned}$$

Pueden ocurrir tres casos:

a) El determinante de los coeficientes es distinto de cero, o sea,

$$[18] \qquad \begin{vmatrix} A-1 & B \\ P & Q-1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

En este caso el sistema [17] tiene solución única y por tanto la afinidad tiene un solo punto unido. Se dice que es una *afinidad central.*

Si el determinante de los coeficientes es nulo, quiere decir que se cumple la proporción $(A-1)/P = B/(Q-1)$. Según que el valor de esta razón sea distinto o igual a la razón C/R se tienen los otros dos casos:

b) es

$$[19] \qquad \frac{A-1}{P} = \frac{B}{Q-1} \neq \frac{C}{R}$$

en cuyo caso el sistema [17] es incompatible y la afinidad carece de puntos unidos.

c) es

$$[20] \qquad \frac{A-1}{P} = \frac{B}{Q-1} = \frac{C}{R}$$

en cuyo caso el sistema [17] se reduce a una sola ecuación y la afinidad tiene una recta de puntos unidos llamada *eje de la afinidad.* Se dice entonces que se trata de una *afinidad homológica.*

EJEMPLOS: 1. La transformación $x' = x$, $y' = ay$ con $a \neq 1$, es una afinidad homológica, cuyo eje es el *eje* x.

2. La transformación $x' = 3x + y$, $y' = x + 2y$ es una afinidad central.

Propiedades de las afinidades centrales. Para estudiar una afinidad central es cómodo tomar como origen de coordenadas el punto unido de la misma. Entonces el sistema [17] debe tener las soluciones $x = 0$, $y = 0$, y por tanto debe ser $C = R = 0$. Las ecuaciones de la afinidad quedan de la forma

$$[21] \qquad x' = Ax + By \quad , \quad y' = Px + Qy.$$

Veamos cuál será la homóloga de la recta $y = mx$. Desdejando x, y de [21] y sustituyendo en la ecuación $y = mx$, resulta que la recta transformada es la $y' = m'x'$, con

$$[22] \qquad m' = \frac{P + mQ}{A + mB}.$$

Haciendo $m = m'$ resulta una ecuación de segundo grado para determinar las rectas homólogas de sí mismas o rectas unidas. Según que esta ecuación tenga 0, 1 ó 2 raíces reales, la afinidad central se llama elíptica, parabólica o hiperbólica.

Para que todas las rectas que pasan por el punto unido resulten también rectas unidas, es decir, sea $m' = m$, en [22] debe ser $A = Q$, $P = 0$, $B = 0$, y la afinidad resulta una homotecia.

Propiedades de las afinidades homológicas. Tomando el eje de afinidad como eje x, para comodidad de cálculo, las dos ecuaciones [17] deben reducirse a $y = 0$, y por tanto debe ser $A = 1$, $C = 0$, $P = 0$, $R = 0$. Con esto, las ecuaciones de la homología quedan

$$[23] \qquad x' = x + By, \quad , \quad y' = Qy.$$

De aquí

$$\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{Q - 1}{B}$$

lo cual nos dice que el coeficiente angular de las rectas que unen puntos homólogos es constante, o sea

En una afinidad homológica, las rectas que unen puntos homólogos son todas paralelas a una misma dirección, llamada dirección de la afinidad.

Si la dirección de la afinidad es ortogonal al eje, la afinidad se llama *ortogonal.* Si es paralela al eje, la afinidad se llama *especial.*

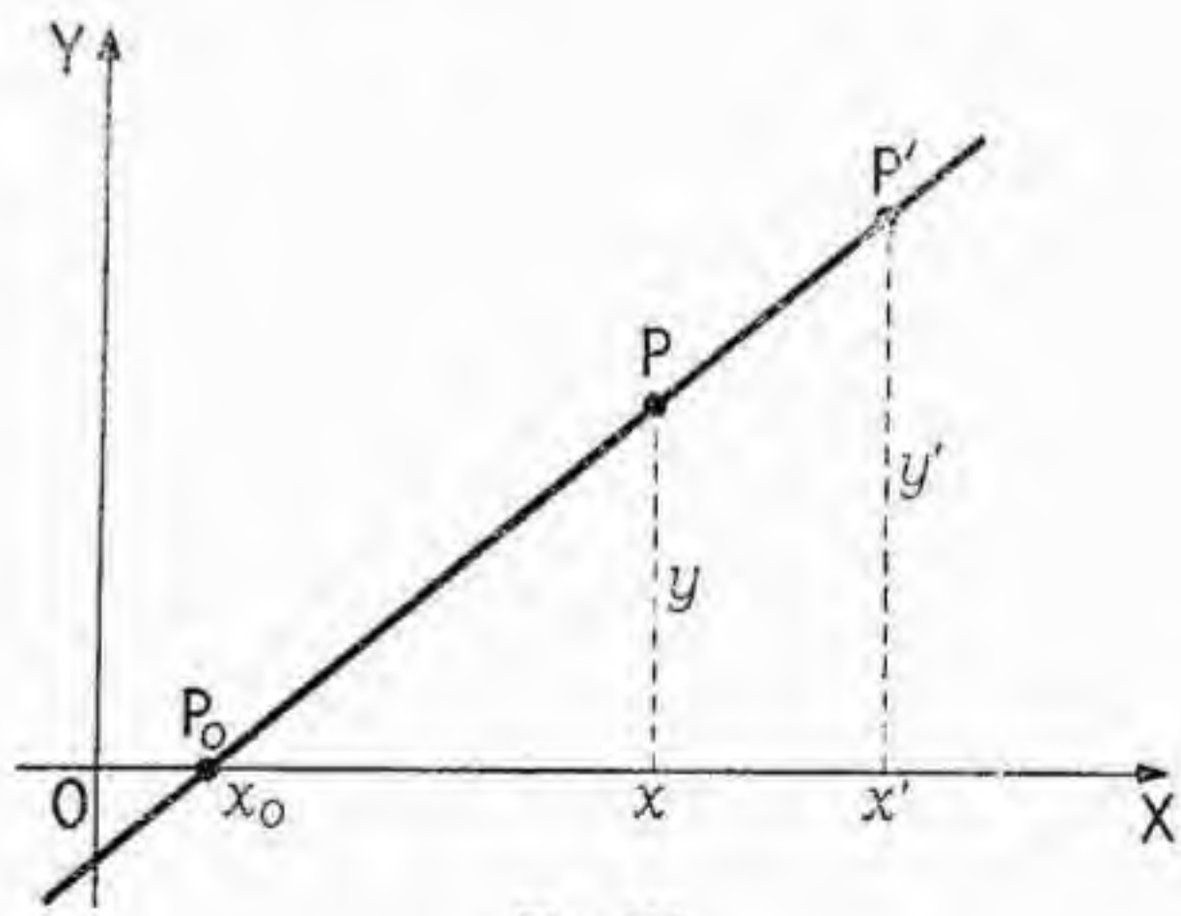

Fig. 123.

Sea P_0 el punto en que la recta PP' corta al eje de afinidad. De la fig. 123 y de [23] se deduce inmediatamente

$$\frac{P_0P'}{P_0P} = \frac{y'}{y} = Q$$

es decir

La razón simple P_0P'/P_0P *entre un par de puntos homólogos y el punto en que la recta que los une corta al eje de la afinidad, es constante.*

A esta constante se le llama *característica de la afinidad.*

EJERCICIOS: 1. Probar que toda afinidad central es igual al producto de dos afinidades homológicas de ejes incidentes.

2. Probar que toda afinidad central es el producto de una semejanza por una afinidad homológica.

3. Clasificar las siguientes afinidades:

a) $x' = x + y + 1 \quad , \quad y' = 3y + 2$

b) $x' = -x + 2y + 3 \quad , \quad y' = 2x - y - 3$

c) $x' = x + 2y - 1 \quad , \quad y' = 3x - y + 2$

d) $x' = 3x - 3y + 2 \quad , \quad y' = (4/3)x - y + 1$

7. **Colineaciones.** — En las afinidades o transformaciones dadas por las ecuaciones [14], siempre que x, y tengan valores finitos, los x', y' correspondientes resultan también finitos. Es decir, a los puntos propios, corresponden siempre puntos propios.

Una transformación más general es la representada por las ecuaciones

$$x' = \frac{Ax + By + C}{Mx + Ny + L} \quad , \quad y' = \frac{Px + Qy + R}{Mx + Ny + L}.$$

Una tal transformación se llama una *homografía* o *colineación*. Su estudio corresponde a la geometría proyectiva. En estas transformaciones, a los puntos de la recta $Mx + Ny + L = 0$ corresponden los puntos del infinito del plano.

§ 31. TRANSFORMACIONES LINEALES EN ESPACIOS UNIDIMENSIONALES

1. **Proyectividad entre espacios unidimensionales.** — Hasta ahora hemos hablado de transformaciones entre los puntos de dos planos, distintos o coincidentes. Es interesante considerar también transformaciones entre los elementos de dos espacios unidimensionales o formas de primera especie. Recordemos que por espacios unidimensionales entendemos: *a*) Los puntos de una recta; *b*) Las rectas de un haz; *c*) Los planos de un haz.

En estos espacios cada elemento está determinado por una sola coordenada: su abscisa x. Para el caso de la recta, x es la abscisa ordinaria; para un haz de rectas, x es la *abscisa tangencial*, o sea, la tangente del ángulo que forma cada recta del haz con otra tomada como recta origen; para un haz de planos, x es también la tangente del ángulo diedro formado por cada plano con un plano origen.

DEFINICIÓN 1. Se llama *proyectividad* entre dos espacios unidimensionales cuyos elementos estén determinados respectivamente por las abscisas x, x', a toda transformación de la forma

[1] $$x' = \frac{ax + b}{cx + d}$$

donde a, b, c, d son números reales cualesquiera, sujetos únicamente a la condición

[2] $$\Delta = ad - bc \neq 0.$$

El valor Δ se llama determinante de la proyectividad. La condición $\Delta \neq 0$ es indispensable para que la correspondencia sea biunívoca. En efecto, si fuera $\Delta = 0$ se verificaría $a/c = b/d$ y por tanto el segundo miembro de [1] tendría un valor constante cualquiera que fuese x, es decir, a todo elemento x correspondería el mismo elemento x'. Con la condición [2] quedan excluídas este tipo de correspondencias, llamadas a veces proyectividades "degeneradas".

La transformación inversa de la [1] es

$$x = \frac{dx' - b}{-cx' + a}$$

que es de la misma forma [1]. Además, el determinante de esta transformación inversa es el mismo de antes y por tanto es también distinto de cero. Por tanto:

a) *La inversa de una proyectividad es otra proyectividad.*

Otra propiedad importante es

b) *El producto de dos proyectividades es otra proyectividad.*

En efecto, sean las proyectividades

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d} \quad . \quad x'' = \frac{px' + q}{rx' + s}.$$

El producto de las mismas, sustituyendo en la segunda el valor x' de la primera y ordenando términos, resulta

$$x'' = \frac{(ra + sc)x + rb + sd}{(pa + qc)x + pb + qd}$$

que es del mismo tipo que la [1]. Sólo falta ver que se cumpla la condición [2]. El determinante de la transformación producto vale

$$(pa + qc)(rb + sd) - (pb + qd)(ra + sc) =$$
$$= (ad - bc)(ps - qr)$$

o sea, es igual al producto de los determinantes de los factores por consiguiente es distinto de cero y queda probado el enunciado.

Las dos propiedades anteriores prueban que: *el conjunto de todas las proyectividades forman un grupo.*

Como consideramos sólo elementos x *reales*, hemos supuesto que a, b, c, d también lo eran. Equivale a decir que consideramos únicamente proyectividades reales. Si se consideran también elementos imaginarios y por tanto las x pueden ser complejas, también se pueden tomar los coeficientes a, b, c, d números complejos y resultan entonces las *proyectividades complejas*, que no vamos a considerar.

2. Razón doble de cuatro elementos: propiedad fundamental de las transformaciones proyectivas. — DEF. 2. Dados cuatro elementos ordenados A, B, C, D de un espacio unidimensional, cuyas abscisas respectivas sean x_1, x_2, x_3, x_4, se llama *razón doble* entre los mismos a la expresión:

$$(\mathrm{ABCD}) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}.$$

Obsérvese que la razón doble depende del *orden* en que se consideran los elementos dados.

El teorema fundamental de las transformaciones proyectivas para espacios unidimensionales es el siguiente:

La razón doble de cuatro elementos se conserva por transformaciones proyectivas.

Es decir, cualquiera que sea la transformación proyectiva [1], el valor de la razón doble de cuatro elementos de abscisas x_1, x_2, x_3, x_4 es igual al de la razón doble de los elementos transformados de abscisas x'_1, x'_2, x'_3, x'_4.

En efecto, si A, B, C, D son los elementos y A′, B′, C′, D′ sus transformados, es

$$(\mathrm{A'}, \mathrm{B'}, \mathrm{C'}, \mathrm{D'}) = \frac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2} : \frac{x'_4 - x'_1}{x'_4 - x'_2}.$$

Veamos el valor que toma esta expresión al sustituir en ella

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Se tiene

$$x'_3 - x'_1 = \frac{ax_3 + b}{cx_3 + d} - \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} = \frac{(ad - bc)(x_3 - x_1)}{(cx_3 + d)(cx_1 + d)}$$

y calculando la expresión análoga $x'_3 - x'_2$, para lo cual basta sustituir el índice 1 por el 2, y dividiendo miembro a miembro, resulta

$$\frac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{cx_1 + d}{cx_2 + d}.$$

Sustituyendo en ambos miembros el índice 3 por el 4 y dividiendo miembro a miembro, resulta

$$\frac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2} : \frac{x'_4 - x'_1}{x'_4 - x'_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}$$

o sea $(A', B', C', D') = (A, B, C, D)$, como se quería demostrar.

Vale también el teorema recíproco:

Toda correspondencia entre los elementos de dos espacios unidimensionales que conserve los valores de las razones dobles, es una transformación proyectiva.

En efecto, sean a, b, c las abscisas de tres elementos distintos y a', b', c' las abscisas de sus transformados. Consideremos estos elementos como fijos y sea x un elemento cualquiera de la primera forma y x' su transformado. Por hipótesis se verifica

$$(abcx) = (a'b'c'x')$$

o sea

$$\frac{c - a}{c - b} : \frac{x - a}{x - b} = \frac{c' - a'}{c' - b'} : \frac{x' - a'}{x' - b'}.$$

De aquí, llamando

$$[(c - a)/(c - b)] : [(c' - a')/(c' - b')] = k,$$

queda

$$\frac{x - a}{x - b} = k\frac{x' - a'}{x' - b'}$$

de donde se puede despejar x', resultando de la forma

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

con

$$\alpha = b' - ka' \qquad \beta = kba' - ab'$$
$$\gamma = 1 - k \qquad \delta = kb - a$$

Como esta ley que relaciona x con x' es de la forma [1] y además se cumple

$$\alpha\delta - \beta\gamma = k(b - a)(b' - a') \neq 0$$

por haber supuesto que a, b, c así como a', b', c' eran puntos distintos, queda demostrado este recíproco.

EJERCICIOSS 1. Hallar la razón doble entre los cuatro puntos de abscisas —3, 0, 1, 2. Solución: $(4/1) : ((5/2) = 8/5$.

2. Hallar la razón doble entre las cuatro rectas que pasan por el origen y cuyas ecuaciones son $y = 0$, $y = x$, $y = 2x$, $y = -x$. Solución: Como las abscisas tangenciales de estas rectas son iguales a sus coeficientes, la solución es $(0, 1, 2, -1) = (2/1) : (-1/-2) = 4$.

3. Probar las relaciones

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

4. Poniendo $(ABCD) = k$, probar que es

$$(ABDC) = 1/k \quad , \quad (ACBD) = 1 - k.$$

5. Demostrar que si los pares A, B y C, D se separan armónicamente, es $(ABCD) = -1$.

3. **Ecuación de la proyectividad.** — La ecuación [1] que define la proyectividad puede escribirse

$$cxx' + dx' - ax - b = 0$$

con la condición [2]. De una manera general la ecuación anterior puede escribirse en la forma

$$\alpha xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0 \tag{3}$$

con la condición

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \tag{4}$$

Recíprocamente, toda ecuación del tipo [3] puede escribirse en la forma [1], y siendo la condición [4] equivalente entonces a la [2], resulta que si x y x' están ligadas por una ecuación del tipo [3] la correspondencia es una proyectividad. Por esto, la ecuación [3], con la condición [4], se llama *ecuación de una proyectividad.*

Para dar la ecuación de una proyectividad hace falta dar los cuatro coeficientes α, β, γ, δ, pero como ambos miembros de la ecuación [3] pueden multiplicarse o dividirse por un mismo número, resulta que estos coeficientes están determinados, salvo un factor de proporcionalidad, es decir, dividiendo por uno de ellos puede lograrse que uno de los cuatro valga la unidad, con lo cual quedan, en realidad, tres coeficientes independientes.

De aquí se deduce:

Una proyectividad entre espacios unidimensionales queda determinada dando tres pares de elementos homólogos.

En efecto, si éstos son x_1, x'_1; x_2, x'_2; x_3, x'_3, deberá verificarse

$$\begin{aligned} \alpha x_1 x'_1 + \beta x_1 + \gamma x'_1 + \delta &= 0 \\ \alpha x_2 x'_2 + \beta x_2 + \gamma x'_2 + \delta &= 0 \\ \alpha x_3 x'_3 + \beta x_3 + \gamma x'_3 + \delta &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Éste es un sistema de ecuaciones lineales homogéneas con las incógnitas α, β, γ, δ. Para resolverlo se puede dar a una cualquiera de ellas, por ejemplo γ, un valor arbitrario cualquiera y entonces resolver el sistema por cualquiera de los métodos elementales.

EJEMPLO. La proyectividad determinada por los cuatro elementos 0, 1; —1, 3; 2, —5, se obtiene resolviendo el sistema

$$\gamma + \delta = 0$$
$$-3\alpha - \beta + 3\gamma + \delta = 0$$
$$-10\alpha + 2\beta - 5\gamma + \delta = 0$$

y resulta ser, después de quitar denominadores.

$$-xx' + 19x + 8x' - 8 = 0.$$

4. **Elementos unidos de una proyectividad.** — Si se trata de una proyectividad entre formas superpuestas, se pueden pedir los elementos unidos (§ 30-6) de la misma. Para ello deberá ser $x = x'$ y por tanto estarán determinados por la ecuación

[6] $$\alpha x^2 + (\beta + \gamma)x + \delta = 0.$$

Supongamos primero que sea $\alpha \neq 0$. Entonces la ecuación anterior es de segundo grado y tendrá dos raíces, reales o imaginarias, distintas o confundidas. Según el caso, se tiene la siguiente clasificación de las proyectividades entre formas superpuestas:

a) Si es $(\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta > 0$

la ecuación tiene dos raíces reales y distintas; la proyectividad tiene dos elementos unidos y se llama *hiperbólica*.

b) Si es $(\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta = 0$

la ecuación tiene una sola raíz doble; la proyectividad tiene un solo elemento unido y se llama *parabólica*.

c) Si es $(\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta < 0$

la ecuación tiene dos raíces imaginarias conjugadas; la proyectividad carece de puntos unidos reales y se llama *elíptica*.

Consideremos ahora el caso $\alpha = 0$. En este caso la ecuación [6] resulta de primer grado y tiene, por tanto, una sola raíz. Pudiera creerse que se trata de una proyectividad parabólica, pero conviene analizar lo que en realidad ocurre, con más cuidado.

Hagamos el cambio de variables $x = 1/y$. La nueva ecuación en la variable y es

[7] $$\alpha + (\beta + \gamma)y + \delta y^2 = 0.$$

Si $\alpha = 0$, las soluciones de esta ecuación son $y = -(\beta + \gamma)/\delta$, $y = 0$, a las cuales corresponde, en la primitiva variable x, las soluciones $x = -\delta/(\beta + \gamma)$, $x = \infty$. Es decir, el hecho de ser $\alpha = 0$ significa que la proyectividad tiene el elemento de abscisa infinito como elemento unido. Si además es también $\beta + \gamma = 0$, resulta que la ecuación [7] tiene las dos raíces nulas y por tanto la primitiva [6] dos raíces infinitas.

En resumen: *si en la ecuación* [3] *es* $\alpha = 0$, $(\beta + \gamma) \neq 0$, *la proyectividad es hiperbólica con un elemento unido de abscisa infinito y el otro de abscisa* $x = -\delta/(\beta + \gamma)$. *Si es* $\alpha = 0$, $\beta + \gamma = 0$, *la proyectividad es parabólica, teniendo como único elemento unido el de abscisa infinito.*

5. **Puntos límites de una proyectividad entre puntos de dos rectas.** — En los haces de rectas o de planos, los elementos de abscisa ∞ no tienen ninguna particularidad sobre los demás: son simplemente los elementos perpendiculares al elemento tomado como origen.

En cambio sobre la recta, el punto del infinito, por lo menos en la geometría métrica en que el concepto de distancia es fundamental, se distingue claramente de los demás: *es el punto que está a distancia infinita de todos los demás.*

De aquí que en el estudio de la proyectividad entre rectas se suelen considerar como elementos importantes los puntos homólogos de los del infinito de cada recta: son los llamados *puntos límites* de la proyectividad.

Si la proyectividad está definida por la ecuación [3], para hallar el punto límite x'_1 correspondiente a $x = \infty$, basta observar que es

$$x' = -\frac{\beta + \delta/x}{\alpha + \gamma/x} \tag{8}$$

y por tanto, al hacer tender x a infinito resulta $x'_1 = -\beta/\alpha$. Éste es el punto límite sobre la recta de las x'.

Para hallar el punto límite sobre la recta de las x, se procede análogamente. De [3] se deduce

$$x = -\frac{\gamma + \delta/x'}{\alpha + \beta/x'} \tag{9}$$

y al hacer tender x' a infinito resulta $x_1 = -\gamma/\alpha$, que será la abscisa del punto límite buscado.

EJEMPLO. En la proyectividad $3xx' - 4x + x' - 2 = 0$ el punto límite sobre la recta x' es $x'_1 = 4/3$, y sobre la recta x es $x_1 = -1/3$.

6. **Involución.** — Supongamos una proyectividad o transformación proyectiva **T** entre dos espacios unidimensionales superpuestos. Sea $x' = \mathbf{T}x$. El elemento transformado del x' será el $x'' = \mathbf{T}x' = \mathbf{T}^2x$ el cual, en general, será distinto del x. Puede ocurrir, sin embargo, que sea $x'' \equiv x$; se dice entonces que el par de elementos x, x' se *corresponden doblemente.*

Veamos las condiciones que deben cumplirse para que ello ocurra. Sea

$$\alpha xx' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0 \tag{10}$$

la ecuación de la proyectividad dada **T**. Si x'_1 es el elemento correspondiente a x_1, deberá ser

$$\alpha x_1 x'_1 + \beta x_1 + \gamma x'_1 + \delta = 0$$

y si x_1 es el correspondiente, a su vez, del x'_1, deberá ser también

$$\alpha x_1 x'_1 + \beta x'_1 + \gamma x_1 + \delta = 0.$$

Restando miembro a miembro ambas igualdades resulta

$$(\beta - \gamma)(x_1 - x'_1) = 0.$$

Para que esta igualdad se cumpla debe ser, o bien $x_1 = x'_1$, o bien $\beta = \gamma$. El primer caso significa que $x_1 = x'_1$ es un punto unido de la proyectividad dada. Si $x_1 \neq x'_1$ debe ser $\beta = \gamma$ y la ecuación de la proyectividad puede escribirse

[11] $$\alpha x x' + \beta(x + x') + \delta = 0;$$

entonces no sólo el par x_1, x'_1 se corresponde doblemente, sino que cualquier otro par de elementos homólogos x, x' también. En efecto, por la simetría de la ecuación [11] respecto de x y x', si x' es el homólogo de x, también x es el homólogo de x'. Se tiene, por tanto, el resultado notable: En una proyectividad entre formas de primera especie superpuestas, basta que un par de elementos diferentes se correspondan doblemente para que todos los demás pares se correspondan también doblemente.

La proyectividad se llama entonces una *involución*. Es decir:

DEF. 2. *La involución es una proyectividad entre formas superpuestas en la cual todos los elementos se corresponden doblemente.*

La ecuación [11] es la ecuación general de una involución. Debe cumplirse, además, la condición [4] inherente a toda proyectividad, que en este caso se escribe

[12] $$\alpha\delta - \beta^2 \neq 0.$$

En una involución los elementos homólogos se llaman también elementos *conjugados*.

7. **Número de elementos que determinan una involución.** — De la forma de la ecuación [11] se deduce que

Una involución queda determinada por dos pares de elementos homólogos.

En efecto, si éstos son x_1, x'_1; x_2, x'_2, deberá verificarse

[13] $$\begin{aligned} \alpha x_1 x'_1 + \beta(x_1 + x'_1) + \delta &= 0 \\ \alpha x_2 x'_2 + \beta(x_2 + x'_2) + \delta &= 0 \end{aligned}$$

que es un sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas con las incógnitas α, β, δ. Dando a una de ellas, por ejemplo δ, un valor arbitrario, resulta un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que se resuelve por cualquiera de los métodos elementales clásicos.

Si se quiere escribir directamente la ecuación de la involución, basta observar que debiendo la ecuación [11] ser compa-

tible con las [13], el determinante de los coeficientes deberá ser nulo, o sea,

$$[14] \qquad \begin{vmatrix} xx' & x+x' & 1 \\ x_1x'_1 & x_1+x'_1 & 1 \\ x_2x'_2 & x_2+x'_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que es la ecuación de la involución determinada por los dos pares x_1, x'_1; x_2, x'_2 de elementos homólogos.

De aquí se deduce que si x, x' deben ser conjugados en la misma involución, deben satisfacer a la ecuación anterior y por tanto: *la condición necesaria y suficiente para que tres pares de elementos homólogos* x_i, x'_i $(i = 1, 2, 3)$ *pertenezcan a una misma involución, es que sea*

$$[15] \qquad \begin{vmatrix} x_1x'_1 & x_1+x'_1 & 1 \\ x_2x'_2 & x_2+x'_2 & 1 \\ x_3x'_3 & x_3+x'_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

EJERCICIOS: 1. La involución determinada por los dos pares $(0, -1)$; $(3, 2)$ es $xx' - (x + x') - 1 = 0$.

2. La condición necesaria y suficiente para que las raíces de tres ecuaciones de segundo grado $a_ix^2 + b_ix + c_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ formen tres pares de puntos en involución, es que sea

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

como se obtiene inmediatamente sustituyendo en [15] las sumas y productos de las raíces en función de los coeficientes de la ecuación respectiva.

8. **Elementos unidos de una involución.** — Si se trata de formas superpuestas, se pueden pedir los elementos homólogos de sí mismos, o sea aquellos para los cuales es $x = x'$. Haciendo $x = x'$ en la ecuación [11] resulta que ellos estarán dados por la ecuación

$$[16] \qquad \alpha x^2 + 2\beta x + \delta = 0.$$

Supongamos $\alpha \neq 0$. Caben dos casos posibles:

a) Si es

$$\beta^2 - \alpha\delta > 0$$

la ecuación tiene dos raíces reales y distintas. La involución tiene dos puntos unidos reales y se llama *hiperbólica*.

b) Si es

$$\beta^2 - \alpha\delta < 0$$

la ecuación tiene raíces imaginarias. La involución carece de puntos unidos reales y se llama *elíptica*.

Obsérvese que aquí no cabe el caso parabólico como en las proyectividades (nº 4), pues si fuera $\beta^2 - \alpha\delta = 0$, dejaría de cumplirse la condición [12] y la correspondencia entre x y x' ya no sería biunívoca. No existen, por tanto, involuciones parabólicas propiamente dichas.

Si en la ecuación de la involución es $\alpha = 0$, la ecuación [16] resulta de primer grado, pero por un razonamiento exactamente igual al del nº 4, se obtiene que ello significa que la proyectividad es hiperbólica, con un punto unido en el infinito y el otro $x = -\delta/2\beta$.

EJEMPLOS: 1. La involución $xx' + 5(x + x') + 9 = 0$ tiene por elementos unidos $x_1 = -9$, $x_2 = -1$ y es por tanto hiperbólica.

2. Obsérvese que los elementos unidos determinan la involución, puesto que dadas las raíces de [16] se conocen los coeficientes que permiten escribir la ecuación [11] de la involución. Así, si x_1, x_2 son los elementos unidos, la ecuación de la involución es

$$xx' - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)(x + x') + x_1x_2 = 0.$$

9. Propiedades métricas de la involución. — Consideremos el caso de la involución entre los puntos de una misma recta. Si su ecuación es

$$\alpha xx' + \beta(x + x') + \delta = 0$$

el punto conjugado del $x = \infty$ será

$$x' = -\beta/\alpha \tag{17}$$

que corresponde a lo que hemos llamado punto límite para el caso de una proyectividad (nº 5). En este caso no hay otro punto límite, pues al corresponderse los elementos doblemente, al punto de infinito corresponde siempre el mismo punto, tanto si se considera de la primera figura (sin tilde) o de la segunda (con tilde). También se deduce este hecho directamente del nº 5 al observar que ahora es $\beta = \gamma$. Al único punto límite [17] se le llama centro de la involución, o sea,

Centro de la involución es el punto conjugado del punto del infinito de la recta.

Si el punto del infinito es un punto unido, el centro coincidirá con el mismo. Entonces, según [17], debe ser $\alpha = 0$ y la ecuación de la involución puede escribirse

$$\tfrac{1}{2}(x + x') = c$$

siendo c una constante.

Como el primer miembro de esta igualdad no es otra cosa que la abscisa del punto medio del segmento determinado por x y x', el hecho de ser constante nos dice que *si el punto del infinito es un punto unido, la involución equivale a una simetría respecto de un punto fijo de la recta.*

Supongamos ahora que el centro de la involución sea propio, o sea, $\alpha = 0$. Tomándolo como origen de coordenadas, según [17] deberá ser $\beta = 0$, y la ecuación de la involución se reduce a $\alpha xx' + \delta = 0$, o sea

[18] $$xx' = k$$

que nos dice: *el producto de las distancias del centro de la involución a todo par de puntos homólogos es constante.*

La constante k se llama *potencia de la involución.*

Si k es positivo, la involución es hiperbólica y los puntos unidos son $x = +\sqrt{k}$, $x = -\sqrt{k}$, es decir: el punto central coincide con el punto medio del segmento determinado por los puntos unidos.

Además, recordando el teorema de § 3-5, *a*) la relación $xx' = k$ permite enunciar: *en una involución hiperbólica, los puntos unidos separan armónicamente a cualquier par de puntos conjugados.*

Si k es negativo la involución es elíptica, puesto que la ecuación $x^2 = -k$ no tiene raíces reales. En este caso los puntos homólogos están siempre a distinto lado del punto central.

10. **Construcción geométrica.** — La propiedad [18] permite dar un método cómodo para construir geométricamente una involución definida por dos pares de puntos conjugados.

Sean A, A'; B, B' los pares de puntos conjugados dados. Tracemos dos circunferencias cualesquiera que pasen por A, A' y BB' respectivamente y que se corten en dos puntos, por ejemplo E, H (fig. 124). Uniendo estos dos puntos, la intersección con la recta dada nos dará el centro O de la involución, puesto que por la propiedad de la potencia de un punto respecto de la circunferencia, es $OA.OA' = OB.OB' = OE.OH =$ constante $= k$, ó sea, tomando O como origen de coordenadas se cumple efectivamente $xx' = k$.

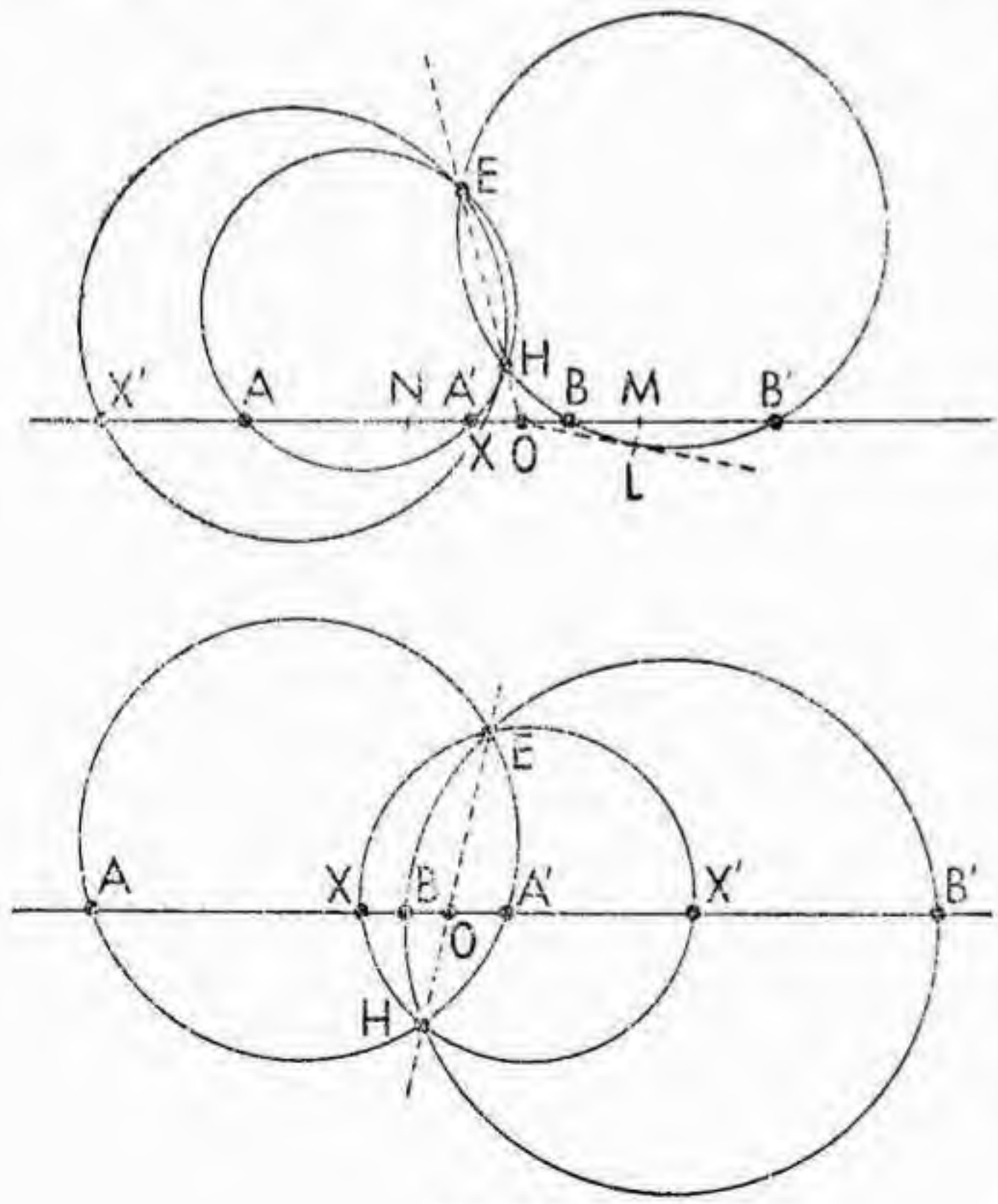

Fig. 124.

Si dado un punto X se quiere hallar el conjugado X', bas-

tará trazar la circunferencia que pase por X, E, H; su segunda intersección con la recta dada será el punto X′, puesto que es $OX.OX' = OE.OH = k$.

Los puntos unidos se obtendrán trazando por O una tangente a cualquiera de las circunferencias ya dibujadas, sea OL, y tomando luego este segmento a un lado y a otro de O, ó sea, $OM = ON = OL$. Los puntos M, N son unidos por ser $OM^2 = OL^2 = OE . OH = k$. Si O resulta interior a las circunferencias, no se pueden trazar las tangentes: ello indica que la involución es elíptica.

11. **La involución circular.** — Supongamos un haz de rectas y consideremos la correspondencia entre las rectas del mismo tal que a cada recta x hace corresponder la recta perpendicular x'. La condición que expresa que las rectas de abscisas x, x' son perpendiculares es

$$xx' = -1.$$

Ésta será, por tanto, la ecuación de la correspondencia establecida. Esta ecuación es de la forma [18], para el caso particular $k = -1$. Se trata por tanto de una involución y se llama la *involución rectangular*

Es una involución elíptica, cuyas rectas unidas son imaginarias y corresponden a las abscisas $x = +i$, $x = -i$. Estas rectas imaginarias son las *rectas isótropas* del haz.

Cortando la involución rectangular por la recta del infinito del plano, se obtiene como sección la llamada *involución circular*. Es una involución elíptica, cuyos puntos unidos imaginarios son las intersecciones de la recta del infinito con las rectas isótropas, es decir, los llamados *puntos cíclicos del plano*.

§ 32. TRANSFORMACIONES CUADRÁTICAS: LA INVERSIÓN

1. **La inversión.** — Sean dados un punto fijo O del plano y un número k.

DEFINICIÓN. Se llama inversión de centro O y potencia k a la transformación que a cada punto P del plano le hace corresponder el P′ situado sobre la recta OP y tal que

$$[1] \qquad OP . OP' = k.$$

Si k es positivo (inversión directa) el punto P′ se toma sobre la semirecta OP. Si k es negativo (inversión inversa) el punto P′ se toma sobre la semirecta opuesta a la OP.

Excepto el punto O que no tiene inverso, la relación [1] permite hallar P′ conocido P o bien hallar P conocido P′. Es decir: *la inversión es una correspondencia biunívoca con la única excepción del centro de inversión*. Los puntos P y P′ se llaman *conjugados*.

Los puntos unidos de la inversión serán los que cumplen la relación $OP^2 = k$, o sea, los de la circunferencia de centro O y radio $\sqrt{k}$, la cual es real si $k > 0$ e imaginaria si $k < 0$. En el primer caso dicha circunferencia se llama *circunferencia fundamental* de la inversión.

Para hallar la expresión analítica de una inversión, obser-

vemos que si las coordenadas de P son x, y y las de P′ son x', y' (tomando como centro O, origen de coordenadas, el punto P_0 de la figura 123, de pág. 297), por semejanza de triángulos es

$$[2] \qquad \frac{x}{OP} = \frac{x'}{OP'} \quad , \quad \frac{y}{OP} = \frac{y'}{OP'}$$

y además, según [1],

$$[3] \qquad \frac{OP'}{OP} = \frac{k}{OP^2} = \frac{k}{x^2 + y^2}.$$

De [2] y [3] se deduce

$$[4] \qquad x' = \frac{kx}{x^2 + y^2} \quad , \quad y' = \frac{ky}{x^2 + y^2}$$

que son las ecuaciones de una inversión de centro el origen de coordenadas y potencia k.

Puesto que de [1] se deduce también

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{k}{OP'^2} = \frac{k}{x'^2 + y'^2}$$

de [2] resulta

$$[5] \qquad x = \frac{kx'}{x'^2 + y'^2} \quad , \quad y = \frac{ky'}{x'^2 + y'^2}$$

que son las ecuaciones de la transformación inversa.

Se observa que estas ecuaciones de la transformación inversa son las mismas que las de la transformación directa [4], como era de esperar, puesto que la relación [1] es simétrica respecto de P y P′. Las transformaciones que coinciden con su inversa se dice que son involutorias. Se puede, por tanto, enunciar: *la inversión es una transformación involutoria.*

Por la inversión [4] ó [5] una recta $ax + by + c = 0$ se transforma en la curva

$$[6] \qquad k(ax' + by') + c(x'^2 + y'^2) = 0.$$

Si $c \neq 0$, esta ecuación es la de una circunferencia que pasa por el centro de inversión O. Si $c = 0$, es la misma recta de partida. En el primer caso, el centro de la circunferencia es el punto $(-ka/2c, -kb/2c)$ que pertenece a la recta $ay - bx = 0$, normal a la dada por O.

Recíprocamente, una circunferencia $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$, por la inversión [4] ó [5] se transforma en la curva

$$[7] \qquad k^2 - 2k(\alpha x' + \beta y') + \gamma(x'^2 + y'^2) = 0$$

que es otra circunferencia si $\gamma \neq 0$ y una recta si $\gamma = 0$. En el primer caso el centro de la circunferencia transformada está sobre la recta determinada por O y el centro de la circun-

ferencia primitiva (sin ser el punto transformado de este último). En el segundo caso la recta, por tener el coeficiente angular igual a $-\alpha/\beta$, es perpendicular a la recta que une O con el centro (α, β) de la circunferencia dada. En resumen:

Por una inversión: a) *Las rectas que pasan por el centro* O *se transforman en sí mismas y las que no pasan por* O *en circunferencias que pasan por* O *y tienen su centro sobre la normal trazada por* O *a la recta dada.*

b) *Las circunferencias que pasan por* O *se transforman en rectas perpendiculares al diámetro que pasa por* O *y las circunferencias que no pasan por* O *en otras circunferencias cuyo centro está alineado con* O *y con el centro de la circunferencia primitiva.*

Observemos que si dos rectas r, r' se cortan en un punto A formando un ángulo α, las circunferencias transformadas se cortarán en el punto A′ transformado de A y el ángulo que formarán sus tangentes en este punto, por ser igual al que forman los radios respectivos que pasan por A′ y éste igual al de los radios que pasan por el segundo punto de intersección O, será igual al α, por tener sus lados perpendiculares. Es decir, las circunferencias transformadas de dos rectas se cortan bajo el mismo ángulo que éstas.

Si se consideran dos curvas cualesquiera que pasan por A y se entiende por ángulo entre las mismas el que forman sus tangentes, al transformarlas por una inversión, las curvas transformadas serán tangentes a las circunferencias transformadas de las rectas tangentes, y por tanto se cortarán bajo el mismo ángulo primitivo. La inversión posee, por tanto, la importante propiedad de conservar los ángulos.

Las transformaciones que tienen esta propiedad de no modificar los ángulos bajo el cual se cortan dos curvas cualesquiera, se llaman *conformes*. Se puede, pues, enunciar: *la inversión es una transformación conforme.*

EJERCICIOS: 1. Probar que la semejanza es una transformación conforme y que la afinidad no lo es.

2. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que una circunferencia sea inversa de sí misma es que ella sea la circunferencia de puntos unidos de centro O y radio $\sqrt{k}$, o bien una circunferencia ortogonal a ésta.

3. Probar que el conjunto de todas las inversiones de centro dado no forma grupo. Tampoco forma grupo el conjunto de todas las inversiones de centro y potencia cualesquiera.

4. Demostrar: Si C y C′ son dos circunferencias inversas respecto del centro O, el punto inverso del centro de C es el punto en que la polar de O respecto de C′ corta a la recta de los centros. Por tanto: para que dos circunferencias tengan por inversas circunferencias concéntricas, es necesario y suficiente que el centro de inversión tenga la misma polar respecto de las dos circunferencias.

5. Aprovechar el ejercicio anterior para probar que dadas dos circunferencias interiores, siempre existe una inversión que las transforma en circunferencias concétricas.

6. Probar que dos circunferencias inversas son homotéticas respecto del centro de inversión.

7. Toda circunferencia que pasa por dos puntos conjugados P, P' corta oriogonalmente a la circunferencia fundamental.

8. Representando cada punto del plano de coordenadas x, y por el número complejo $z = x + iy$ y por $\bar{z} = x - iy$, el conjugado, probar que la inversión respecto del origen y potencia k se escribe

$$z' = \frac{k\,\bar{z}}{z\,\bar{z}}\,.$$

9. Probar: *a*) La inversa de una parábola respecto de su vértice, es una cisoide; b) La inversa de una cónica respecto de uno de sus focos es un caracol de Pascal.

10. *Curvas analagmáticas.* Las curvas para las cuales existe una inversión que las transforma en sí mismas, se llaman analagmáticas. Las circunferencias, por ejemplo, son curvas analagmáticas, puesto que por cualquier inversión que tenga por circunferencia fundamental una ortogonal a ellas, se transforman en sí mismas.

Probar que la curva $y(x^2 + y^2) + ax^2 + by^2 + cy = 0$ es también analagmática, pues se transforma en sí misma por una inversión de centro el origen de coordenadas y potencia c.

2. **Aplicaciones de la inversión.** — La propiedad fundamental de poder transformar las circunferencias en rectas, tomando convenientemente el centro, hace que la inversión sea de mucha utilidad para resolver ciertos problemas geométricos.

El primero que hay que resolver es el de hallar el conjugado P' de un punto P (fig. 125). Para ello, se traza la circunferencia fundamental de centro O y radio igual a la raíz cuadrada del valor absoluto de la potencia de inversión. Si P es interior a esta circunferencia basta trazar la cuerda normal a OP y por uno de los puntos en que corta a la circunferencia trazar la tangente a la misma. El punto en que esta tangente corta a la recta OP es el P' buscado, pues por geometría elemental se sabe que $OP \cdot OP' = r^2 = k$ (en un triángulo rectángulo un cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre la misma). Si P es exterior, se traza por él una tangente a la circunferencia fundamental y la perpendicular bajada por el punto de contacto a la recta OP nos da P'. Si $k < 0$, cada vez hay que tomar como P' el simétrico del anteriormente hallado respecto de O.

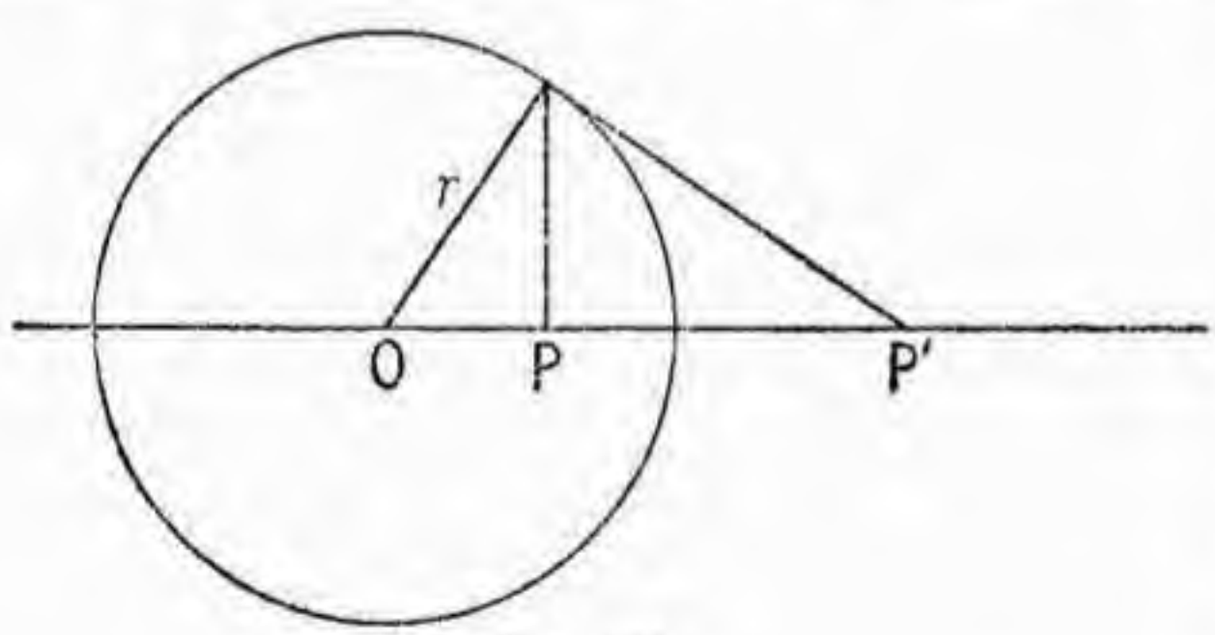

Fig. 125.

Sabiendo hallar el inverso de un punto, la circunferencia inversa de una recta se hallará tomando dos puntos de la misma y trazando la circunferencia que pasa por sus conjugados

y por el centro de inversión. La inversa de una circunferencia, si no pasa por O, se hallará tomando tres puntos y trazando la circunferencia que pasa por sus conjugados. Si pasa por O, bastará hallar los conjugados de dos de sus puntos y trazar la recta que los une. Todas estas construcciones se pueden hacer con la regla y el compás.

Consideremos los siguientes ejemplos clásicos:

1. *Trazar la circunferencia tangente a otras tres que pasan por un mismo punto* O.

Basta transformar las circunferencias en rectas por una inversión de centro O y potencia cualquiera. Se traza luego la circunferencia inscrita al triángulo formado por ellas y la transformada de esta circunferencia por la misma inversión anterior será la circunferencia buscada.

Si además de la circunferencia inscrita, se consideran las tres ex-inscritas (tangentes a un lado y a las prolongaciones de los otros dos), se tienen otras tres circunferencias que también son soluciones del problema, resultando tangentes exteriormente a una de las circunferencias dadas e interiormente a las otras dos.

2. *Problema de Apolonio. trazar una circunferencia tangente a otras tres dadas.*

Sean las circunferencias de centros O_1, O_2, O_3 (fig. 126) y llamemos X al centro de la circunferencia buscada. Si se supone que las tres circunferencias dadas van aumentado de radio en la misma cantidad hasta que dos de ellas quedan tangentes, la circunferencia solución irá disminuyendo de radio (en el caso de la figura), pero su centro no se modifica.

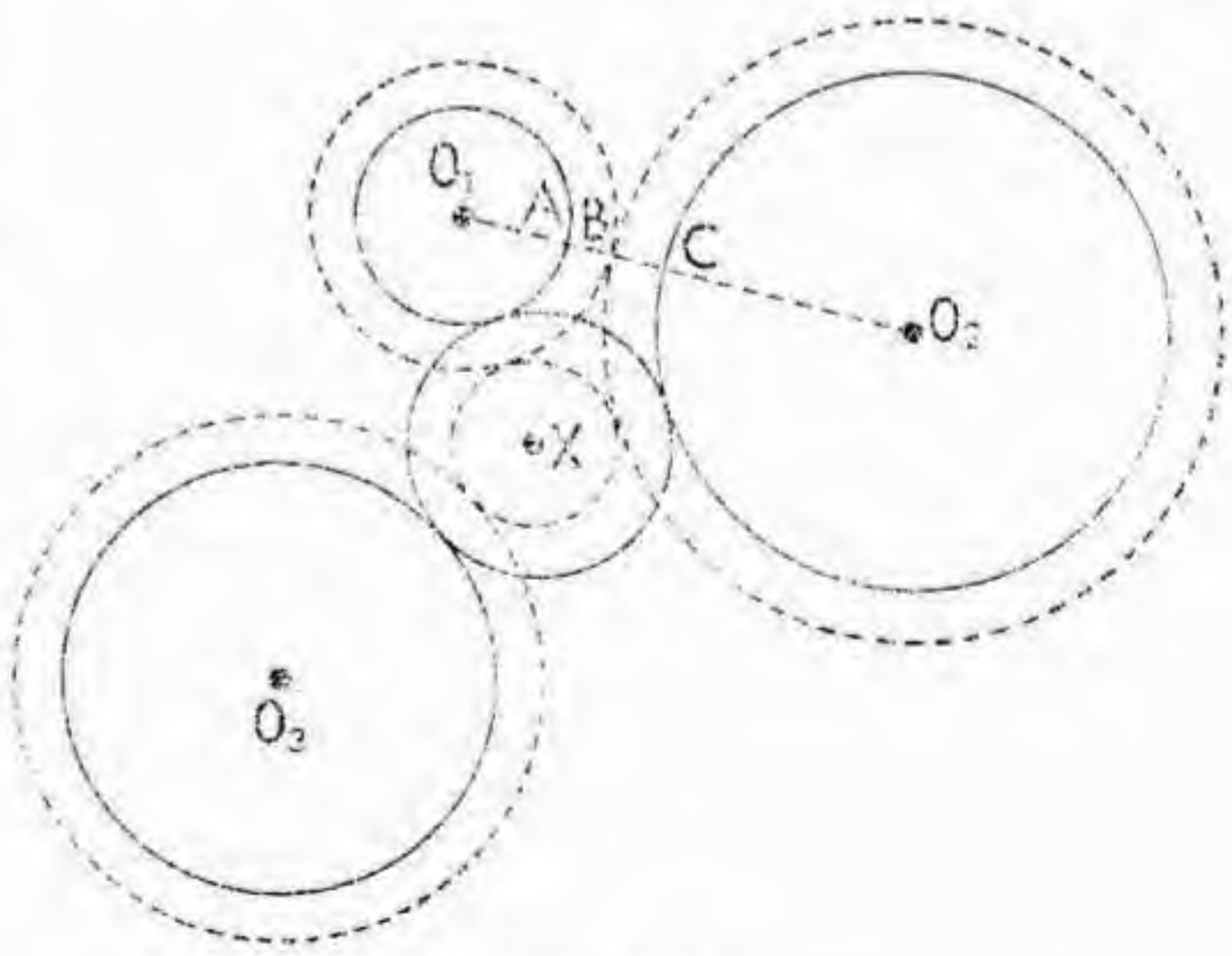

Fig. 126.

Por tanto, trazando las circunferencias punteadas, concéntricas con las dadas y tales que las de centros O_1, O_2 pasen por el punto medio B del segmento AC y la de centro O_3 tenga el mismo radio primitivo incrementado en

BC = BA, el problema queda reducido a trazar una circunferencia tangente a otras tres de las cuales dos son tangentes en el punto B.

Este problema es fácil por inversión. En efecto, invirtiendo la figura respecto de A y potencia cualquiera, las dos circunferencias tangentes se transforman en dos rectas paralelas y la tercera en otra circunferencia (que puede ser la misma si se toma su potencia respecto de A como potencia de inversión). Basta entonces saber trazar una circunferencia tangente a dos rectas paralelas y a una circunferencia dada. La solución debe tener su centro sobre la paralela media y su radio debe ser igual a $a/2$ si a es la distancia entre las paralelas. Por tanto su centro se encontrará cortando la paralela media por una circunferencia concéntrica con la dada y radio incrementado en $a/2$. Resultan, por tanto, dos soluciones (reales o imaginarias). Transformando luego por la misma inversión para volver a la figura primitiva tendremos el problema resuelto.

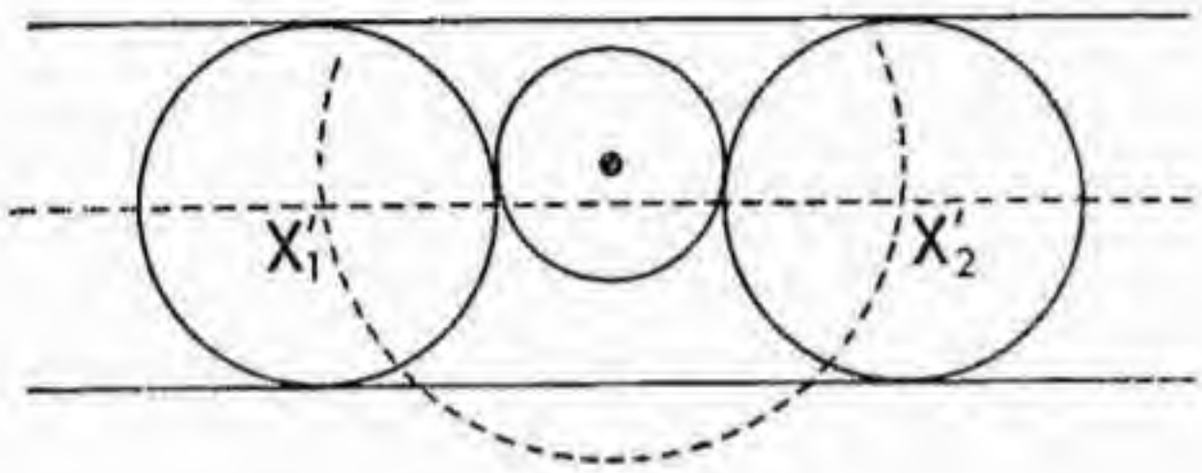

Fig. 127.

Las dos soluciones encontradas corresponden al caso en que al crecer los radios de las circunferencias de centros O_1, O_2 crece también el radio de la circunferencia O_3 para mantenerse tangente a la buscada de centro X (caso de la figura 127 en que la circunferencia solución es tangente exteriormente a las tres dadas) o aumentando (si la solución fuera tangente interiormente a las tres dadas). Pero si la circunferencia solución es tangente a las de centros O_1, O_2 exteriormente y a la de centro O_3 interiormente (o bien, inversamente, tangente interiormente a las de centro O_1, O_2 y exteriormente a la de centro O_3), al crecer los radios de las primeras, el de la tercera debe disminuir, resultando otra circunferencia punteada distinta y, procediendo como antes, otras dos soluciones del problema.

Considerando los otros casos posibles en que la solución sea tangente exteriormente a O_1, O_3 é interiormente a O_2 o bien tangente exteriormente a O_2, O_3 é interiormente a O_1, y los respectivos casos inversos, resultan otras cuatro soluciones que en total forman *las ocho soluciones del problema de Apolonio*.

Naturalmente que alguna de estas soluciones o todas ellas (caso de tres circunferencias concéntricas) pueden ser imaginarias.

Este método de resolver el problema de Apolonio es interesante teóricamente, pues permite ver de manera simple que su solución es posible con regla y compás. Sin embargo, para la construcción efectiva de la solución es un poco penoso, pues exige transformar la figura por inversión y luego invertir de nuevo para volver a la figura primitiva. Más práctico es otro método que no utiliza la inversión y que veremos en el Cap. X.

3. **Transformaciones birracionales.** — Todas las transformaciones que hemos estudiado son transformaciones algebraicas, es decir, las coordenadas x, y de un punto y las x', y' del transformado, están ligadas por relaciones de la forma

$$[8] \qquad F(x, y, x', y') = 0 \quad , \quad G(x, y, x' y') = 0$$

donde F, G son polinomios en las variables x, y, x', y'.

Cuando los polinomios F, G son tales que permiten despejar x', y' mediante expresiones de la forma

$$[9] \qquad x' = \frac{f_1(x, y)}{g(x, y)} \quad , \quad y' = \frac{f_2(x, y)}{g(x, y)}$$

donde f_1, f_2, g sean nuevamente polinomios en las variables x, y, la transformación se llama *racional*. Si, al mismo tiempo, también de [8] se puede deducir

$$[10] \qquad x = \frac{h_1(x', y')}{s(x', y')} \quad , \quad y = \frac{h_2(x', y')}{s(x', y')}$$

donde h_1, h_2, s sean también polinomios en x', y', la transformación se llama *birracional* (es decir, son racionales la transformación misma y su inversa).

Toda transformación birracional transforma evidentemente una curva algebraica en otra curva algebraica. Cuando ella transforma las rectas en curvas de grado m, se dice que la transformación es de grado m. En particular, para $m = 1$, o sea, cuando transforma las rectas en rectas, la transformación se llama de primer grado o *lineal*. Para $m = 2$, cuando transforma las rectas en cónicas, se llama *cuadrática*.

Todas las transformaciones estudiadas anteriormente, excepto la inversión, son transformaciones lineales. La inversión es una transformación cuadrática.

EJEMPLOS: 1. La transformación $x' = \log x + y$, $y' = \operatorname{sen} x$, no es algebraica.

2. La transformación $x' = x^2 - y$, $y' = y + x$ es racional, pero no birracional.

3. La transformación

$$x' = a + \frac{1}{x} \quad , \quad y' = \frac{y}{x^2}$$

es una transformación birracional cuadrática. Hallar las ecuaciones de la transformación inversa.

4. La transformación

$$x' = \frac{xy}{x^2 - y} \quad , \quad y' = \frac{x^2}{x^2 - y}$$

es otra transformación cuadrática. Hallar las ecuaciones de la transformación inversa.

4. **Transformaciones cuadráticas.** — La manera de obtener transformaciones cuadráticas es la siguiente. Sean A, B, C tres puntos fijos del plano elegidos arbitrariamente. Consideremos las ecuaciones $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$, de tres cónicas (degeneradas o no, pero distintas) que pasen por ellos. Entonces las ecuaciones

$$[11] \qquad x' = \frac{Q_1}{Q_3}, \quad y' = \frac{Q_2}{Q_3}$$

definen una transformación cuadrática.

En efecto, dados x', y' para hallar los x, y correspondientes se tiene el sistema

$$[12] \qquad Q_1 - x' Q_3 = 0 \quad , \quad Q_2 - y' Q_3 = 0.$$

Cada una de estas ecuaciones representa una cónica que pasa por los puntos fijos A, B, C. Por tanto, ellas sólo pueden tener un cuarto punto común. Esto significa que el sistema [12] *tiene una sola solución variable* x, y y, por consiguiente, que ella debe expresarse racionalmente en función de los coeficientes x', y'.

Los puntos A, B, C que anulan los numeradores y el denominador de [11] son los únicos que no tienen correspondiente; son puntos excepcionales y se llaman los *puntos fundamentales* de la transformación cuadrática.

En una transformación cuadrática, como la [11], a una recta general $ax + by + c = 0$ corresponde la cónica $aQ_1 + bQ_2 + cQ_3 = 0$.

Para dar un ejemplo, hallemos la ecuación general de las cónicas que pasan por los puntos A(0, 0) B(0, 1), C(1, 0). Escribiendo que la ecuación general $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ se satisface para estos puntos, se tienen las condiciones

$$f = 0, \quad c + e = 0, \quad a + d = 0.$$

Por tanto, la ecuación general de las cónicas que pasan por A, B, C es

$$ax^2 + bxy + cy^2 - ax - cy = 0.$$

Basta dar tres ternas de valores arbitrarios a a, b, c para tener las tres cónicas Q_1, Q_2, Q_3. Por ejemplo, tomando $(a = 0,\ c = 0,\ b = 1)$, $(b = 0,\ c = 0,\ a = 1)$, $(a = 0,\ b = 0,\ c = 1)$ se tiene, respectivamente,

$$Q_1 \equiv xy \quad , \quad Q_2 \equiv x^2 - x \quad , \quad Q_3 \equiv y^2 - y$$

con lo cual la transformación cuadrática queda

$$x' = \frac{x}{y - 1} \quad , \quad y' = \frac{x^2 - x}{y^2 - y}.$$

Es fácil comprobar que, efectivamente, puede invertirse, dando

$$x = \frac{x'(x' + y')}{x'^2 - y'} \quad , \quad y = \frac{x'(1 + x')}{x'^2 - y'}$$

Los puntos fundamentales pueden ser imaginarios y también dos o los tres de ellos coincidentes. Decir, por ejemplo, que A coincide con B, significa que hay que tomar por cónicas Q_1, Q_2, Q_3, tres cónicas que pasen por A y C y tengan dos puntos comunes confundidos en A. Decir que A, B, C son coincidentes, significa que hay que tomar tres cónicas que en este punto tengan tres puntos comunes confundidos, o sea, sean tangentes con un contacto doble.

Por ejemplo, consideremos tres cónicas que pasen por el punto del infinito del eje y, por el origen de coordenadas y tengan en este último dos puntos confundidos. Ellas pueden ser

$$Q_1 \equiv xy \quad , \quad Q_2 \equiv x^2 \quad , \quad Q_3 \equiv x^2 - y$$

y resulta la transformación cuadrática del ej. 2 del número anterior.

Como ejemplo importante del caso en que dos puntos fundamentales

son imaginarios y el tercero real, tomemos los puntos A(0, 0) y los puntos cíclicos del plano. Interviniendo la recta impropia es conveniente utilizar coordenadas homogéneas. Entonces, podemos tomar (siendo k una constante cualquiera),

$$Q_1 \equiv kxt \quad , \quad Q_2 \equiv kyt \quad , \quad Q_3 \equiv x^2 + y^2$$

que son tres cónicas degeneradas compuestas: Q_1 del eje $x = 0$ y la recta impropia; Q_2 del eje $y = 0$ y la recta impropia; Q_3 de las rectas isótropas $y = \pm ix$. Todas ellas pasan por los puntos fundamentales A(0, 0, 1), B(1, i, 0), C(1, $-i$, 0). La transformación cuadrática [11] se reduce entonces a la inversión de centro el origen y potencia k.

EJERCICIOS: 1. Hallar la transformación cuadrática cuyos puntos fundamentales son A(0, 0) y los puntos del infinito de los dos ejes coordenados.

2. Probar que el producto de dos transformaciones cuadráticas no es una transformación cuadrática. Por tanto, ellas no forman grupo.

3. Hallar la transformación cuadrática cuyos puntos fundamentales sean el origen de coordenadas contado dos veces y el punto (1, 1).

4. Hallar las transformaciones inversas y los puntos fundamentales de las siguientes transformaciones cuadráticas:

a) $$x' = \frac{y(x-y)}{x^2 - y} \quad , \quad y' = \frac{x(x-y)}{x^2 - y}$$

b) $$x' = \frac{x + 2y}{x^2 + y^2} \quad , \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2} - 1$$

c) $$x' = \frac{y - x^2}{y - x^2 - 2y^2} \quad y' = \frac{y - x^2 - 3xy}{y - x^2 - 2y^2}$$

NOTAS Y COMENTARIOS AL CAPÍTULO VI

1. LA IDEA DE GRUPO Y EL PROGRAMA DE ERLANGEN DE KLEIN. El concepto de grupo de transformaciones se ha revelado de una importancia excepcional en toda la matemática. Félix Klein, en su famoso *programa de Erlangen* (*Vergleichungende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen, 1872) partió de tal concepto para dar una definición general de geometría.

En efecto, la geometría intuitiva elemental abstrae multitud de sensaciones (color, peso, ...) sustituyendo a los cuerpos por entes ideales, llamados *figuras geométricas*, cuyas propiedades estudia. Pero ¿cuáles son estas propiedades que constituyen el objeto de la geometría elemental? No las relaciones con el mundo externo, sino las que no varían en el movimiento de la figura; es decir, las propiedades inherentes a ésta. Dicho en lenguaje matemático: las propiedades invariantes respecto al grupo de los movimientos.

Cuando decimos que el teorema de Pitágoras es una propiedad del triángulo rectángulo, no nos referimos a un triángulo rectángulo determinado, sino a uno arbitrario, cualquiera que sea su posición y también cualquiera que sea su magnitud. Es decir, son las propiedades independientes de la posición absoluta de las figuras respecto de la Tierra, las que estudia la Geometría elemental, y no sólo independientes de la *posición*, sino también de la *magnitud* y del *sentido*. Obtenemos así la siguiente definición de Klein:

La geometría elemental estudia las propiedades invariantes de las

figuras respecto del grupo formado por todos los movimientos, más todas las semejanzas, más todas las simetrías.

Este grupo se llama el *fundamental* de la geometría elemental.

La importancia de esta definición es que ella permite inmediatamente una generalización a grupos más amplios y, por tanto, la definición de nuevas geometrías. En efecto, si como grupo fundamental (en vez del formado por los movimientos, más semejanzas, más simetrías) se toma otro grupo cualquiera G, el estudio de las propiedades invariantes de las figuras respecto de G dará lugar a la geometría respecto del grupo G. Se llega así a la definición general de geometría de Klein:

Dado un espacio E *y un grupo* G *de transformaciones entre sus elementos, se llama geometría de* E *respecto de* G *al estudio de las propiedades de las figuras de* E *que son invariantes respecto de las transformaciones de* G.

Por ejemplo, si E es el plano ordinario y G el grupo de las afinidades, se tiene la llamada *geometría afín* del plano. Una propiedad de esta geometría será, por ejemplo, la razón simple de tres puntos alineados, que ya demostramos que era invariante por afinidades. En cambio, la distancia entre dos puntos no aparece en la geometría afín, pues no es una característica invariante de la figura formada por el par de puntos. El hecho de que las tres medianas de un triángulo concurren en un punto, es una propiedad afín, puesto que el punto medio de un segmento se conserva por transformaciones afines; en cambio, el teorema de Pitágoras no lo es, pues la propiedad de un triángulo, ser rectángulo no es invariante por afinidades.

2. Aparatos realizadores de transformaciones. Para las transformaciones más usuales se han cosntruído aparatos, formados por varillas articuladas convenientemente dispuestas, tales que cuando uno de sus puntos P describe una figura F, otro punto P′ del aparato describe la figura transformada F′. Es un problema interesante el de idear un tal aparato para cada transformación. Se demuestra, por ejemplo, que toda transformación algebraica puede realizarse por un mecanismo formado exclusivamente por varillas rígidas articuladas en los puntos de unión (A. B. Kempe, *How to draw a straight line*, Londres, 1877).

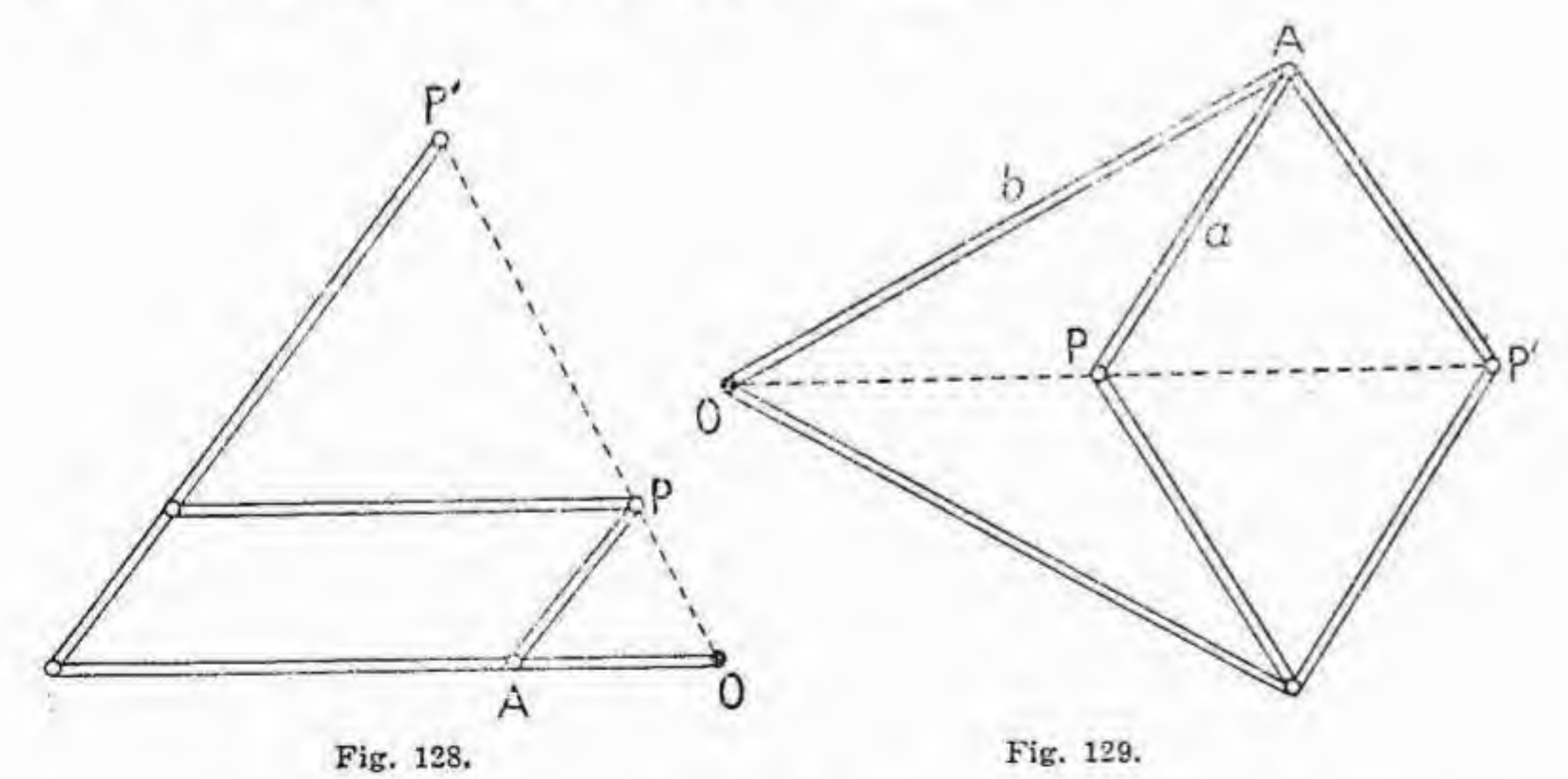

Fig. 128. Fig. 129.

Citaremos, como ejemplo, alguno de los más conocidos de estos aparatos.

Para dibujar la figura semejante de otra se tiene el llamado *pantógrafo*, indicado en la fig. 128. Fijado el punto O, cuando P describe una

figura, P′ describe la homotética de centro O y razón OA/OB. En general se dispone que los puntos A y B puedan desplazarse, para modificar la razón de semejanza.

Para trazar la figura inversa de otra se construyen los llamados *inversores*. El más antiguo es el de PEAUCELLIER, indicado en la fig. 129. El punto O es fijo y P, P′ describen figuras inversas. En efecto, el producto OP.OP′ es igual a la potencia de O respecto de la circunferencia de centro A y radio $AP = AP' = a$ y vale por tanto $b^2 - a^2$, siendo $b = OA$. Si esta potencia es negativa, el inversor debe construirse como indica la fig. 130.

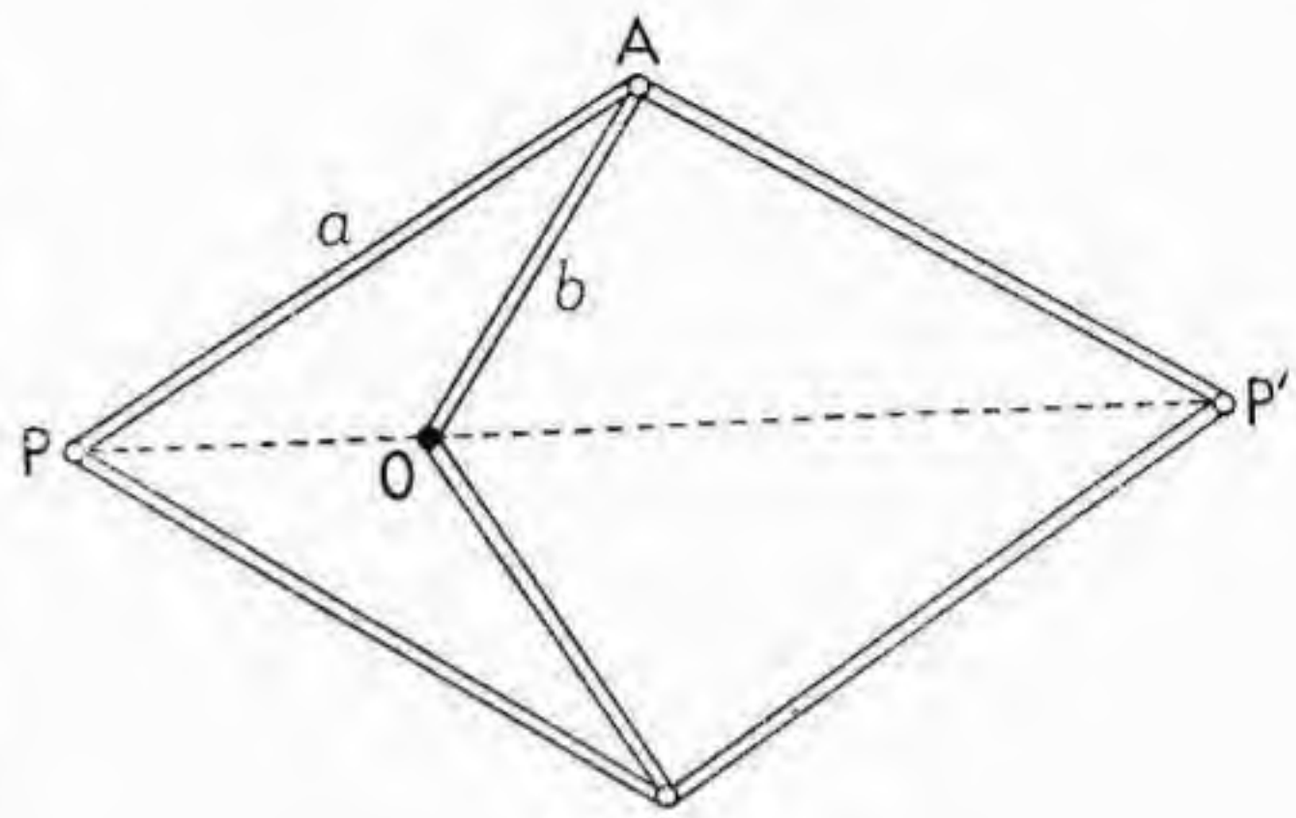

Fig. 130.

Otro tipo de inversor muy conocido es el de HART, indicado en la fig. 131. Por ser $AO/OB = AP/PC = DP'/P'B = \lambda$ por construcción, los puntos O, P, P′ están siempre sobre una recta paralela a las AD, BC. Si las coordenadas de B son (b_1, b_2) y las de C son (c_1, c_2), es fácil ver que las de los otros puntos son

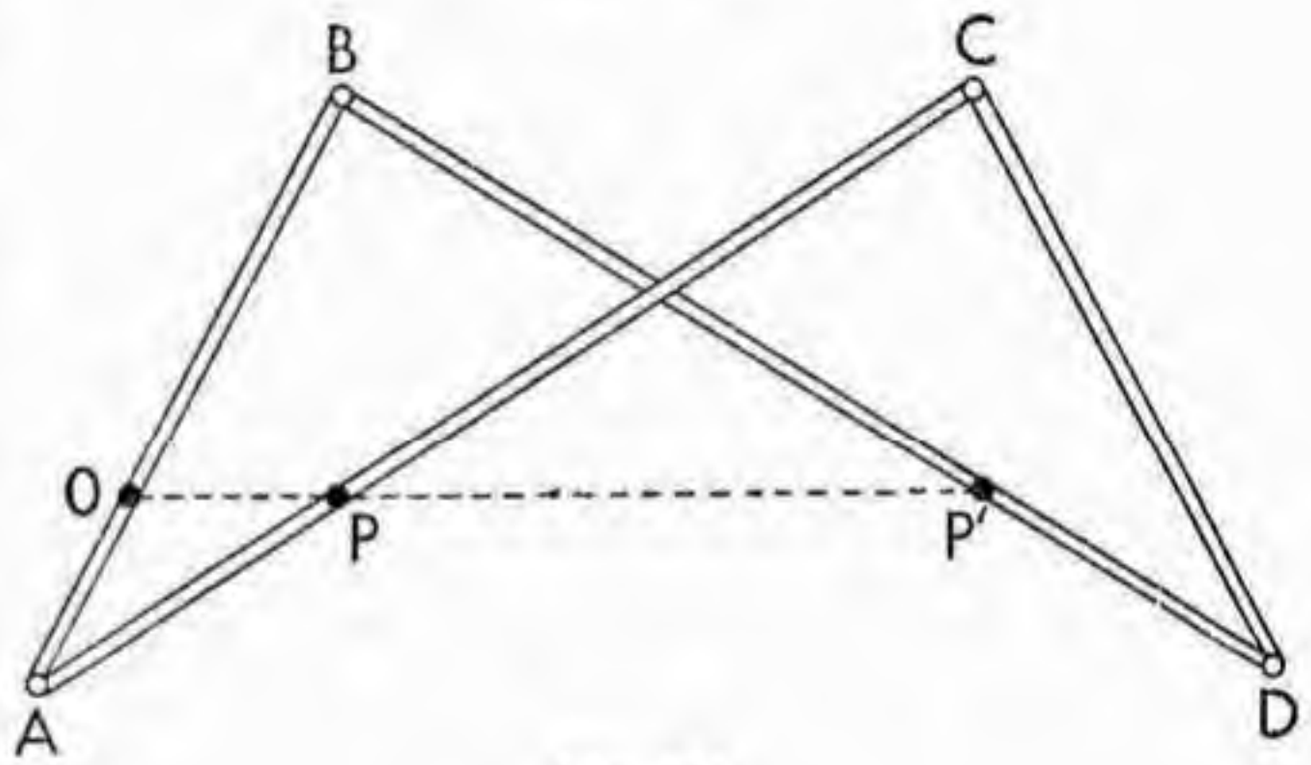

Fig. 131.

$$A(\lambda b_1, \lambda b_2), \quad P(\lambda c_1, \lambda b_2), \quad D(c_1 + b_1, 0), \quad P'((1-\lambda)c_1 + b_1, \lambda b_2)$$

y por tanto

$$OP = \lambda(c_1 - b_1) \quad , \quad OP' = (1-\lambda)(c_1 + b_1)$$

de donde

$$OP \,.\, OP' = \lambda(1-\lambda)(c_1^2 - b_1^2) = \lambda(1-\lambda)[(c_1^2 + b_2^2) - (b_1^2 + b_2^2)] = \\ = \lambda(1-\lambda)[AC^2 - BA^2]$$

lo cual prueba que $OP \,.\, OP' = \text{cte.}$, es decir, que P y P′ describen figuras inversas.

Los inversores pueden servir como aparatos para trazar líneas rectas. Basta añadirles una nueva varilla de longitud constante que ligue P con un nuevo punto fijo O′, para que P describa una circunferencia; entonces P′ se moverá sobre una recta.

3. LA GEOMETRÍA DEL COMPÁS DE MASCHERONI. Se sabe la importancia que han tenido desde la matemática griega los problemas resolubles "con regla y compás". Posiblemente por la sencillez y precisión de estos instrumentos, tales problemas eran los únicos que se consideraban como posibles de resolver "exactamente". Desde el punto de vista de la fundamentación de la matemática es muy interesante la observación del ita-

liano Lorenzo Mascheroni (1750-1800), según la cual: *todo problema resoluble con regla y compás puede resolverse también únicamente con el compás.*

La regla aparece así como un instrumento superfluo para las construcciones geométricas. La geometría que prescinde de la regla en sus construcciones se ha llamado "geometría del compás" o "geometría de Mascheroni". Es muy fácil dar una demostración de la observación fundamental anterior. En efecto, la solución de todo problema resoluble con regla y compás consiste en buscar un número finito de intersecciones de rectas con rectas, rectas con circunferencias o circunferencias entre sí. Por una inversión conveniente, las rectas pasan a circunferencias y por tanto, los casos anteriores se reducen al último de ellos, que sólo utiliza el compás.

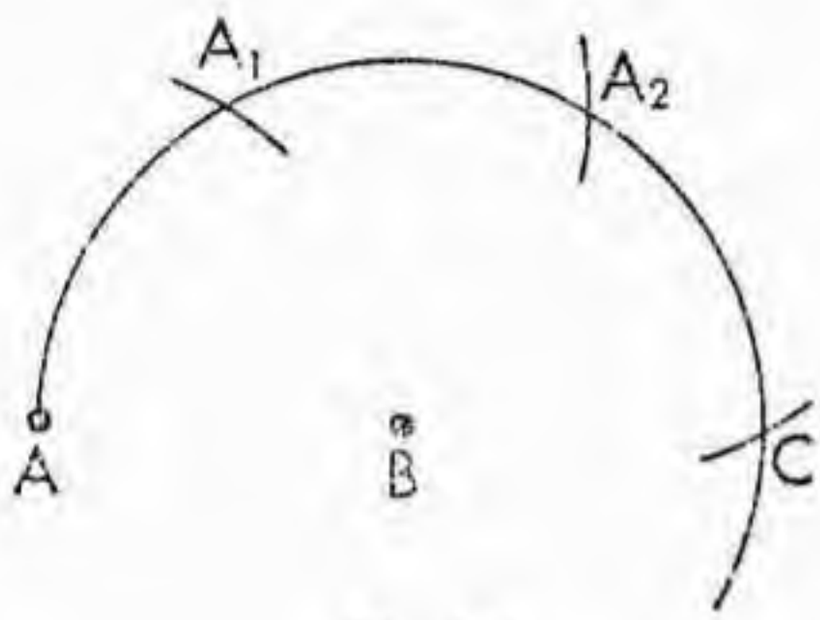

Fig. 132.

Bastará, por consiguiente, demostrar que se puede construir el inverso de un punto (para deshacer la inversión y llevar la solución a la figura primitiva) y la inversa de una recta utilizando sólo el compás. Para ello consideremos los siguientes problemas y su solución con el compás únicamente.

a) *Dados dos puntos A, B, construir sobre la recta que determinan el punto C tal que sea AB = BC.*

Basta trazar la circunferencia de centro B y radio BA (fig. 132) y llevar sobre ella, a partir de A, tres radios $AA_1 = A_1A_2 = A_2C$.

Repitiendo la operación se pueden construir puntos alineados y equidistantes en número cualquiera.

b) *Construir el inverso P' de un punto P.*

Sea O el centro de inversión y k^2 la potencia, que supondremos primero positiva. Tracemos la circunferencia fundamental de centro O y radio $|k|$. Sean A, B las intersecciones de esta circunferencia con la de centro P y radio PO. Con centros A, B se trazan los arcos OP'. Decimos que P' es el punto buscado (fig. 133). En efecto, la potencia de P respecto de la circunferencia de centro A y radio AO vale

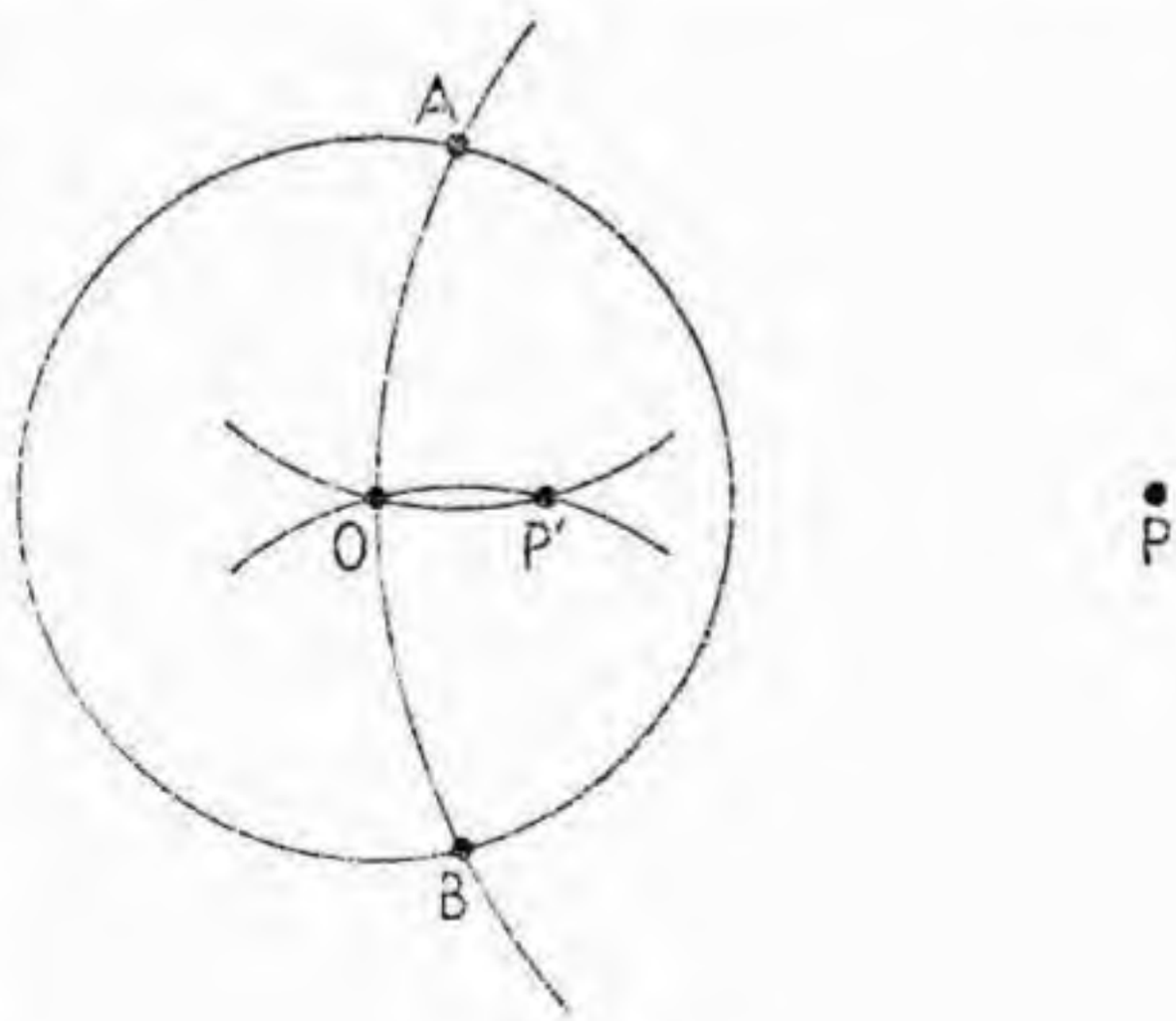

Fig. 133.

$$PO \cdot PP' = PA^2 - AO^2$$

y como $PP' = PO - P'O$ y $PO = PA$ queda

$$PO^2 - PO \cdot P'O = PO^2 - AO^2$$

o sea

$$OP \cdot OP' = OA^2 = k^2.$$

Queda el caso en que la circunferencia de centro P y radio PO no

corte a la circunferencia fundamental (por ser P interior a ella y próximo a O). En este caso, por el problema *a*), podemos hallar el punto Q tal que $OQ = nOP$, siendo n un número entero suficientemente grande para que se pueda construir el inverso de Q por el método anterior. Si Q' es este inverso, será

$$OQ' \,.\, OQ = OQ' \,.\, nOP = k^2.$$

Si, por el problema *a*) se halla P' tal que $OP' = nOQ'$, será $OP \,.\, OP' = k^2$, ó sea, P' es el inverso buscado.

En el caso de una inversión de potencia negativa, una vez construído P'₁ como si ella fuera positiva, basta tomar el punto P' tal que $P'O = OP'_1$, ó sea el simétrico respecto de O, lo cual se puede hacer con sólo el compás por el problema *a*).

c) *Hallar el punto medio del segmento determinado por dos puntos A, B.*

Basta hallar C por el problema *a*) y luego construir el inverso de C respecto de la circunferencia de centro A y radio AB. Si este punto es C' será $AC \,.\, AC' = AB^2$, y como $AC = 2AB$, resulta $2AC' = AB$, lo cual prueba que la construcción está bien.

d) *Hallar el pie de la perpendicular trazada desde un punto O a una recta determinada por dos puntos A, B.*

Basta trazar el simétrico O' de O respecto de la recta AB, como segunda intersección de las circunferencias de centro A, B y radios respectivos AO, BO. Luego, mediante el problema *c*) se halla el punto medio de OO'.

a) *Hallar la inversa de una recta determinada por dos puntos A, B.*

Se busca el pie de la perpendicular del centro de inversión O a la recta; sea C. Si C' es el inverso de C, el centro de la circunferencia buscada es el punto medio de OC'.

Con estas construcciones no sólo queda justificada la geometría de Mascheroni, sino que se tiene el método para resolver cualquiera de sus problemas.

CAPÍTULO VII

RECTAS Y PLANOS

§ 33. COORDENADAS Y ECUACIONES

1. **Sistemas coordenados.** — La determinación de cada punto en el espacio de tres dimensiones exige dar tres números, llamados *coordenadas*, de igual modo que en el plano son suficientes dos.

Para definir las coordenadas cartesianas adoptaremos una terna de referencia formada por tres ejes, X, Y, Z, concurrentes en un punto O, llamado origen, y fijemos en cada uno la

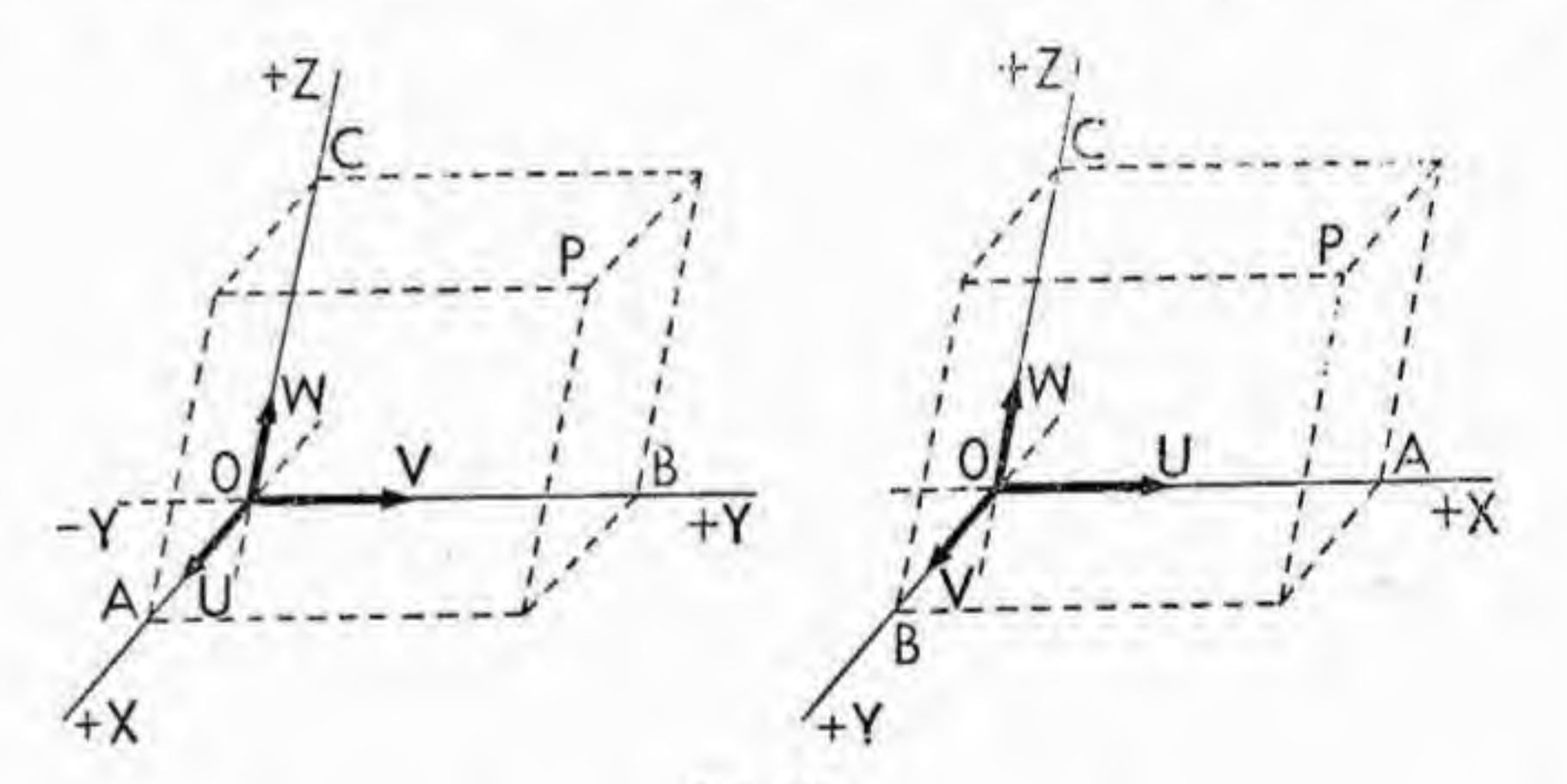

Fig. 134.

unidad y un sentido positivo. Esta fijación puede hacerse de dos modos distintos indicados en la figura 134, pero en ambos puede suponerse el plano X, Y, horizontal, y el eje Z perpendicular u oblicuo, dirigido hacia arriba.

Colocado el observador en el origen O, en el sentido del semieje +Z, al mirar el plano X, Y, puede suceder que el sentido (+X, +Y), sea el positivo o el negativo. El primer sistema suele ser usado por los autores ingleses y se llama positivo, directo, destrorsum o destrógiro; el segundo sistema se llama negativo, inverso, sinistrorsum o levógiro.

De otro modo: dados los vectores U y V de origen O, determinan un plano que divide al espacio en dos regiones. Des-

de una aparece como positivo el sentido UV, es decir, colocado un reloj sobre el plano, con la esfera hacia esa región, el sentido de rotación UV es contrario al del movimiento de las saetas. Diremos por esto, que esa región es positiva, y negativa la otra. Esto mismo se puede expresar diciendo que el plano tiene una cara positiva y otra negativa. Colocado un tercer vector W en el origen O hacia la cara positiva, se forma un triedro directo o positivo y si se coloca sobre la cara negativa, se forma un triedro inverso o negativo.

Otra manera de distinguir los dos tipos, es imaginar un tornillo ordinario (por ejemplo, un sacacorchos) en el eje Z. Al girar en el sentido UV, el tornillo asciende, si el triedro es positivo.

2. **Triedros simples.** — Así como en geometría plana la palabra *ángulo completo* tiene dos sentidos (simple y completo), la palabra *triedro* designa una terna de ejes concurrentes en O y los tres ángulos completos que dos a dos determinan; y un *triedo simple* está formado por tres semiejes y los tres ángulos simples que cada dos determinan. Dada una terna de ejes X, Y, Z, componen un triedro completo con sus tres caras completas XY, YZ, ZX; pero solamente nos interesan los triedros simples determinados por los seis semiejes, a saber:

$$+X,\ +Y,\ +Z;\ +X,\ -Y,\ +Z;\ -X,\ -Y,\ +Z;\ -X,\ +Y,\ +Z$$

$$+X,\ +Y,\ -Z;\ +X,\ -Y,\ -Z;\ -X,\ -Y,\ -Z;\ -X,\ +Y,\ -Z.$$

Los cuatro primeros están por encima del plano XY y los otros cuatro debajo, tanto si el sistema es directo o inverso (positivo o negativo), y en ambos casos se ve que el observador se supone situado dentro del primer triedro +X, +Y, +Z. No faltan autores que lo colocan en el segundo triedro +X, —Y, +Z. Para tranquilizar al lector ante esta diversidad de triedros, le advertiremos que todo lo expuesto en esta obra vale para todos ellos, y para evitar el amaneramiento deberá acostumbrarse a usar indistintamente cualquiera de los tres tipos de triedros al traducir gráficamente los razonamientos del texto. Así quedará capacitado para leer cualquier libro de geometría o de física.

3. **Coordenadas cartesianas.** — Elegido un triedro de referencia, sea directo o inverso, y un vector unidad en cada eje, si por cada punto P del espacio, se trazan planos paralelos a los coordenados, las abscisas x, y, z, de sus trazas sobre los ejes X, Y, Z, determinan estos planos proyectantes y por tanto el punto P. Estos tres números se llaman coordenadas cartesianas de P (fig. 134).

DEFINICIÓN 1. *Coordenadas cartesianas* de un punto son las abscisas x, y, z, de sus tres proyecciones sobre cada eje

coordenado X, Y, Z, paralelamente al plano opuesto. Si los ejes son ortogonales, las coordenadas se llaman *ortogonales* o *rectangulares*, y en caso contrario *oblicuas*.

NOTAS: 1. Para los problemas métricos (ángulos, distancias, áreas, volúmenes) conviene usar coordenadas rectangulares; para los problemas afines (paralelismo, razones simples) pueden utilizarse coordenadas rectangulares u oblicuas; los problemas proyectivos (determinación de rectas y planos, intersecciones, ...) se tratan con igual sencillez en coordenadas proyectivas, pero los estudiaremos en coordenadas cartesianas, oblicuas o rectangulares.

2. En ambos casos un sistema de coordenadas establece una correspondencia biunívoca entre los puntos del espacio y las ternas de números reales. En efecto, cada punto determina una terna de coordenadas y recíprocamente, cada terna de números reales determina un solo punto, intersección de los tres planos paralelos a los planos coordenados, que tienen aquellas coordenadas.

3. También la *continuidad* de la correspondencia se demuestra fácilmente, como se hizo en Cap. I; pero más delicada es la demostración de la *ordenación*, que en los espacios de más de una dimensión es concepto menos simple.

4. **Ecuaciones con una variable.** — Todos los puntos del plano X, Y, tienen $Z = 0$ y reciprocamente. He aquí, pues, una ecuación a la que satisfacen todos los puntos de este plano y sólo ellos. Diremos, brevemente, que es la *ecuación del plano*. Análogamente, las ecuaciones de los planos XZ, YZ, son respectivamente:

$$y = 0 \quad , \quad x = 0 .$$

Las ecuaciones del tipo

$$x = a \quad , \quad y = b \quad , \quad z = c$$

representan, respectivamente, planos paralelos al YZ, al ZX, y al XY, que distan de ellos, en la dirección del eje opuesto, a, b, c, en magnitud y signo.

Una ecuación de una sola variable, por ejemplo, $x^2 = 1$, se descompone en ecuaciones de primer grado, que en este ejemplo son $x = 1$, $x = -1$, cada una de las cuales representa un plano paralelo al XY.

En general: *Una ecuación de una sola variable representa planos paralelos al plano coordenado opuesto al eje correspondiente a esa variable; son tantos planos como raíces tenga la ecuación.*

5. **Ecuaciones con dos variables.** — Diremos que una superficie está representada por una ecuación $f(x, y, z) = 0$, si todos los puntos de la superficie satisfacen a esa ecuación, y recíprocamente, toda solución de ésta representa un punto de la superficie. Así obtendremos la ecuación del plano, de una superficie esférica, etc.

Hay un caso importante que conviene destacar. Sea

$f(x,y) = 0$ una ecuación que no contiene la variable z; en el plano XY esta ecuación representará una curva y los únicos puntos (x, y, z) del espacio que satisfacen a esta ecuación son aquellos cuyas coordenadas x, y, la satisfacen, cualquiera sea la z; es decir, aquellos puntos y sólo aquellos que se proyectan paralelamente al eje z según los puntos de esta curva. Por tanto, *una ecuación de dos variables representa la superficie cilíndrica cuya directriz es una curva representada por esta ecuación en el plano correspondiente a estas dos coordenadas y cuyas generatrices son paralelas al otro eje.*

Las superficies cilíndricas más sencillas son los planos. Así, por ejemplo, la ecuación $x + y = 2$ en el plano XY representa una recta, que intercepta con los ejes, segmentos de longitud 2; pero esa ecuación representa en el espacio el plano paralelo al eje Z, trazado por esa recta (fig. 135).

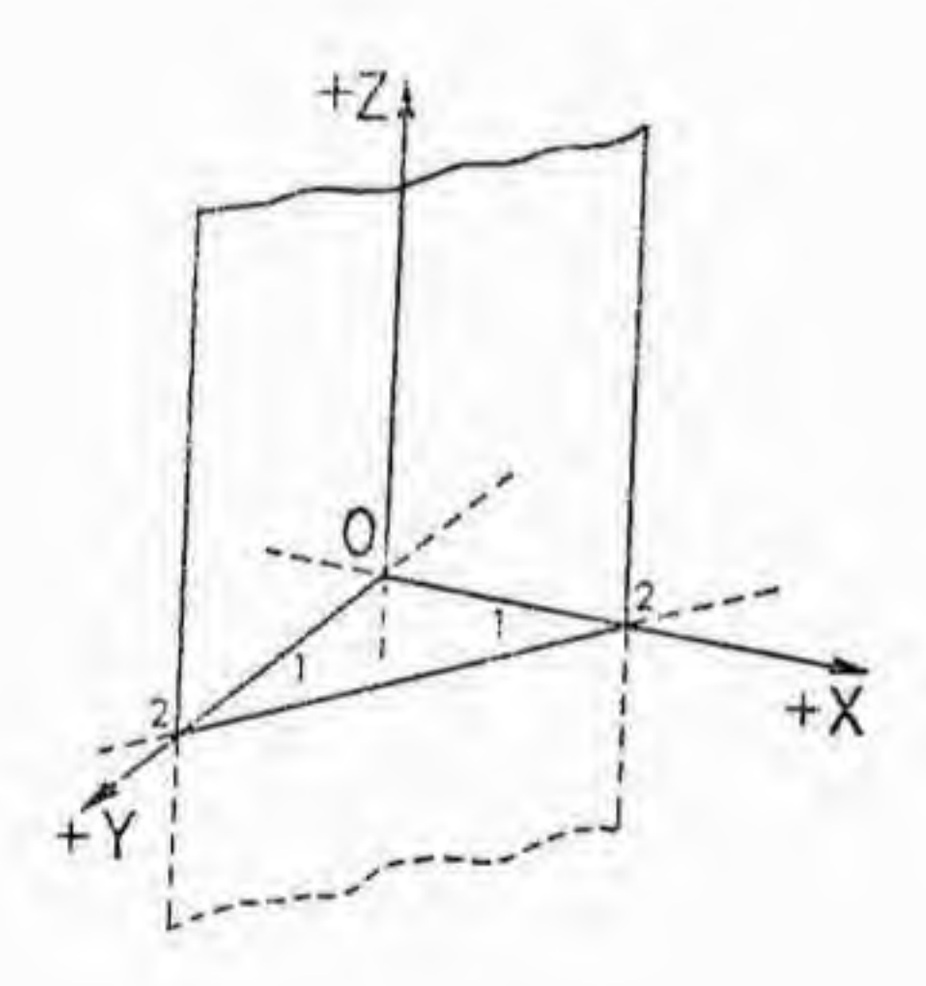

Fig. 135.

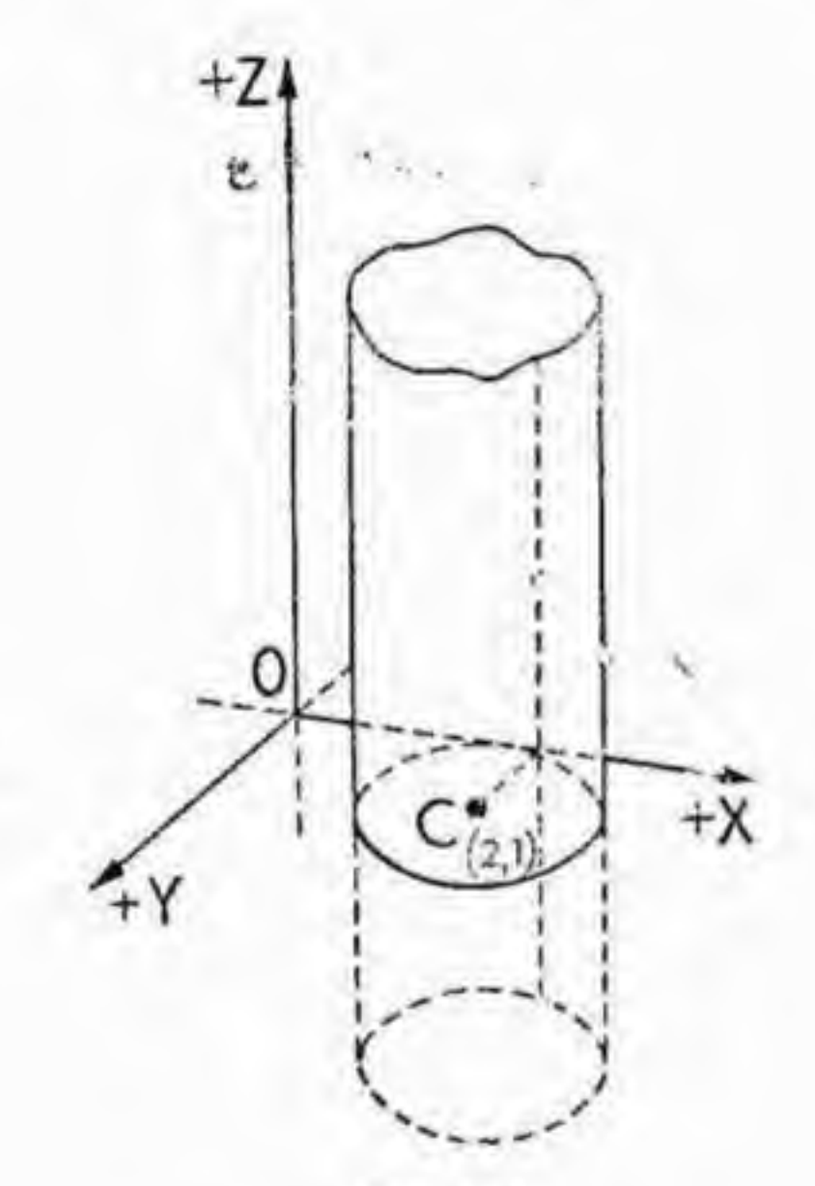

Fig. 136.

6. **Sistema de dos ecuaciones.** — Vemos en estos casos sencillos que una sola ecuación no representa una curva, sino una superficie. Las curvas vienen dadas como intersección de dos superficies, es decir, por un sistema de dos ecuaciones.

Los puntos del eje Z tienen coordenadas $x = 0$, $y = 0$ y, recíprocamente, todo punto que cumpla estas dos condiciones pertenece al eje Z. Diremos, pues, que el eje Z está representado por este sistema de ecuaciones. Los sistemas de ecuaciones que representan a los ejes son por tanto:

$$\text{eje X} \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{eje Y} \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{eje Z} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Toda línea está representada, como hemos dicho, por un sistema de dos ecuaciones, cada una de las cuales representa una superficie y la línea aparece como conjunto de puntos comunes a ambas. En cada caso, se procura la elección de las dos superficies más sencillas que pasen por la curva. Así, por ejemplo, la circunferencia situada en el plano XY, representada en la figura 136, tiene este sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 &= 0 \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Para expresar analíticamente una circunferencia cualquiera convendrá elegir su plano y una superficie esférica, como veremos en el § 38.

7. **El plano impropio. Coordenadas homogéneas.** — Al estudiar la geometría de la recta y la geometría del plano, vimos que toda recta tiene un punto impropio o punto del infinito, y todo plano tiene una recta impropia o recta del infinito. Por tanto, el conjunto de puntos del espacio situados a distancia infinita del origen de coordenadas (o de otro punto cuyas coordenadas no sean todas finitas) goza de las propiedades del plano, a saber: tiene un solo punto común con cada recta del espacio y una recta común con cada plano. Esto justifica que se acepte el convenio de que el conjunto de los puntos impropios o del infinito del espacio forman un plano, llamado *plano impropio* o *plano del infinito*.

Lo mismo que para el plano, un punto impropio del espacio está determinado por la dirección de las rectas que pasan por él. Dar un punto impropio equivale, por tanto, a dar los coeficientes directores a, b, c de una recta que pase por el mismo. Para uniformar el conjunto de los puntos propios (determinados por tres coordenadas) y el de los impropios (determinados por tres coeficientes directores), es útil el empleo de las *coordenadas homogéneas*.

DEFINICIÓN. Dado un sistema de coordenadas cartesianas (ortogonales u oblicuas), se llaman coordenadas homogéneas de un punto P, propio o impropio, a cuatro números x, y, z, t no todos nulos, tales que: *a*) Si P es propio, las razones x/t, y/t, z/t son iguales a las coordenadas ordinarias de P; *b*) Si P es impropio, es $t=0$ y las tres primeras coordenadas x, y, z son los coeficientes directores de la dirección correspondiente al punto P.

Según esta definición, a coordenadas homogéneas proporcionales corresponde el mismo punto. Es decir, si un punto tiene las coordenadas (x, y, z, t), el conjunto $(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$ representa el mismo punto cualquiera que sea $\lambda \neq 0$. Esto hace que, para $t \neq 0$, se pueda tomar siempre $t = 1$, de manera que si x, y, z son las coordenadas ordinarias de un punto propio, sus coordenadas homogéneas pueden tomarse, simplemente, iguales a x, y, z, 1.

Veamos algunos ejemplos:

a) Las coordenadas homogéneas del origen y de los puntos del infinito de los ejes X, Y, Z son, respectivamente,

$$(0, 0, 0, 1) \quad , \quad (1, 0, 0, 0) \quad , \quad (0, 1, 0, 0) \quad , \quad (0, 0, 1, 0)$$

pudiéndose sustituir el 1 por cualquier otro número distinto de cero.

b) Para pasar de las ecuaciones de una recta, de un plano o de cualquier superficie, de coordenadas ordinarias a coordenadas homogéneas, basta sustituir las coordenadas ordinarias por x/t, y/t, z/t respectivamente. Por ejemplo, la ecuación general de un plano en coordenadas ho-

mogéneas (haciendo la sustitución dicha y multiplicando por t para quitar denominadores), resulta

$$Ax + By + Cz + Dt = 0.$$

Como los puntos impropios están caracterizados por tener $t = 0$, se puede decir que $t = 0$ *es la ecuación del plano impropio.*

§ 34. La recta. Propiedades proyectivas y afines

1. Ecuaciones de la recta. — La representación analítica de la recta en E_3 se logra por el mismo método seguido en E_2 (§ 8-1). Dados los puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ cada $P(x, y, z)$ (fig. 137) de la recta P_0P_1 está determinado por la medida $P_0P/P_0P_1 = p$, y como esta razón se conserva en las proyecciones sobre los ejes, si son $x_1 \neq x_0$, $y_1 \neq y_0$, $z_1 \neq z_0$, se verifica

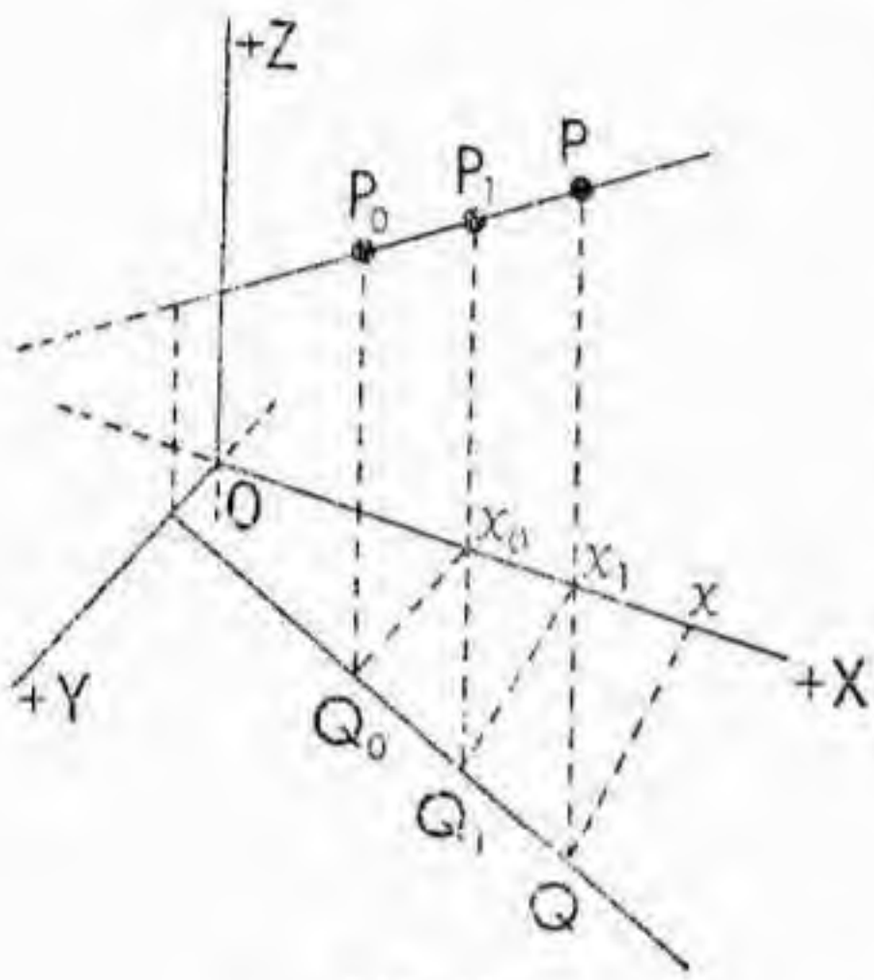

Fig. 137.

$$[1] \quad \frac{X_0X}{X_0X_1} = \frac{Y_0Y}{Y_0Y_1} = \frac{Z_0Z}{Z_0Z_1} = p,$$

o sea

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} = p.$$

Tenemos así dos ecuaciones a que satisface $P(x, y, z)$, y además el significado geométrico de cada miembro. Recíprocamente, si una terna (x, y, z) satisface al sistema [1], y es p el valor común de las tres razones, el punto P de la recta definido por el vector $P_0P = p \cdot P_0P_1$ tiene coordenadas que satisfacen a [1], es decir, las mismas x, y, z dadas.

Resumen: *La recta determinada por los puntos* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *y* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *tiene como expresión analítica el sistema de ecuaciones:*

$$[2] \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

y el valor constante de estas razones es la medida del vector P_0P *con la unidad* P_0P_1.

En particular las ecuaciones de la recta determinada por el origen y el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ son:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1}$$

Por tanto: *La condición necesaria y suficiente para que dos puntos estén alineados con el origen es la proporcionalidad de sus respectivas coordenadas:* x_0/x_1, y_0/y_1, z_0/z_1.

EJEMPLO. Rectas determinadas por los puntos (0, 1, —1), (1, 0, 2), (3, —2, 0). Sus ecuaciones son

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{3}, \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{-2},$$

$$\frac{x-3}{-3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1}.$$

o bien $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 3z = -3 \end{cases}$

2. **Caso singular.** — Es obvio que las ecuaciones [2] carecen de significado si los dos puntos tienen alguna coordenada igual. Si es, por ejemplo $z_0 = z_1$, los puntos P_0, P_1, y por tanto todos los de la recta, (por definición de plano) están en el plano $z = z_0$, y esto mismo expresa la proporcionalidad [1], si se escribe en la forma:

$$x - x_0 = p(x_1 - x_0), \quad y - y_0 = p(y_1 - y_0),$$
$$z - z_0 = p(z_1 - z_0).$$

Así, pues, el sistema [2] representa *en todo caso* la recta determinada por los puntos $P_0 \neq P_1$, con el convenio siguiente: *Si algún denominador es nulo, se suprime la fracción y se iguala a 0 el numerador.*

EJEMPLOS: 1. Recta determinada por los puntos (—1, 3, 0), (0, 3, 2). Sus ecuaciones son

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z}{2} \quad \text{es decir:} \quad \begin{matrix} y = 3 \\ 2x - z = -2. \end{matrix}$$

En este caso la recta es paralela al plano XZ.

2. Los puntos (—1, 3, 0), (—1, 3, 2) determinan la recta paralela al eje Z:

$$\frac{x+1}{0} = \frac{y-3}{0} = \frac{z}{2} \quad \text{es decir:} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 3. \end{cases}$$

3. Aristas del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos (0, 1, —1), (1, 0, 2), (3, —2, 0). Las que unen estos tres vértices han sido calculadas en el número anterior. Las concurrentes en el origen son:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = z \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x = 3y \\ z = 0. \end{cases}$$

3. **Planos proyectantes. Ecuaciones reducidas de la recta.** — Recordando lo dicho sobre las ecuaciones con dos variables, la ecuación $ax + by = c$, que en el plano XY representa una recta, se satisface en E_3 por todas las ternas x, y, z, cuyo par

x, y satisface a la ecuación, con coordenada z *arbitraria*, es decir, representa todos los puntos del plano proyectante en la dirección Z y sólo ellos. En general: *Una ecuación lineal con dos variables representa el plano proyectante según la tercera dirección de la recta que esa ecuación representa en el respectivo plano coordenado.*

Cada una de las tres ecuaciones

$$[3] \qquad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \; ; \quad \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \; ; \quad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

en que se desdobla la proporcionalidad [1] que representa la recta P_0P_1 es, por tanto, la ecuación de un plano proyectante de la recta. Estas tres ecuaciones no son independientes, pues cada una es consecuencia de las otras dos y se deduce de ellas eliminando la variable común. Por tanto, se puede prescindir de una ecuación, quedando la recta definida por las otras dos. Tomando, por ejemplo, las dos últimas, ellas se pueden escribir en la forma

$$[4] \qquad x = mz + p \quad , \quad y = nz + q$$

cada una de las cuales representa un plano proyectante de la recta, el primero paralelamente al eje Y y el segundo paralelamente al eje X. Aparece así la recta como definida por la intersección de estos dos planos proyectantes.

Las ecuaciones [4] se llaman *ecuaciones reducidas* de la recta.

Si la recta es paralela al eje X no puede tener las [4] como ecuaciones reducidas, puesto que entonces no está determinado el plano proyectante según este eje. En tal caso hay que tomar las dos primeras ecuaciones [3], que pueden escribirse

$$[4'] \qquad y = m'x + p' \quad , \quad z = n'x + q'$$

y análogamente para las rectas paralelas al eje Y.

EJERCICIOS: 1. Hallar las ecuaciones reducidas de la recta que pasa por los puntos $P_0(0, -1, 2)$, $P_1(1, 3, -1)$.

2. Hallar las ecuaciones reducidas de la recta que pasa por el origen y por el punto $P_1(1, 1, -1)$.

3. Hallar el plano proyectante según el eje Z de la recta dada por sus ecuaciones reducidas $x = 2z - 3$, $y = -z + 1$.

4. **Coeficientes directores. Paralelismo de rectas.** — Una dirección en el espacio está determinada por un vector $V(a, b, c)$ cuyo origen es el origen de coordenadas y extremo el punto de coordenadas a, b, c. Si llevamos el vector V paralelamente a

sí mismo hasta tener el origen en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, el extremo resultará el punto P_1 de coordenadas

[5] $$x_1 = x_0 + a \quad , \quad y_1 = y_0 + b \quad , \quad z_1 = z_0 + c.$$

Por tanto, las ecuaciones de la recta P_0P_1, o sea, de la recta que pasa por P_0 y es paralela a la dirección del vector V, según [2] y [3] será

[6] $$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Recíprocamente, un sistema cualquiera de ecuaciones de la forma [4] representa siempre una recta que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralela al vector de componentes a, b, c. En efecto, cualquier punto $P(x, y, z)$ cuyas coordenadas satisfagan [6], es tal que el vector P_0P tiene componentes proporcionales a a, b, c, y por tanto P pertenece a la recta dicha.

El vector V se llama *vector director* de la recta [6], y a los números a, b, c se les llama *coeficientes directores*.

Con esta nomenclatura, el resultado anterior se expresa así:

Condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas es que sus coeficientes directores sean proporcionales.

OBSERVACIONES: 1. Según la definición, los coeficientes directores están solamente determinados salvo una constante de proporcionalidad; es decir, si a, b, c son coeficientes directores de una recta, los de cualquier terna λa, λb, λc $(\lambda \neq 0)$ también lo son. Esto es evidente, tanto por su significado geométrico como por observarse que en [6] si se dividen todas las igualdades por λ, las ecuaciones deben representar el mismo ente geométrico.

2. Todo sistema de ecuaciones de la forma [6], cualesquiera que sean a, b, c, representa una recta que pasa por P_0 y recíprocamente, las ecuaciones de cualquier recta por P_0 son de la forma [6]. Por esto se dice que [6] *son las ecuaciones generales de las rectas que pasan por* $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

EJEMPLOS: 1. La paralela por el origen a la recta

$$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-3}$$

es la recta

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3} \quad , \quad \text{o bien:} \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}.$$

2. La paralela a la misma recta por el punto $(\frac{1}{2}, -1, 2)$ es la recta

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{-1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 2}{-3}$$

cuyos planos proyectantes sobre los coordenados son:

$$2x + y = 0 \quad , \quad 3x - z = -\tfrac{1}{2} \quad , \quad 3y + 2z = 1.$$

3. Los coeficientes directores de los ejes X, Y, Z son, respectivamente,

$$(1, 0, 0) \quad , \quad (0, 1, 0) \quad , \quad (0, 0, 1),$$

pudiéndose sustituir el 1 por cualquier otro número no nulo.

4. Los coeficientes directores de una recta dada por sus ecuaciones reducidas [4], se obtienen escribiendo dichas ecuaciones en la forma [6], o sea

$$\frac{x - p}{m} = \frac{y - q}{n} = \frac{z}{1}.$$

Resulta así que los coeficientes directores son m, n, 1. Si las ecuaciones reducidas son las [4'], los cosenos directores son 1, m', n'.

5. **Razones simples.** — Si en la misma figura 137 llamamos λ a la razón simple (P_0P_1P), es decir:

$$[7] \qquad \lambda = \frac{x - x_0}{x - x_1} \quad \text{se deduce} \quad x = \frac{x_0 - \lambda x_1}{1 - \lambda}$$

y análogamente:

$$y = \frac{y_0 - \lambda y_1}{1 - \lambda} \qquad z = \frac{z_0 - \lambda z_1}{1 - \lambda}$$

tenemos así las coordenadas del punto que divide al segmento P_0P_1 en la razón λ.

Para $\lambda = -1$ resulta: *las coordenadas del punto medio de un segmento son los promedios de las coordenadas de sus extremos:*

$$[8] \qquad x = \tfrac{1}{2}(x_0 + x_1), \quad y = \tfrac{1}{2}(y_0 + y_1), \quad z = \tfrac{1}{2}(z_0 + z_1).$$

EJERCICIOS: 1. Condición necesaria y suficiente para que cuatro puntos sean vértices de un paralelogramo, es que dos de ellos tengan iguales sumas de coordenadas de igual nombre que los otros dos; las mitades de estas sumas son las coordenadas del centro.

2. Condición necesaria y suficiente para que ocho puntos sean vértices de un paralelepípedo, es que puedan aparearse de modo que las sumas de coordenadas de igual nombre sean iguales para los cuatro pares. Las mitades de estas cuatro sumas son las coordenadas del centro.

3. Dados cuatro puntos cualesquiera, no coplanarios, por sus coordenadas, completar todos los paralelepípedos que los tengan como vértices.

4. Dados dos pares de puntos por sus coordenadas, escribir las condiciones necesarias y suficientes para que estén armónicamente separados.

5. Dados los puntos P y Q por sus coordenadas, designese por $P + tQ$ al que tiene como coordenadas las de P, más las de Q multiplicadas por el parámetro t. Con esta notación, caractericense los puntos del segmento PQ, los puntos armónicamente separados por P y Q y los puntos que dividen al par PQ en la razón λ.

6. **Resultante de masas. Baricentros.** — Dados dos puntos pesados $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ de masas m_1 y m_2 respectivamente, se llaman *momentos* respecto de los planos YZ, ZX, XY a los números

$$[9] \quad M_x = m_1x_1 + m_2x_2, \quad M_y = m_1y_1 + m_2y_2, \quad M_z = m_1z_1 + m_2z_2$$

y *resultante* del par de masas es la masa $m_1 + m_2$ colocada en un punto $G(x, y, z)$ tal que sus momentos son aquellos tres momentos [9], es decir:

$$(m_1 + m_2)x = M_x \quad , \quad (m_1 + m_2)y = M_y \quad , \quad (m_1 + m_2)z = M_z.$$

El baricentro de los dos puntos pesados está, pues, unívocamente determinado por las fórmulas

$$[10] \qquad x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \quad , \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} \quad ,$$

$$z = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}.$$

Si son iguales las dos masas, el baricentro G es el punto medio, cuyas coordenadas son:

$$[11] \qquad x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad , \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

y en todo caso G es el punto que divide al segmento A_1A_2 en la razón $-m_2/m_1$ como salta a la vista en las expresiones [10], pues dividido por m_1 y llamado $-\lambda = m_2/m_1$ resulta

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \quad , \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \qquad z = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda}$$

es decir, las expresiones dadas en [7].

La palabra *masas* puede sustituirse por *coeficientes* y éstos pueden tener signos cualesquiera; si son números opuestos no existe baricentro G; pero se puede convenir en adoptar como tal el punto impropio de la recta A_1A_2.

Cualquiera que sea el número de puntos $A_1(x_1, y_1, z_1)$, ..., $A_n(x_n, y_n, z_n)$ con masas m_1, m_2, ..., m_n, el cálculo es análogo y las coordenadas del baricentro son

$$[12] \qquad x = \frac{\Sigma m_r x_r}{\Sigma m_r} \quad , \quad y = \frac{\Sigma m_r y_r}{\Sigma m_r} \quad , \quad z = \frac{\Sigma m_r z_r}{\Sigma m_r}.$$

Si las masas son iguales el baricentro se llama también *centro de distancias medias* y sus coordenadas son los promedios de las respectivas coordenadas de los n puntos, es decir:

$$[13] \qquad x = \frac{1}{n} \Sigma x_r \quad , \quad y = \frac{1}{n} \Sigma y_r \quad , \quad z = \frac{1}{n} \Sigma z_r.$$

§ 35. El plano. Propiedades proyectivas y afines

1. **Ecuación general del plano.** — La ecuación general de primer grado:

$$[1] \qquad Ax + By + Cz = D$$

representa un conjunto de puntos que es un plano, porque cumple las condiciones características que en geometría sirven de definición al plano:

1º) Si $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es uno de sus puntos, es $D = Ax_0 + + By_0 + Cz_0$, luego la ecuación [1] se puede escribir así:

$$[2] \qquad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

y como los puntos de la recta P_0P_1 están caracterizados por las condiciones

$$[3] \qquad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} = p$$

si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ satisface a [2], es decir:

$$[4] \qquad A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = 0$$

también la satisface todo P de la recta, puesto que el polinomio [2] es el [4] multiplicado por p.

2º) La ecuación [1] no representa una recta, puesto que x é y pueden tomar valores arbitrarios.

Como, además, todo punto del espacio no la satisface, tal conjunto de puntos es un plano [1]. Ahora veremos que esta ecuación [1] representa *todos* los planos posibles del espacio E_3.

2. **Plano determinado por tres puntos.** — Dados tres puntos no alineados (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), la ecuación:

$$[5] \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

es de primer grado y se satisface por las coordenadas de los tres puntos; luego, representa el plano determinado por éstos.

Otro modo de escribir la misma ecuación es:

$$[6] \qquad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

que se deduce restando la segunda fila de cada una de las otras.

---

[1] Basta recordar el postulado fundamental que define la recta E_1, el plano E_2, el espacio E_3.

EJEMPLO. Plano determinado por los puntos (2, —1, 5), (4, 0, —3), (1, 2, 1).

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-5 \\ 2 & 1 & -8 \\ -1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

NOTA: Falta examinar el caso en que la ecuación [5] o su equivalente [6] tenga todos los coeficientes nulos, es decir, sean nulos los tres menores complementarios de los elementos de la primera fila [6] y por tanto se verifique:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1};$$

pero entonces, en virtud de [3] están alineados los tres puntos; luego, tal caso no puede presentarse en la hipótesis de terna no alineada.

3. **Ecuación segmentaria del plano.** — Si los cuatro coeficientes A, B, C, D son distintos de 0, obtenemos una interpretación geométrica interesante. Haciendo $y = 0$, $z = 0$, el segmento a que el plano intercepta con el eje x, o sea la abscisa del punto de intersección con este eje, viene expresada así:

$$a = \frac{D}{A}.$$

Análogamente:

$$b = \frac{D}{B}, \quad c = \frac{D}{C}.$$

Luego, dividiendo por D la ecuación general [1], resulta ésta, que puede formarse directamente, conocidos a, b, c:

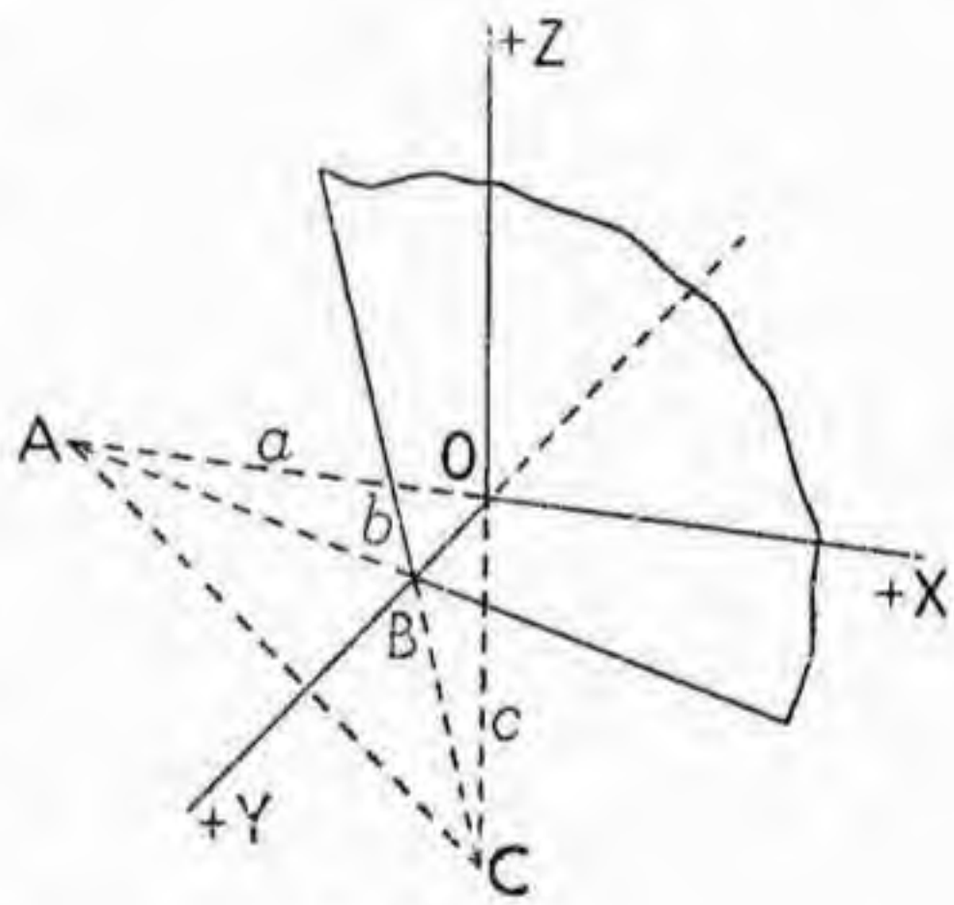

Fig. 138.

$$[7] \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

EJEMPLO. Plano que intercepta sobre los ejes segmentos 2, +3, —1. La ecuación de dicho plano es:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - z = 1.$$

4. **Paralelismo entre planos.** — La ecuación [7] es válida siempre que el plano no pase por el origen, aunque sea paralelo a uno o a dos ejes coordenados. Por ejemplo, si es paralelo al eje Z, su ecuación es de la forma $Ax + By = D$ y las abscisas de sus puntos de intersección con los ejes X, Y serán

$a = D/A$, $b = D/B$ respectivamente, valores que introducidos en la ecuación del plano dan para ésta la expresión $x/a + y/b = 1$, es decir, la misma [7] para el caso $c = \infty$. Análogamente, si el plano es paralelo a los dos ejes Y, Z, su ecuación será de la forma $x = a$, que resulta también de [7] al hacer $b = \infty$, $c = \infty$.

Sentado esto consideremos dos planos

$$[8] \qquad Ax + By + Cz = D \quad , \quad A'x + B'y + C'z = D'$$

ninguno de los cuales pase por el origen. La condición para que sean paralelos será que los segmentos que intercepten en los ejes coordenados sean proporcionales. Es decir, que sea

$$[9] \qquad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

o bien, sustituyendo los valores de estos segmentos en función de los coeficientes de los planos, resulta

$$[10] \qquad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

Si alguno de los planos pasa por el origen, por ejemplo si es $D = 0$, no se puede escribir [9] y por tanto falla la demostración anterior. En este caso basta hacer una traslación de los ejes coordenados para colocar el origen fuera de los dos planos. Por ejemplo, si el punto $(x_0, 0, 0)$ no está contenido en ninguno de los dos planos, traslademos los ejes paralelamente hasta llevar el origen a este punto. Las fórmulas de transformación son

$$x' = x - x_0 \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z$$

y por tanto las ecuaciones de los dos planos será ahora (habiendo supuesto $D = 0$),

$$[11] \qquad \begin{aligned} A(x' + x_0) + By' + Cz' &= 0 \quad , \\ A'(x' + x_0) + B'y' + C'z' &= D' \end{aligned}$$

o sea

$$[12] \qquad \begin{aligned} A'x' + By' + Cz' &= -Ax_0 \quad , \\ A'x' + B'y' + C'z' &= D' - A'x_0. \end{aligned}$$

Por haber supuesto que el punto $(x_0, 0, 0)$ no estaba en ninguno de los planos dados, los términos independientes son ahora distintos de cero, y como los coeficientes de las variables no se han modificado, resulta como condición de paralelismo la misma [10] que queda, por tanto, probada en todos los casos.

Resulta así que el paralelismo no depende de los términos independientes D, D', sino únicamente de los coeficientes de las variables, los cuales se llaman, por esta razón, *coeficientes directores* del plano. Obsérvese que estos coeficientes directores,

puesto que se puede multiplicar toda la ecuación del plano por un mismo factor, resultan sólo definidos salvo un factor de proporcionalidad.

En resumen:

La condición necesaria y suficiente para que los planos

$$Ax + By + Cz = D \quad , \quad A'x + B'y + C'z = D'$$

sean paralelos, es que se cumpla la proporcionalidad entre sus coeficientes directores, o sea,

$$[13] \qquad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

De aquí:

La ecuación del plano que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *y es paralelo al plano* $Ax + By + Cz = D$, *es*

$$[14] \qquad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

En efecto, este plano pasa por P_0 y tiene los mismos coeficientes directores del plano dado.

5. Paralelismo entre rectas y planos. — Sea la recta

$$[15] \qquad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

y el plano

$$Ax + By + Cz = D.$$

Si la recta es paralela al plano, ella debe estar contenida en el plano paralelo al mismo, trazado por el punto P_0 de la recta, plano cuya ecuación es la [14]. Por tanto [14] debe satisfacerse para todos los valores de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ que satisfacen [15], es decir, debe cumplirse

$$[16] \qquad Aa + Bb + Cc = 0.$$

Por consiguiente:

La condición necesaria y suficiente para el paralelismo entre el plano de coeficientes directores A, B, C *y la recta de coeficientes directores* a, b, c, *es la* [16].

a) *Ecuación del plano que pasa por un punto y es paralelo a dos rectas dadas.* Sea el punto P_0 y dos rectas de coeficientes directores (a, b, c), (a', b', c') respectivamente. La ecuación general de un plano que pase por P_0 es la [14] y si es paralelo a las dos rectas deben cumplirse las condiciones

$$[17] \qquad Aa + Bb + Cc = 0 \quad , \quad Aa' + Bb' + Cc' = 0.$$

Estas dos ecuaciones permiten hallar los coeficientes A, B, C (salvo un factor de proporcionalidad), y sustituyendo en [14] tendremos la ecuación del plano buscado.

De manera más sintética, eliminando A, B, C entre las tres ecuaciones homogéneas [14], [17], resulta que *la ecuación del plano que pasa por un punto P_0 y es paralelo a dos rectas dadas de coeficientes directores* (a, b, c), (a', b', c'), es

$$[18] \qquad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0.$$

b) *Ecuación del plano que contiene a una recta y es paralelo a otra.* Se desea la ecuación del plano que contiene a la recta

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

y es paralelo a la

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}.$$

Si $Ax + By + Cz - D = 0$ es el plano buscado, se deben cumplir las condiciones

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D &= 0 \\ Aa + Bb + Cc &= 0 \\ Aa_1 + Bb_1 + Cc_1 &= 0 \end{aligned}$$

pues debe pasar por el punto (x_0, y_0, z_0) de la primera recta y cumplir la condición de paralelismo para las dos. Este sistema de ecuaciones permite determinar los coeficientes A, B, C, D (dividiendo por uno de ellos queda un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas), o bien, eliminando los mismos entre esas ecuaciones y la del plano, resulta como solución

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ a & b & c & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Haces de planos. La recta como intersección de dos planos. — Dados dos planos de ecuaciones

$$[19] \qquad \begin{aligned} P_1 &\equiv A_1x + B_1y + C_1z - D_1 = 0 \quad , \\ P_2 &\equiv A_2x + B_2y + C_2z - D_2 = 0 \end{aligned}$$

cualquier ecuación de la forma

$$[20] \qquad P_1 + \lambda P_2 = 0$$

representa otro plano que pasa por la recta r de intersección de los dos, puesto que en efecto, es una ecuación lineal (y por tanto representa un plano) y además se satisface para todos los puntos que anulan a P_1 y a P_2.

Recíprocamente, cualquier plano P que pase por r puede ponerse en la forma [20]; en efecto, basta tomar un punto cualquiera $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de P y obtener λ por la condición

$$[21] \qquad \begin{aligned} &(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 - D_1) + \\ &+ \lambda(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 - D_2) = 0. \end{aligned}$$

Si λ_0 es la raíz de esta ecuación, el plano $P_1 + \lambda_0 P_2 = 0$ será el mismo P, por contener ambos a la recta r y al punto M_0.

La ecuación [20] se dice por esta razón que es la ecuación del *haz de planos* de arista r.

EJEMPLOS: 1. Hallar la ecuación del plano que pasa por el origen y por la recta de intersección de los dos planos

$$2x - 3y - z - 2 = 0 \quad , \quad x + 5y - 2z - 2 = 0 .$$

Escribiendo la ecuación [21] para $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, resulta $\lambda = -1$, y por tanto el plano buscado es $x - 8y + z = 0$.

2. Hallar la ecuación del plano que pasa por la misma recta anterior y por el punto (1, —2, 1). La ecuación [21] da ahora $\lambda = 5/13$ y por tanto el plano buscado es $31x - 14y - 23z - 36 = 0$.

Las ecuaciones [19] pueden tomarse también como definidoras de la recta r. En este caso, si se quieren las ecuaciones reducidas, o sea, las ecuaciones de los planos proyectantes en las direcciones de los ejes (§ 34-3), basta eliminar cada una de las variables entre ambas ecuaciones. Por ejemplo, despejando x é y resulta

$$[22] \qquad x = -\frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} z + \frac{\begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} ,$$

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} z + \frac{\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

que son las ecuaciones reducidas. Si el denominador de estas expresiones fuese nulo, se despejaría otro par de variables; si en todos los casos los denominadores resultasen nulos, significaría que los coeficientes de las variables en las ecuaciones [19] son proporcionales y por tanto que los planos son paralelos, no existiendo recta propia de intersección.

Las ecuaciones [22] se pueden escribir en la forma

$$[23] \qquad \frac{x - \alpha}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - \beta}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

siendo α, β los términos independientes de [22]. De aquí:

Los coeficientes directores de la recta determinada por los planos [19] *son los denominadores de las razones* [23].

EJEMPLO. Sea la recta de ecuaciones

$$3x - 2y + z - 1 = 0 \quad , \quad x + y - z - 2 = 0.$$

Eliminando sucesivamente z, y, x resultan las ecuaciones

$$4x - y - 3 = 0 \quad , \quad 5x - z - 5 = 0 \quad , \quad 5y - 4z - 5 = 0$$

que son las ecuaciones de los planos proyectantes paralelamente a los tres ejes. Cada dos de estas ecuaciones pueden tomarse como ecuaciones reducidas de la recta. Los coeficientes directores son 1, 4, 5.

EJERCICIOS: 1. Hallar el plano que proyecta desde el origen a la recta de intersección de los planos $2x + 3y + z - 1 = 0$, $3x - y - z - 2 = 0$. Íd., íd. desde el punto (1, 0, 2).

2. Trazar por el origen una secante a dos rectas dadas. (Basta obtener los dos planos proyectantes de ambas).

3. Trazar por el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ una recta paralela a la de intersección de los dos planos [19].

§ 36. POPIEDADES MÉTRICAS EN COORDENADAS ORTOGONALES

1. Distancia entre dos puntos. — Las fórmulas obtenidas en los números anteriores, referentes a propiedades *afines* de las figuras (paralelismo, incidencia), valen lo mismo en coordenadas ortogonales u oblicuas. En cambio, para el estudio de las propiedades *métricas* (distancias, ángulos, volúmenes), en las que ahora vamos a entrar, las coordenadas ortogonales simplifican mucho los cálculos. Por tanto, en todo este parágrafo vamos a referirnos exclusivamente a coordenadas ortogonales. Para hallar la distancia entre dos puntos P_0, P_1, observemos que los planos paralelos a los coordenados trazados por ellos forman un *ortoedro*, es decir, un paralelepípedo recto rectángulo; las tres aristas que concurren en P_0 tienen longitudes $x_1 - x_0$; $y_1 - y_0$; $z_1 - z_0$ y la diagonal r por el teorema de Pitágoras, viene expresada así (fig. 139):

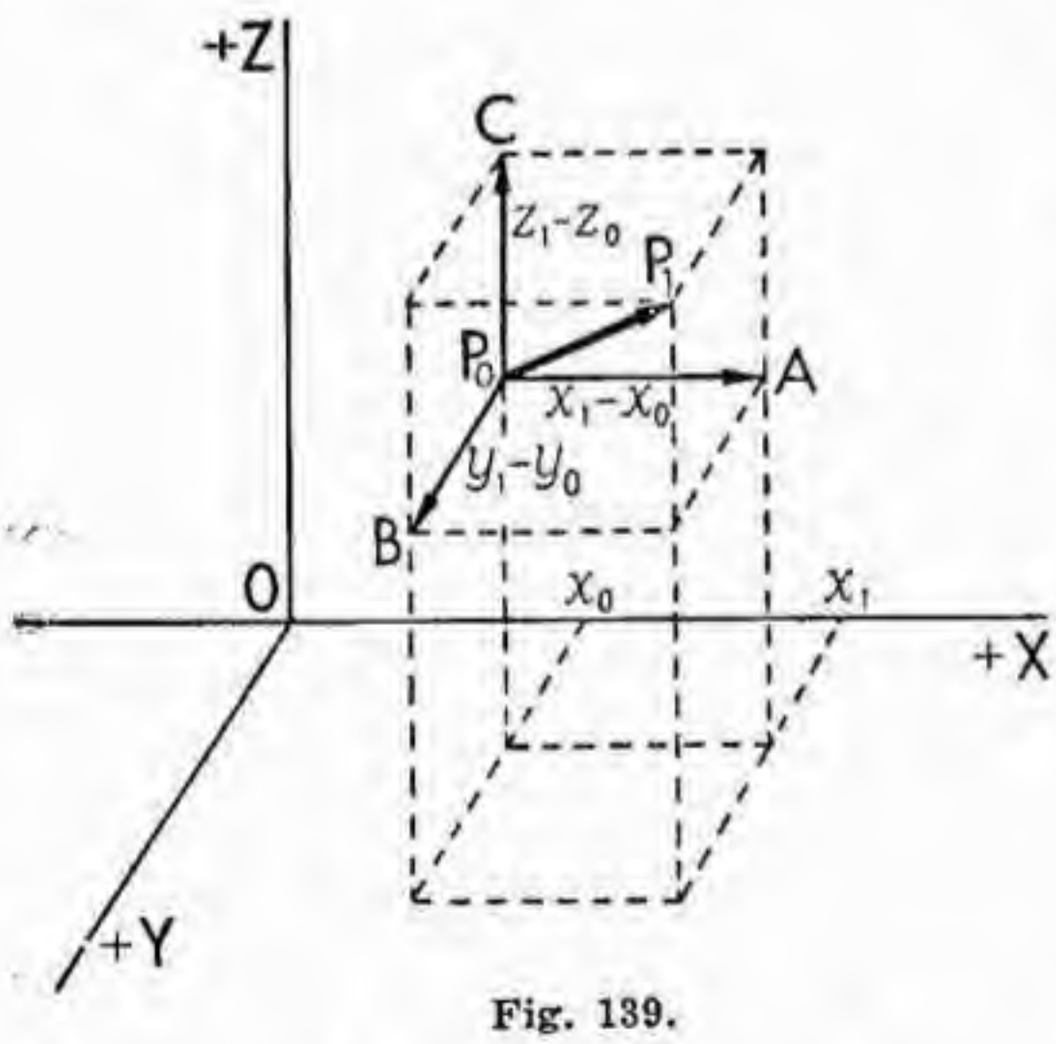

Fig. 139.

La distancia entre dos puntos está dada por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias de coordenadas correspondientes.

[1] $$r^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2.$$

2. **Cosenos directores de una semirrecta.** — La semirrecta P_0P_1 forma con cada semieje positivo un ángulo; los cosenos de estos tres ángulos se llaman *cosenos directores* de la semirrecta y también del vector P_0P_1; los representamos por α, β, γ. La semirrecta opuesta y el vector opuesto tienen cosenos directores opuestos: $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$.

Como P_0A es la proyección de P_0P_1 sobre la paralela al semieje x, y análogamente las otras aristas, resulta:

$$x_1 - x_0 = r\alpha \quad , \quad y_1 - y_0 = r\beta \quad , \quad z_1 - z_0 = r\gamma \quad ,$$

siendo $r > 0$. Elevando al cuadrado y teniendo en cuenta [1] resulta:

$$[2] \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \quad ,$$

es decir, *la suma de los cuadrados de los tres cosenos directores es igual a la unidad.*

Como los coeficientes directores de la recta P_0P_1 son $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0$, resulta además que *los coeficientes directores son proporcionales a los cosenos directores.*

Por tanto, dados los coeficientes a, o, c, se verifica

$$a = k\alpha \quad , \quad b = k\beta \quad , \quad c = k\gamma \quad ,$$

de donde, sumando los cuadrados, resulta

$$k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Es decir, *los cosenos directores se deducen de los coeficientes directores dividiéndolos por la raíz cuadrada de la suma de sus cuadrados.* Según el signo que adoptemos para k, resultan los cosenos de una u otra semirrecta.

Para todos los problemas de *paralelismo, perpendicularidad,* etc., bastan los *coeficientes directores*; para las medidas de *ángulos* se precisa obtener los *cosenos.*

Los coeficientes directores de la recta dada como intersección de dos planos se calculan cómodamente como se indicó en el nº 6 del parágrafo anterior, o bien obteniendo dos puntos de la recta, por ejemplo sus trazas sobre dos planos coordenados; las diferencias de coordenadas son los tres coeficientes directores. Según el orden en que se resten resultan los de una u otra semirrecta.

EJEMPLO. Calcular los ángulos que forma con los tres ejes, la bisectriz del primer triedro: $+x$, $+y$, $+z$.

Como los ángulos son iguales, los coeficientes directores son 1, 1, 1; luego los cosenos se calculan dividiendo por $\sqrt{3}$ y buscando en la tabla de cosenos el ángulo cuyo coseno es $1/\sqrt{3}$ resulta el ángulo buscado, que vale 54°44′.

3. Ángulo de dos rectas. — Dadas dos semirrectas r y r' de origen O, cuyos cosenos directores sean (α, β, γ) y $(\alpha', \beta', \gamma')$, la proyección sobre r' del vector de longitud 1 sobre r, o sea $\cos\omega$, es la suma de las proyecciones de sus tres componentes, es decir (fig. 140):

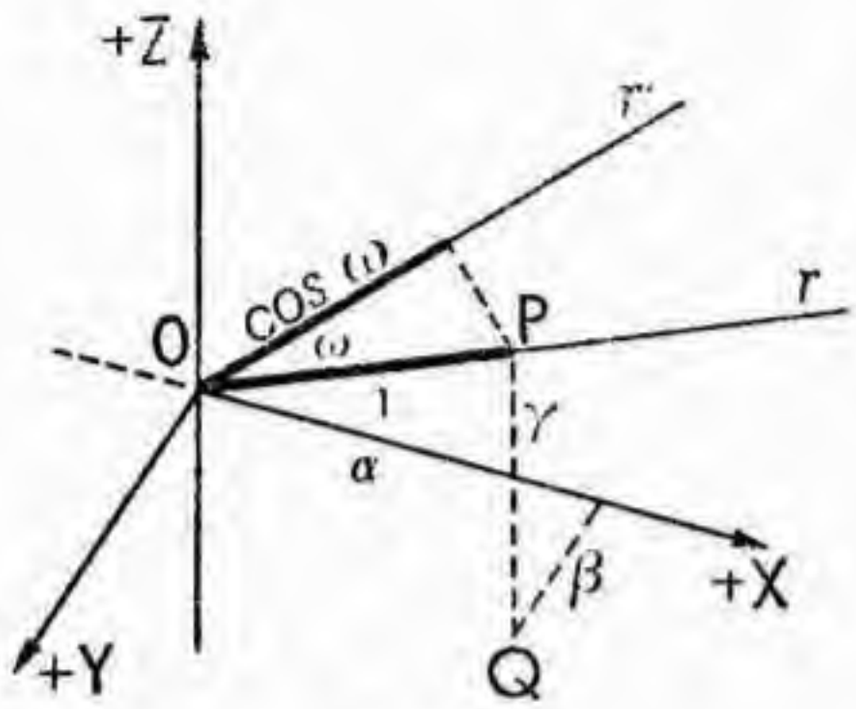

Fig. 140.

$$[3] \qquad \cos\omega = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'.$$

Por tanto: *El coseno del ángulo de dos semirrectas es la suma de los productos de los cosenos directores de una por los de la otra.*

La condición de perpendicularidad de dos rectas es que la suma de los productos de los respectivos coeficientes directores sea nula: $aa' + bb' + cc' = 0$.

Nótese que para la perpendicularidad basta considerar coeficientes directores, mientras que para calcular el ángulo son precisos los cosenos.

4. Ángulo de dos planos; paralelismo y perpendicularidad. — La ecuación general del plano es

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

siendo (x_0, y_0, z_0) un punto del mismo; pero $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ son los coeficientes directores de todas las rectas del plano, luego esta relación expresa que la recta de coeficientes directores (A, B, C) o proporcionales a ellos, es perpendicular a toda recta del plano, es decir, perpendicular al plano. Por tanto:

La condición necesaria y suficiente para que una recta sea perpendicular a un plano, es que sus coeficientes directores sean proporcionales a los coeficientes directores del plano.

Para el cálculo de ángulos, todo plano se puede sustituir por una recta normal, es decir, por una recta que tiene como coeficientes directores los del plano. Dos planos son paralelos, si lo son sus normales, luego obtenemos nuevamente:

La condición del paralelismo de dos planos es la proporcionalidad de sus coeficientes directores.

Dos planos son perpendiculares si lo son sus normales, luego:

La condición de perpendicularidad de dos planos, es que la suma de los productos de sus coeficientes directores sea nula.

Más general: *El coseno del ángulo de dos planos es la suma de los productos de los cosenos directores de ambos planos.*

NOTA: Llamando *producto escalar* de dos ternas a la suma de productos de las componentes homólogas, se abrevia el enunciado de ambos teoremas.

5. Cuadro sinóptico de las relaciones entre rectas y planos. — Resulta así el cuadro sinóptico siguiente, que comprende los seis casos posibles:

Elementos *homogéneos:*

paralelismo: proporcionalidad de coeficientes directores.
perpendicularidad: prod. escalar de coeficientes directores nulo.

$$r \parallel r' \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \qquad \pi \parallel \pi' \quad \frac{A}{A'} \quad \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

$$r \perp r' \quad aa' + bb' + cc' = 0 \qquad \pi \perp \pi' \quad AA' + BB' + CC' = 0$$

Elementos *heterogéneos:*

paralelismo: prod. escalar de coeficientes directores nulo.
perpendicularidad: proporcionalidad de coeficientes directores.

$$r \parallel \pi \qquad Aa + Bb + Cc = 0$$

$$r \perp \pi \qquad \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}.$$

6. Ecuación normal y distancia de un punto a un plano. — Si son a, b, c los segmentos que intercepta en los ejes el plano

$$Ax + By + Cz = D$$

la ecuación se puede escribir así:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Llamando p a la distancia absoluta de O al plano, y α, β, γ a los cosenos directores del vector OP, es

$$p = a\alpha \quad ; \quad p = b\beta \quad ; \quad p = c\gamma.$$

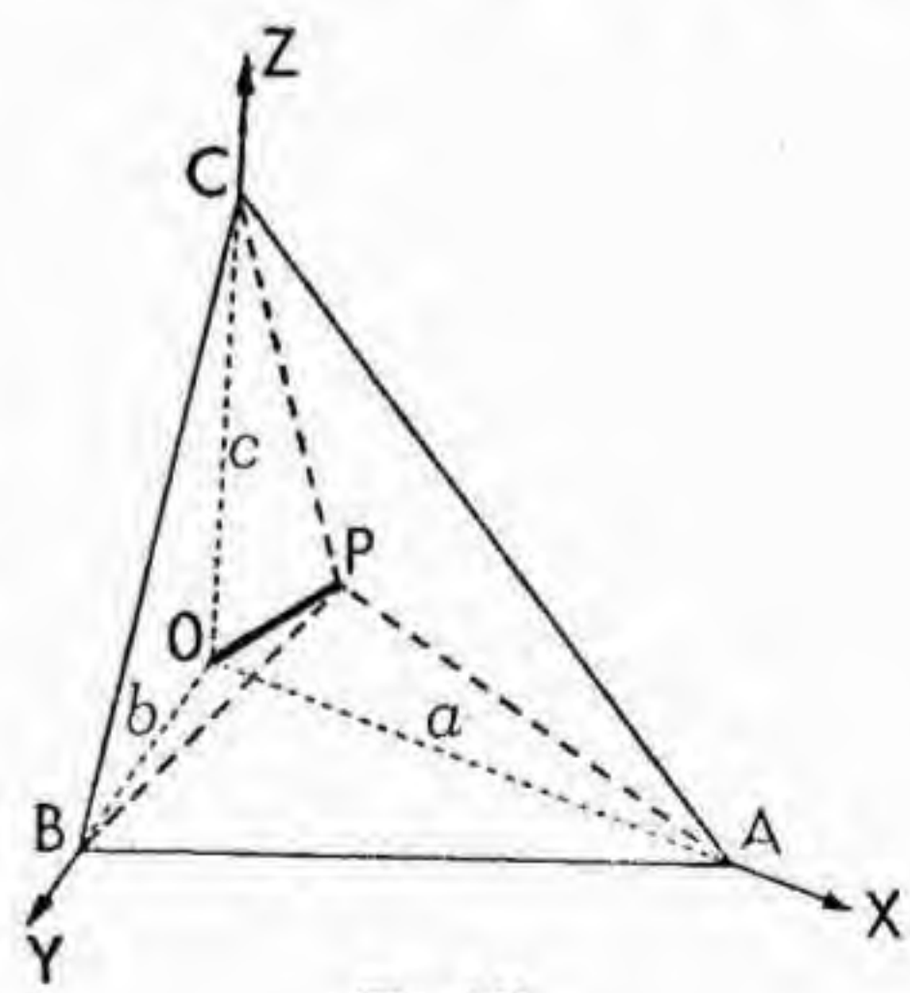

Fig. 141.

Como cosenos directores del plano orientado adoptamos los de su vector normal, es decir, α, β, γ, y no sus opuestos. Sustituyendo, resulta:

$$[4] \qquad x\alpha + y\beta + z\gamma = p.$$

Esta ecuacion se llama *normal;* sus coeficientes, en vez de

ser los coeficientes directores A, B, C, son los cosenos directores α, β, γ, es decir, se deducen de ellos, dividiéndolos por $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, de modo que el segundo miembro resulte *positivo*. Por tanto:

Para formar la ecuación normal del plano basta dividir la ecuación ordinaria por la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los coeficientes directores, con signo + ó —, de modo que resulte positivo el segundo miembro constante. Éste expresa la distancia del origen al plano.

NOTAS En los haces de planos paralelos conviene adoptar para todos éstos los coeficientes α, β, γ de uno (lo que equivale a fijar un sentido en la normal) y entonces toma p valores positivos o negativos según la posición del plano.

EJEMPLO. Sea el plano $2x - 3y + 6z = 5$.

Esta ecuación no es normal, pues la suma de los cuadrados de los coeficientes directores es $\sqrt{4+9+36}=7$, pero se convierte en normal dividiendo por 7 y resulta:

$$\frac{2x}{7} - \frac{3y}{7} + \frac{6z}{7} = \frac{5}{7}.$$

Los cosenos directores son: 2/7, —3/7, 6/7, y la distancia del origen al plano es 5/7.

La distancia entre dos planos paralelos:

[5]
$$\begin{aligned} Ax + By + Cz &= D \\ Ax + By + Cz &= D' \end{aligned}$$

es por consiguiente $D - D'$ si estas ecuaciones están en forma normal, como se ha explicado en la nota.

La distancia del punto (x_0, y_0, z_0) al plano [5] se obtiene trazando por este punto el plano paralelo:

[6] $$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

o sea $$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

y la distancia del punto al plano [5] es la distancia entre los planos [5] y [6], es decir:

[7] $$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Luego, *la distancia de un punto a un plano es el valor que toma en ese punto el cuatrinomio de la ecuación normal.*

La distancia dada por [7] resulta *positiva* si el punto está a distinto lado que el origen respecto del plano.

EJERCICIOS: 1. Obtener las ecuaciones de los planos bisectores de un diedro.

2. Calcular la distancia de un punto a una recta.

7. **Distancia entre dos rectas.** — Si solamente se desea calcular la distancia mínima, basta trazar por cada una el plano paralelo a la otra y calcular la distancia entre ambos planos. Sean las dos rectas:

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}, \quad \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$

dichos planos tienen las ecuaciones

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

y llamando A_1, B_1, C_1, D_1 a los coeficientes del primero; A_2, B_2, C_2, D_2 a los del segundo, la distancia buscada es $D_1 - D_2$ si ambas están normalizadas, es decir, si se han dividido por la raíz cuadrada de la suma de los coeficientes directores.

8. **Área de un triángulo.** — Si el triángulo ABC tiene un lado BC paralelo al plano XY, la proyección ortogonal sobre éste es otro triángulo de base $B'C' = BC$ y altura $A'P' = AP\omega$, si es ω el coseno de la inclinación del plano ABC sobre el XY, ángulo igual a la inclinación de la altura. Entre el área de ABC y la de su proyección existe, por tanto, la relación $\text{Ar. } A'B'C' = (\text{Ar. } ABC)\omega$.

Si ABC no tiene ningún lado paralelo al plano XY, trazando por el vértice de altura intermedia el plano paralelo al XY, queda dividido en dos triángulos que tienen base paralela a este plano, y como la ley del coseno vale para cada proyección, también subsiste para la suma por descomposición en triángulos; y lo mismo sucede para cada polígono y su proyección ortogonal sobre un plano. Resulta así este teorema general, de frecuente uso, y que ahora tendrá inmediata aplicación:

La proyección ortogonal de un polígono sobre cualquier plano no perpendicular a él, tiene como área la del polígono proyectado por el coseno del ángulo de inclinación.

Dado un triángulo cuyos vértices tienen las coordenadas ortogonales (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), sus proyecciones sobre los tres planos coordenados son tres triángulos cuyas áreas, ya calculadas en § 10-6, son:

$$[8] \quad S_x = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad S_y = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$S_z = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

El área S del triángulo $A_1A_2A_3$ está relacionada con éstas

por la ley del coseno, es decir, llamado α, β, γ, a los cosenos directores del plano del triángulo, se verifica:

$$S_x = S\alpha \quad , \quad S_y = S\beta \quad , \quad S_z = S\gamma$$

de donde, cuadrando y sumando, resulta la expresión del área del triángulo:

$$[9] \qquad S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

y los sumandos están dados por las fórmulas [8].

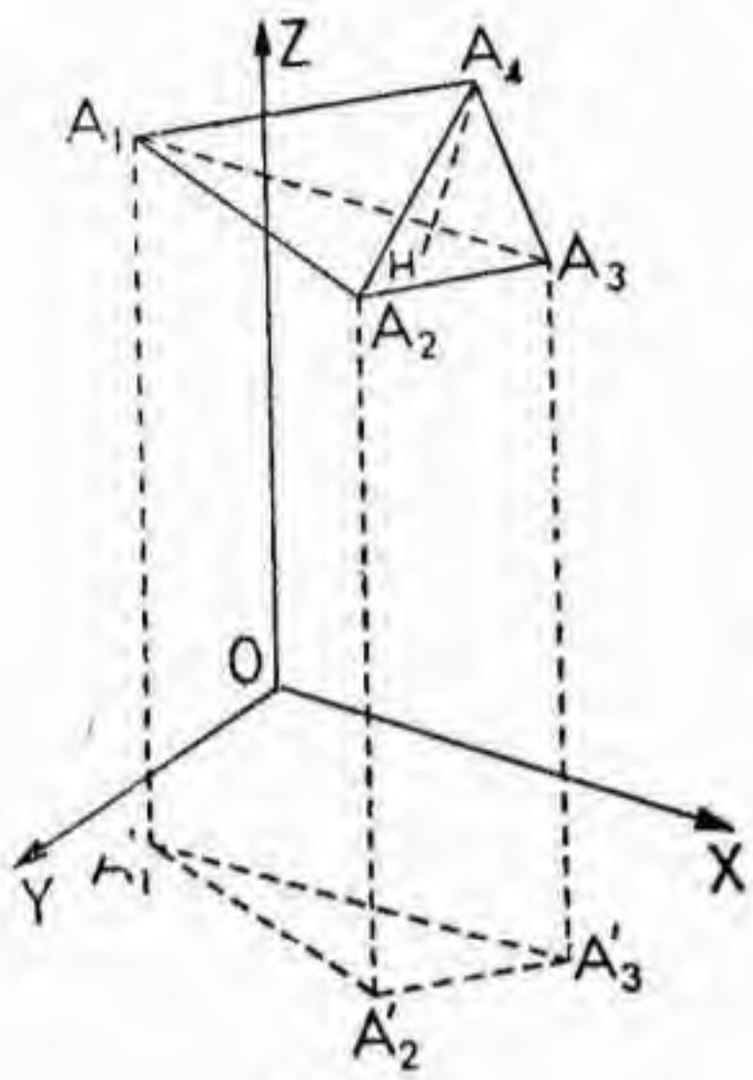

Fig. 142.

9. **Volumen del tetraedro.** — Si sus vértices tienen las coordenadas (fig. 142):

$$A_1(x_1, y_1\, z_1), \; A_2(x_2, y_2, z_2),$$
$$A_3(x_3, y_3, z_3), \; A_4(x_4, y_4, z_4)$$

la ecuación del plano $A_1A_2A_3$ es:

$$[10] \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

cuyos coeficientes directores

$$A_x = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} , \quad A_y = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} , \quad A_z = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

tienen el significado visto en [8], es decir, son los duplos de las áreas de los triángulos proyecciones del $A_1A_2A_3$, siendo por tanto

$$[11] \qquad \text{Ar. } (A_1A_2A_3) = \frac{2}{1} \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.$$

El volumen del tetraedro viene expresado así:

$$\text{Vol. } (A_1A_2A_3A_4) = \frac{1}{3} \text{ Ar. } (A_1A_2A_3) \text{ . Altura}$$

y como la altura o distancia del punto A_4 al plano [10] según (§ 36-6) es el valor numérico obtenido en el polinomio [10] al sustituir las coordenadas $(x_4\, y_4\, z_4)$ divididos por la raíz cuadrada [11], resulta:

El volumen del tetraedro es:

$$\text{Vol. } (A_1A_2A_3A_4) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}.$$

EJEMPLO. Si los vértices son $(0, -\frac{1}{2}, 2)$, $(1, -1, 2)$, $(2, 0, 3)$, $(1, -1, 0)$, el volumen del tetraedro es

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -1/2 & 2 \\ 0 & -0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}.$$

Obsérvese que la condición dada obtenida en § 35-2 puede expresarse como caso particular de la [10] ahora demostrada, diciendo: *Condición necesaria y suficiente para que cuatro puntos sean coplanarios, es que el volumen del tetraedro sea nulo.*

§ 37. CAMBIOS DE COORDENADAS

1. **Caso general.** — El problema del cambio de sistema de ejes coordenados se plantea en geometría del espacio de la misma forma que en geometría plana.

Dados dos sistemas cualesquiera de ejes coordenados, se trata de encontrar las fórmulas que nos expresen las coordenadas de un punto del espacio en un sistema en función de sus coordenadas en el otro.

El caso más simple es el de la *traslación de ejes*, es decir, cuando los ejes OX, OY y OZ de un sistema son paralelos a los ejes O′X′, O′Y′ y O′Z′ del otro. Este problema se trata de la misma forma que el correspondiente de geometría plana y las fórmulas del cambio son

[1] $$x = x_0 + x' \quad , \quad y = y_0 + y' \quad , \quad z = z_0 + z'$$

en donde x_0, y_0, z_0 son las coordenadas del origen O′ con respecto al sistema de origen O.

Pasemos ahora al caso en que los dos sistemas tengan el mismo origen O pero direcciones distintas de los ejes. La determinación de los ejes OX′, OY′ y OZ′ se hace mediante los coeficientes directores de los ejes de un sistema con respecto al otro. Sean a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'', los coeficientes directores de los ejes OX′, OY′ y OZ′ con respecto al sistema OX, OY y OZ. Podemos tomar como coeficientes directores

las coordenadas de los puntos situados sobre los semiejes positivos OX′, OY′ y OZ′ a la distancia 1 del origen.

Sea M un punto cualquiera del espacio y x, y, z sus coordenadas en el sistema OXYZ. Consideremos la quebrada OPQM, en donde PQ es paralela a OY′ y QM paralela a OZ′. Proyectemos esa quebrada sobre el eje OX paralelamente al plano YZ (fig. 143).

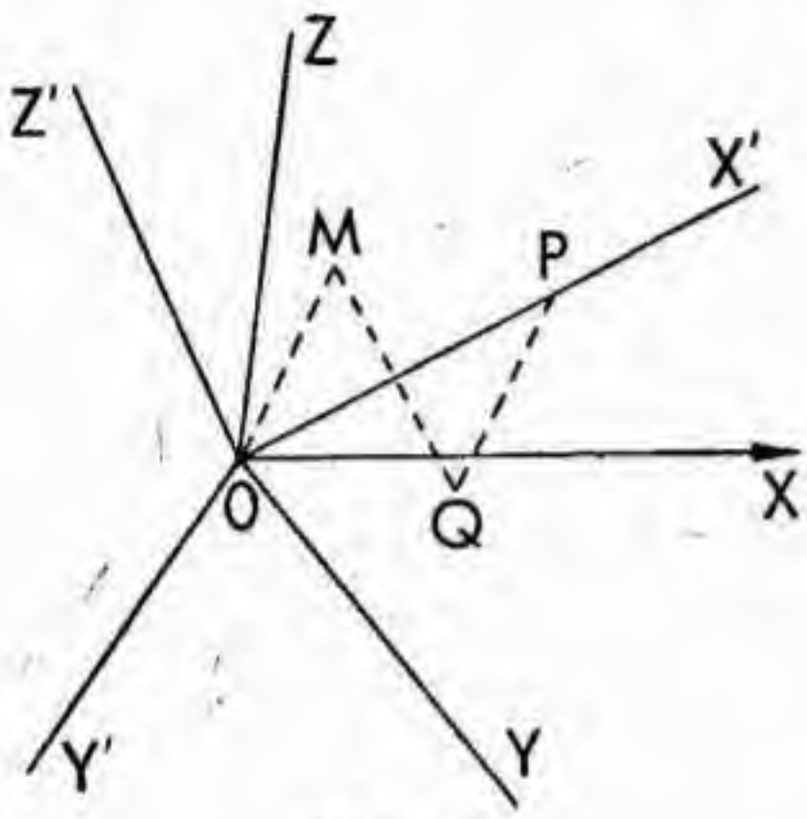

Fig. 143.

Las proyecciones de OP, PQ y QM son respectivamente ax', by' y cz'; la suma de estas proyecciones es igual a x, proyección de OM, es decir que se tiene $x = ax' + by' + cz'$. Repitiendo este razonamiento en las proyecciones sobre OY paralelamente a XZ y sobre OZ paralelamente a XY se *obtienen las fórmulas del cambio de coordenadas:*

$$[2] \qquad \begin{aligned} x &= ax' + bu' + cz' \\ y &= a'x' + b'y' + c'z' \\ z &= a''x' + b''y' + c''z'. \end{aligned}$$

El caso general se resuelve haciendo primero una traslación de ejes al nuevo origen aplicando las fórmulas [1] y a éstas aplicándole de nuevo las fórmulas [2]. Así se obtiene la *fórmula de la transformación general de coordenadas*:

$$[3] \qquad \begin{aligned} x &= x_0 + ax' + by' + cz' \\ y &= y_0 + a'x' + b'y' + c'z' \\ z &= z_0 + a''x' + b''y' + c''z'. \end{aligned}$$

El resultado más importante que se deduce de estas fórmulas es que las mismas son *expresiones de primer grado en x', y' y z' y de primer grado y homogéneas si el origen no varía.*

2. **Caso de sistemas ortogonales.** — Observemos que las fórmulas [3] no tienen la forma más general de las expresiones de primer grado, ya que los *coeficientes* a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' no pueden ser cualesquiera, sino que están ligados por ciertas relaciones que expresan que son los coeficientes directores de los ejes del sistema dado. Nos limitaremos a estudiar estas relaciones *en el caso en que ambos sistemas sean ortogonales.* Es claro que basta considerar el caso en que ambos sistemas tienen el mismo origen. Los coeficientes de la transformación son ahora los cosenos directores de los ejes, luego están sujetos a cumplir las condiciones

$$
[4] \qquad \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1. \end{aligned}
$$

Por otra parte los ángulos que forman entre sí los ejes OX′, OY′ y OZ′ son rectos, luego sus cosenos son nulos, lo que nos conduce a otras tres relaciones entre los coeficientes

$$
[5] \qquad \begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0 \\ aa'' + bb'' + cc'' &= 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0. \end{aligned}
$$

Estas seis relaciones que expresan propiedades distintas son independientes, luego siendo nueve los coeficientes de la transformación y estando éstos obligados a cumplir seis relaciones, se deduce que *la transformación depende de tres parámetros arbitrarios.*

Si se quieren expresar los nueve coeficientes de manera explícita en función de estos tres parámetros arbitrarios, un cálculo un poco largo, da el siguiente resultado:

$$
[6] \qquad \begin{aligned} a &= q^2_0 - q^2_1 - q^2_2 + q^2_3 \ , & b &= 2(q_0q_1 - q_2q_3) \ , & c &= 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ a' &= 2(q_0q_1 + q_2q_3) \ , & b' &= -q^2_0 + q^2_1 - q^2_2 + q^2_3 \ , & c' &= 2(q_1q_2 - q_0q_3) \\ a'' &= 2(q_0q_2 - q_1q_3) \ , & b'' &= 2(q_1q_2 + q_0q_3) \ , & c'' &= -q^2_0 - q^2_1 + q^2_2 + q^2_3 \end{aligned}
$$

donde los parámetros están sujetos a la condición

$$
q^2_0 + q^2_1 + q^2_2 + q^2_3 = 1 \ ,
$$

la cual permite eliminar uno de ellos y expresar todos los coeficientes en función de los tres restantes.

Las fórmulas [6] se llaman *fórmulas de Euler* para los coeficientes de una rotación de ejes ortogonales.

3. Distancia de un punto al origen en coordenadas oblicuas. — Como aplicación de las fórmulas del cambio de ejes, vamos a dar la expresión de la distancia de un punto $P(x, y, z)$ al origen en coordenadas oblicuas.

Consideremos un sistema de ejes oblicuos y sean λ, μ, ν los ángulos que forman los ejes OY con OX, OX con OZ y OZ con OY respectivamente. Sea O, X′, Y′, Z′ un sistema de ejes ortogonales con el mismo origen.

La distancia buscada d de P a O está dada por

$$
d^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2
$$

y aplicando las fórmulas [2] del cambio de ejes resulta

$$
\begin{aligned} d^2 = {} & (a^2 + a'^2 + a''^2)x^2 + (b^2 + b'^2 + b''^2)y^2 + \\ & + (c^2 + c'^2 + c''^2)z^2 + 2(ab + a'b' + a''b'')xy + \\ & + 2(ac + a'c' + a''c'')xz + 2(bc + b'c' + b''c'')yz. \end{aligned}
$$

Por ser ortogonales los ejes del sistema X′, Y′, Z′ se verifica

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1 \quad , \quad ab + a'b' + a''b'' = \cos\lambda$$
$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1 \quad , \quad ac + a'c' + a''c'' = \cos\mu$$
$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1 \quad , \quad bc + b'c' + b''c'' = \cos\nu$$

con lo cual resulta

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2xz\cos\mu + 2xy\cos\nu},$$

que es la fórmula de *la distancia de un punto al origen en coordenadas oblicuas.*

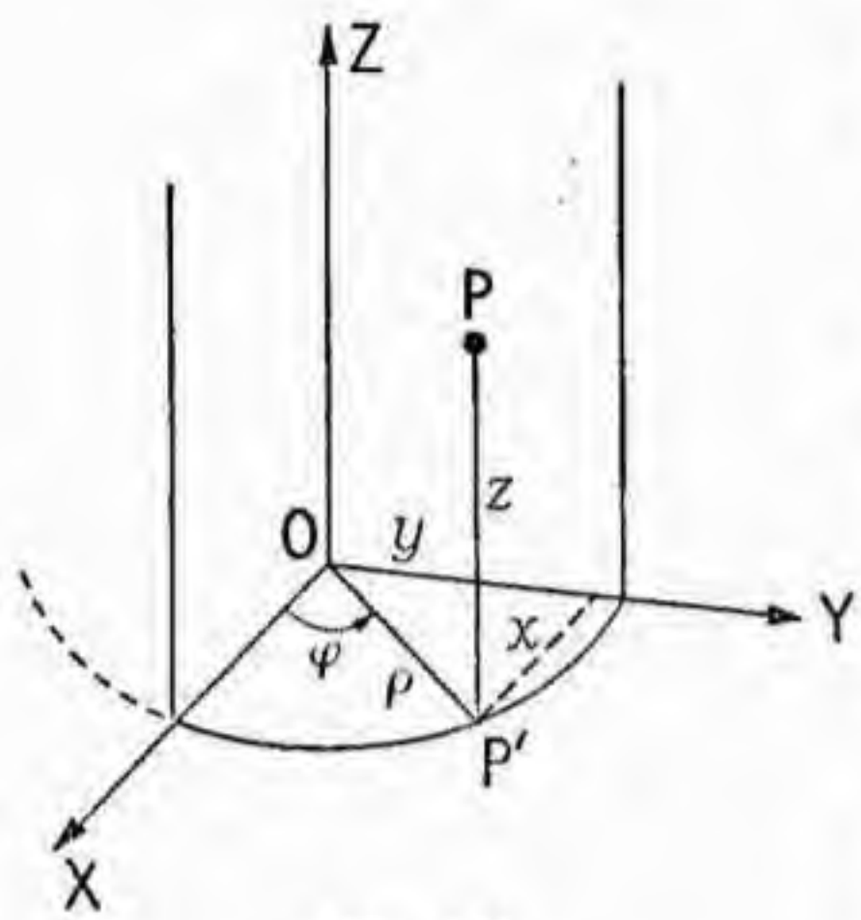

Fig. 144.

4. **Coordenadas cilíndricas.** — Un punto P del espacio puede determinarse por su distancia z al plano X, Y y por las coordenadas polares ϱ, φ de su proyección ortogonal P' sobre el mismo plano (fig. 144).

Estas coordenadas (ϱ, φ, z) se llaman *coordenadas cilíndricas.* Las relaciones que las ligan con las coordenadas cartesianas son:

$$[7] \qquad x = \varrho\cos\varphi \quad , \quad y = \varrho\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad , \quad z = z$$

de las cuales se deduce, inversamente,

$$[8] \qquad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \varphi = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x} \quad , \quad z = z \quad ,$$

que constituyen las fórmulas de transformación de coordenadas cartesianas ortogonales a cilíndricas y viceversa.

EJERCICIOS: 1. Probar que las ecuaciones $\varrho = \text{cte.}$ representan cilindros de revolución alrededor del eje Z y las ecuaciones $\varphi = \text{cte.}$ planos que contienen al eje Z.

2. Escribir la ecuación del plano $3x - y + 2z = 0$ en coordenadas cilíndricas.

3. Ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $(\varrho = 3,\ \varphi = \pi/2,\ z = -1)$, $(\varrho = 1,\ \varphi = \pi/3,\ z = 2)$ en coordenadas cilíndricas y en coordenadas cartesianas.

5. **Coordenadas esféricas.** — Dados tres ejes ortogonales de origen O, un punto P puede determinarse también por las siguientes coordenadas: su distancia ϱ al origen O; el ángulo θ que la semirrecta OP forma con el eje Z y el ángulo φ que el plano determinado por el eje Z y el punto P forma con el plano X, Z (fig. 145). Este ángulo es igual al que forma la semi-

rrecta OP′ (P′ = proyección de P sobre el plano X, Y), con el eje X.

Las coordenadas ϱ, θ, φ se llaman *coordenadas esféricas* del punto P y constituyen la generalización al espacio de las coordenadas polares del plano.

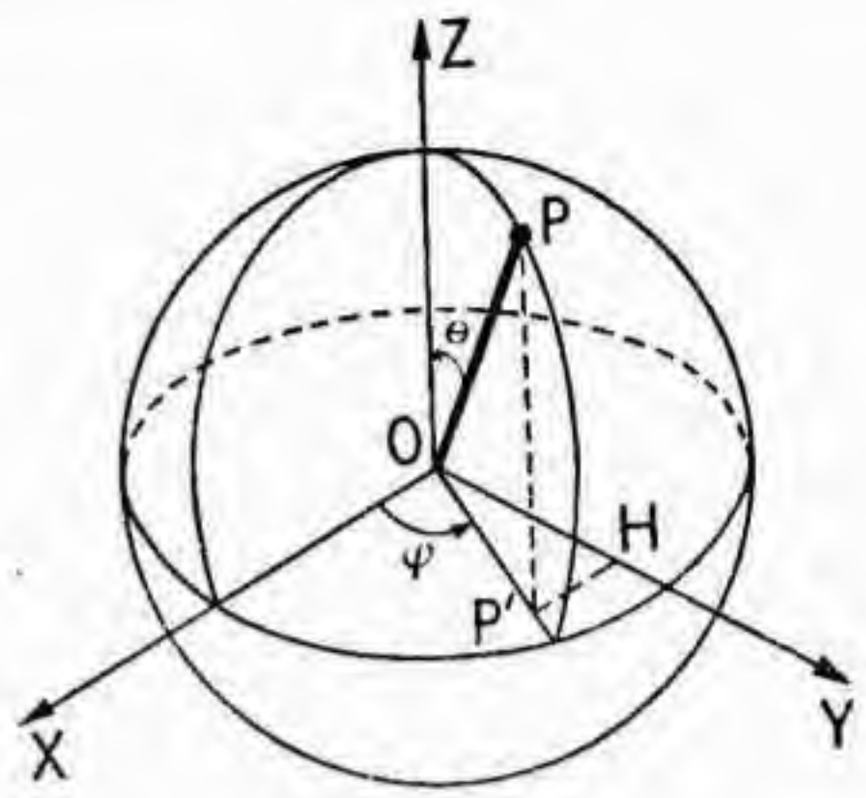

Fig. 145.

Escribiendo que la proyección sobre los ejes de la quebrada OP′P es igual a la proyección del segmento OP que une sus extremos, se obtienen las fórmulas de la transformación

$$[9] \qquad \begin{aligned} x &= OP' \,.\, \cos\varphi = \varrho \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y &= OP' \,.\, \operatorname{sen}\varphi = \varrho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z &= \varrho \cos\theta . \end{aligned}$$

Las fórmulas inversas son

$$[10] \qquad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad , \quad \theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} ,$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} .$$

EJERCICIOS: 1. Escribir la ecuación general del plano en coordenadas esféricas.

2. Hallar la distancia entre dos puntos en coordenadas esféricas.

3. Distancia del origen a un plano en coordenadas esféricas.

6. **Grupo de fórmulas de Bessel.** — Las fórmulas del cambio de ejes pueden servir para hallar unas fórmulas importantes de trigonometría esférica.

Supongamos sobre la esfera de radio unidad y centro el origen de coordenadas, un triángulo ABC cuyos lados representaremos por *a*, *b*, *c* y ángulos diedros por A, B, C con letras iguales correspondiendo a elementos opuestos.

Como eje X adoptamos OB; como plano XY la cara AOB y como eje Z la perpendicular dirigida hacia el mismo lado que C. Hagamos girar los ejes XY un ángulo *c*, es decir, adoptemos OA como eje X′ y las coordenadas del punto C referidas a los dos sistemas son (fig. 146):

$$\begin{cases} x = \cos a \\ y = \operatorname{sen} a \,.\, \cos B \\ z = \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} B \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \cos c \\ y' = -\operatorname{sen} b \,.\, \cos A \\ z' = \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} A \end{cases}$$

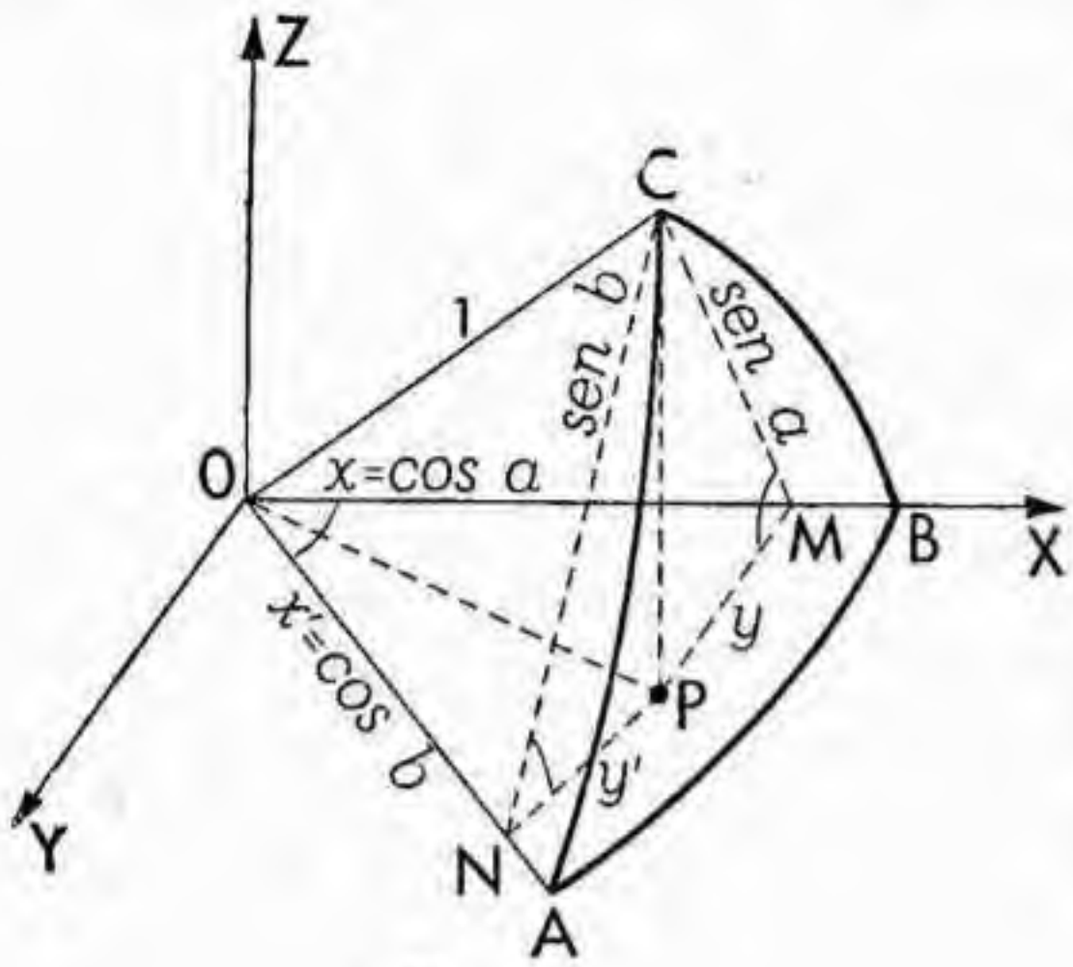

Fig. 146.

Estas coordenadas están relacionadas con las fórmulas de cambio de ejes en el plano XY por

$$x = x' \cos c - y' \operatorname{sen} c$$
$$y = x' \operatorname{sen} c + y' \cos c$$
$$z = z'$$

y sustituyendo valores resultan las tres fórmulas fundamentales de la Trigonometría esférica:

[11] $$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c \,.\, \cos A$$

[12] $$\operatorname{sen} a \,.\, \cos B = \cos b \,.\, \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} b \,.\, \cos c \,.\, \cos A$$

[13] $$\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} A = \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} B.$$

7. Resolución de triángulos rectángulos. — Sea $A = 90°$.

La 1ª fórmula de Bessel da:

[14] $$\cos a = \cos b \,.\, \cos c$$

La 2ª fórmula de Bessel da:

[15] $$\operatorname{sen} a \cos B = \cos b \,.\, \operatorname{sen} c$$

La 3ª fórmula de Bessel da:

[16] $$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} B$$

[17] $$\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} C$$

Dividiendo [15] por [14] para eliminar b resulta:

$$\cos B = \operatorname{tg} c \,.\, \cot a$$

y análogamente:

$$\cos C = \operatorname{tg} b \,.\, \cot a.$$

Multiplicando [15] por [16] para eliminar a resulta:

$$\operatorname{sen} c = \operatorname{tg} b \,.\, \cot B$$

y análogamente:

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{tg} c \,.\, \cot C.$$

Multiplicando [15] por [17] para eliminar c resulta:

$$\cos B = \cos b \,.\, \operatorname{sen} C$$

y análogamente:

$$\cos C = \cos c \,.\, \operatorname{sen} B.$$

Todas estas relaciones se recuerdan fácilmente con el esquema de Neper que consiste en escribir en el mismo orden circular en que están colocados en el triángulo los cinco elementos, sustituyendo los catetos por sus complementos y enunciando:

a

B C

$90° - c$ $90° - b$

El coseno de un elemento es el producto de las cotangentes de los elementos contiguos, o de los senos de los opuestos.

Con esta regla se resuelve todo triángulo rectángulo, dado por dos elementos cualesquiera.

Para los triángulos rectiláteros, esto es, que tienen un lado igual a un cuadrante, se deducen fórmulas correlativas.

8. **Transformación de las fórmulas del coseno.** — De las fórmulas del coseno [11] se despeja:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}, \quad \text{y llamando} \begin{cases} 2s = a + b + c \\ 2(s-a) = b + c - a \\ 2(s-b) = c + a - b \\ 2(s-c) = a + b - c \end{cases}$$

resulta:

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c} = 2\,\frac{\operatorname{sen} s \,.\, \operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}$$

$$1 - \cos A = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c} = 2\,\frac{\operatorname{sen}(s-b)\operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}$$

pasando el arco mitad, resultan estas fórmulas, fácilmente calculables por logaritmos:

$$[18] \quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} s \,.\, \operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}}\,; \quad \operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-b)\operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} b \,.\, \operatorname{sen} c}}$$

$$[19] \quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} s \,.\, \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen} c \,.\, \operatorname{sen} a}}\,; \quad \operatorname{sen}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-c)\operatorname{sen}(s-a)}{\operatorname{sen} c \,.\, \operatorname{sen} a}}$$

$$[20] \quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} s \,.\, \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b}}\,; \quad \operatorname{sen}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-a)\operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b}}$$

9. **Analogías de Delambre y Neper.** — Apliquemos las fórmulas [18] y [19] al desarrollo de

$$\cos\frac{A+B}{2} = \cos\frac{A}{2} \,.\, \cos\frac{B}{2} - \operatorname{sen}\frac{A}{2} \,.\, \operatorname{sen}\frac{B}{2} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} s}{\operatorname{sen} c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-a)\operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b}} - \frac{\operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} c}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(s-a) \,.\, \operatorname{sen}(s-b)}{\operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b}}$$

y observando que el radical común es precisamente $\operatorname{sen}\frac{C}{2}$; y que $\operatorname{sen} s - \operatorname{sen}(s-c) = 2\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{a+b}{2}$; $\operatorname{sen} c = 2\operatorname{sen}\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}$ resulta, en definitiva, la fórmula notable de Delambre:

$$[21] \qquad \cos\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\operatorname{sen}\frac{C}{2}$$

y fórmulas análogas desarrollando el seno o el coseno de la semidiferencia. Suelen escribirse así estas fórmulas de Delambre:

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \qquad \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \qquad \frac{\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\frac{c}{2}}$$

Dividiendo, resultan las *analogías de Never*:

$$\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\,.\,\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}\,;\quad \operatorname{tag}\frac{A-B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{a-b}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{a+b}{2}}$$

y dividiendo las dos primeras entre sí, y las dos últimas, resultan otras dos analogías correlativas o polares:

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\,.\,\cot\frac{c}{2}=\frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}}\,;\ \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}\,.\,\cot\frac{c}{2}=\frac{\operatorname{sen}\dfrac{A-B}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{A+B}{2}}$$

Reglas mnemotécnicas. — La forma de las analogías de Delambre es fácil de recordar, pues en el primer miembro figuran los ángulos y en el segundo los lados; lo que induce a confusión son los signos y las funciones seno y coseno. Pueden recordarse observando:

1º En los numeradores a un *cos* de uno corresponde signo + del otro; al *sen* corresponde signo —.

2º Las minúsculas tienen la misma función en numerador y denominador; las mayúsculas función distinta.

Con esta regla (también aplicable en cierto modo a las fórmulas de Neper), escrito un numerador arbitrariamente, es decir, *cos* o *sen*, signo + o signo —, queda determinado el otro numerador y de ellos se deducen los denominadores.

10. **Resolución de triángulos oblicuángulos.** — I. *Dados dos lados* a, b *y el ángulo comprendido C.*

Las primeras analogías de Neper determinan:

$$\frac{A+B}{2}\ \text{y}\ \frac{A-B}{2}\qquad \begin{array}{l}\text{Sumando resulta A.}\\ \text{Restando ,, B.}\end{array}$$

El teorema de los senos determina *c*.

II. *Dado un lado* c *y los ángulos adyacentes* A *y* B.

Basta aplicar las otras dos analogías de Neper, o bien pasar al triángulo polar, es decir, resolver el triángulo que tiene el ángulo $\pi - c$ y los lados $\pi - A$, $\pi - B$; los suplementos de los elementos que resulten pertenecen al dado.

III. *Dados los tres lados* a, b, c.

Las fórmulas [18], [19] y [20] determinan por logaritmos A, B, C.

IV. *Dados los tres ángulos A, B, C.*

El triángulo polar tiene los lados $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$; resuelto éste si resultan los ángulos A′, B′, C′, sus suplementos son los lados del triángulo primero.

V. *Dados dos lados* a, b *y el ángulo A opuesto a uno de ellos.*

El teorema de los senos determina:

$$\operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b\ .\ \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} a}\,.$$

Si es < 1 resultan dos arcos suplementarios B_1 y B_2 y debe desecharse el que no cumpla la condición $A \gtrless B$ según sea $a \lessgtr b$.

La primera o segunda analogía de Neper determinan C por la tangente; la tercera o cuarta determina *c*.

VI. *Dados dos ángulos A, B y el lado* a *opuesto a uno de ellos.*

Basta pasar al triángulo polar, y se reduce al caso anterior.

CAPITULO VIII

SUPERFICIES DE SEGUNDO ORDEN

§ 38. SUPERFICIE ESFÉRICA

1. Definición y ecuación de la superficie esférica. — DEFINICIÓN 1. Se define la superficie esférica como el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de un punto denominado centro. A la distancia fija al centro se la denomina *radio*.

Interviniendo en la definición de la superficie esférica, de manera esencial, el concepto métrico de distancia, *utilizaremos para su estudio los sistemas cartesianos ortogonales*. En gran parte este estudio es análogo al hecho para la circunferencia. Así, por ejemplo, repitiendo los razonamientos que hicimos entonces, se deduce que *la ecuación* de superficie esférica de centro (a, b, c) y radio r es

$$[1] \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

y recíprocamente, toda ecuación de este tipo es la de una superficie esférica de centro (a, b, c) y radio r.

Desarrollando [1] se obtiene

$$[2] \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

siendo $d = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$, y como en el caso de la circunferencia se demuestra que toda ecuación de este tipo que cumpla la condición $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, es la ecuación de una superficie esférica de centro (a, b, c) y radio r tal que

$$r^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d.$$

Si fuese $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$, el único punto real que satisface a la ecuación es el punto (a, b, c) y se dice que la esfera es de *radio nulo*, y si es $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$ no hay ningun punto real cuyas coordenadas satisfagan a la ecuación, y se dice entonces que tenemos una esfera imaginaria.

La ecuación más general posible de segundo grado es

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gxz + 2lx + \\ + 2my + 2nz + d = 0$$

y como en el caso de la circunferencia se demuestra que para que

dicha ecuación represente una superficie esférica son necesarias y suficientes las siguientes condiciones:

$$a = b = c \neq 0 \quad ; \quad h = f = g = 0 \quad ; \quad l^2 + m^2 + n^2 - ad > 0 \quad ;$$

la última expresa que la superficie esférica no es de radio nulo ni imaginaria. Cuando se tenga en la ecuación $a = b = c = 1$ se dice que la ecuación de la superficie esférica es *normal.*

Cuando la superficie esférica tiene como centro el origen, su ecuación es

$$[3] \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

y si es tangente al plano OXY, tiene como ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2cz = 0.$$

2. **Intersección de una recta con una superficie esférica. Rectas y tangentes.** — Dada una recta y una superficie esférica, los puntos comunes a ambas se obtienen resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones de la recta y la ecuación de la superficie esférica.

Tomemos para hacer el estudio, en general, un sistema de ejes tal que el origen sea el centro de la superficie esférica, el plano XZ pase por la recta y el eje OZ sea paralelo a la misma. Las ecuaciones de la superficie esférica y las dos de la recta son

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad ; \quad x = d \quad , \quad y = 0$$

sistema que admite como solución

$$x = d \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = \pm \sqrt{r^2 - d^2}$$

luego, según que la distancia de la recta al centro sea menor, mayor o igual al radio, la recta corta a la superficie esférica en dos puntos reales, en dos puntos imaginarios, o en punto real doble.

DEF. 2. En el primer caso se dice que la recta es *secante*; en el segundo, cuando no hay puntos reales comunes, se dice que es *exterior*, y en el tercero, cuando tiene un punto real doble, *tangente.*

Consideremos ahora un punto y una superficie esférica; tomemos un sistema de ejes que tenga su origen en el punto y tal que el eje OZ pase por el centro de la esfera. La ecuación de la esfera es

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Una recta que pase por el origen tiene como ecuaciones paramétricas

$$x = \lambda\alpha \quad ; \quad y = \lambda\beta \quad ; \quad z = \lambda\gamma \quad ;$$

siendo α, β, γ los cosenos directores de la recta. Para que esta

recta sea tangente a la esfera es necesario y suficiente que la ecuación en λ

$$\lambda^2\alpha^2 + \lambda^2\beta^2 + (\lambda\gamma - c)^2 = r^2 \quad ; \quad \lambda^2 - 2c\gamma\lambda + c^2 - r^2 = 0$$

tenga raíces dobles; es decir que sea

$$c^2\gamma^2 - c^2 + r^2 = 0 \quad ; \quad \gamma^2 = \frac{c^2 - r^2}{c^2}$$

luego las rectas que son tangentes a la esfera y que pasan por el punto son las que forman con el eje OZ un determinado ángulo cuyo coseno es la raíz cuadrada de

$$\frac{c^2 - r^2}{c^2}.$$

Como λ ha de ser positivo tiene que ser $c^2 \geqslant r^2$, el punto debe ser exterior, es decir, su distancia al centro de la superficie esférica ha de ser mayor que el radio, o ha de estar en dicha superficie. En este último caso, las tangentes, siendo todas ellas perpendiculares a OZ, están en un mismo plano, luego se tiene:

TEOREMA 1. *Por un punto exterior a una superficie esférica pasan infinitas tangentes a ésta, las cuales forman un cono de revolución circunscrito a la superficie esférica, cuyo eje pasa por el centro de la misma.*

TEOR. 2. *Por un punto de la superficie esférica pasan infinitas tangentes que están en un plano perpendicular al radio que pasa por el punto.*

DEF. 3. El plano que contiene a todas las rectas tangentes a una superficie esférica en un punto de la misma se denomina *plano tangente* a la superficie esférica.

Veamos ahora cómo se puede obtener la ecuación del cono circunscrito. Supongamos que el origen sea el centro de la superficie esférica (el caso general se reduce a éste mediante una simple traslación de ejes). Sea $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto exterior a la superficie esférica. Para que un punto $M'(x', y', z')$ del espacio pertenezca al cono circunscrito de vértice M_0 es necesario y suficiente que la recta M_0M' sea tangente a la superficie esférica; un sistema de ecuaciones paramétricas de esta recta es, como se deduce de § 34, nº 5, al variar λ,

$$x = \frac{x_0 + \lambda x'}{1+\lambda} \quad ; \quad y = \frac{y_0 + \lambda y'}{1+\lambda} \quad ; \quad z = \frac{z_0 + \lambda z'}{1+\lambda} \quad ;$$

luego, para que MM′ sea tangente a la superficie esférica, es necesario y suficiente que la ecuación en λ

$$\left(\frac{x_0 + \lambda x'}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y_0 + \lambda y'}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{z_0 + \lambda z'}{1+\lambda}\right)^2 = r^2$$

$$\lambda^2(x'^2 + y'^2 + z'^2 - r^2) + 2\lambda(x_0x' + y_0y' + z_0z' - r^2) + \\ + x^2_0 + y^2_0 + z^2_0 - r^2 = 0$$

tenga iguales las raíces, es decir que se tenga

$$(x'x'_0 + y'y'_0 + z'z'_0 - r^2)^2 - \\ - (x'^2 + y'^2 + z'^2 - r^2)(x^2_0 + y^2_0 + z^2_0 - r^2) = 0$$

luego la *ecuación del cono circunscrito* es

[4] $$(xx_0 + yy_0 + zz_0 - r^2)^2 - \\ - (x^2 + y^2 + z^2 - r^2)(x^2_0 + y^2_0 + z^2_0 - r^2) = 0.$$

Si el punto M_0 está en la esfera, es $x^2_0 + y^2_0 + z^2_0 = r^2$, y [4] toma la forma

[5] $$xx_0 + yy_0 + zz_0 - r^2 = 0$$

que es la *ecuación del plano tangente a la superficie esférica en un punto* M_0 *de la misma.* Como $r^2 = x^2_0 + y^2_0 + z^2_0$, [5] puede tomar la forma

[5'] $$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0.$$

Si consideramos ahora el caso general de una esfera de centro (a, b, c) y radio r y un punto $M(x_0, y_0, z_0)$ de la misma, llevando el origen al punto (a, b, c), aplicando [5] y deshaciendo el cambio de coordenadas, la ecuación anterior toma la forma

[6] $$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) + \\ + (z_0 - z)(z - z_0) = 0.$$

3. **Intersección de un plano con una superficie esférica.** — Tomaremos como sistema de coordenadas uno cuyo origen sea el centro de la superficie esférica y cuyo eje OX sea perpendicular al plano dado. Las ecuaciones de las dos superficies son

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad ; \quad x = d$$

que se pueden reemplazar por el sistema equivalente

$$y^2 + z^2 = r^2 - d^2 \quad ; \quad x = d$$

de donde resulta *que según que la distancia del plano al centro sea menor, igual o mayor que el radio, las dos superficies tienen comunes infinitos puntos reales, uno solo real o ningún punto real.*

En el primer caso la distancia de un punto cualquiera de la intersección al punto $(d, 0, 0)$ es constante e igual a $r^2 - d^2$, luego dichos puntos son los de una circunferencia situada en el plano, y cuyo centro es la intersección del mismo con la perpendicular a él por el centro de la superficie esférica.

En el segundo caso el único punto común es el $(d, 0, 0)$ y la ecuación del plano dado coincide con la ecuación del plano tangente en ese punto. Puede adoptarse, por consiguiente, co-

mo definición del plano tangente en un punto, *la del plano que sólo tiene común con la superficie esférica dicho punto.*

El problema de la *intersección de dos superficies esféricas* se reduce al de la intersección de una de ellas con un plano. En efecto, sean las dos de ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0 \quad ,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2a'x - 2b'y - 2c'z + d' = 0 \quad ;$$

sus puntos comunes son aquellos cuyas coordenadas satisfacen estas dos ecuaciones, pero este sistema es equivalente al que se obtiene reemplazando una de las ecuaciones por su diferencia, es decir por la ecuación

$$2(a - a')x + 2(b - b')y + 2(c - c')z + d' - d = 0$$

y como esta ecuación es la de un plano, los puntos comunes a las dos superficies esféricas son los comunes a una de ellas y a dicho plano. Cuando este plano sea tangente a las superficies esféricas se dice que éstas son *tangentes.*

Vamos ahora a determinar los planos tangentes a una superficie esférica que pasan por un punto, o son paralelos a una recta. Supongamos el origen en el centro.

Sea $M_0(x_0, y_0, z_0)$ el punto; el problema se reduce a determinar los puntos de contacto de los planos tangentes que pasan por M_0; sea (x', y', z') uno de ellos: está únicamente sujeto a cumplir las condiciones

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2 \quad ; \quad x_0x' + y_0y' + z_0z' - r^2 = 0$$

es decir, a pertenecer a la esfera y a estar en un plano de ecuación $x_0x + y_0y + z_0z - r^2 = 0$. La distancia de este plano al origen es

$$d = \frac{r^2}{\sqrt{x^2_0 + y^2_0 + z^2_0}}$$

luego si el punto es exterior hay infinitos planos tangentes que pasan por el punto y los puntos de contacto están en una circunferencia; si el punto está en la superficie esférica hay uno solo y ninguno si es interior.

Veamos ahora el caso de los planos paralelos a una recta: sean α, β, γ los cosenos directores de la recta, un punto de contacto (x', y', z') está sólo sujeto a las dos condiciones

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2 \quad ; \quad \alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0$$

la segunda de las cuales expresa que el plano tangente es paralelo a la recta. Los puntos de contacto están pues sólo sujetos a pertenecer a la superficie esférica y al plano de ecuación $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ que pasa por el centro; luego siempre hay infinitos planos tangentes y sus puntos de contacto están en una circunferencia máxima cuyo plano es perpendicular a la recta.

4. **Determinación de superficies esféricas.** — El problema de la determinación de una superficie esférica se trata de una forma completamente análoga al de la determinación de una circunferencia o de una cónica; como la ecuación de la superficie esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

contiene cuatro parámetros arbitrarios, las condiciones habrán de ser tales que nos conduzcan a un sistema de ecuaciones que determine estos cuatro parámetros.

La condición de pasar por un punto nos da una relación entre los coeficientes de la ecuación; dar el centro equivale a dar tres coeficientes; decir que un plano es tangente equivale a dar una relación expresando que el cuadrado de la distancia del plano al punto (a, b, c) es igual a $a^2 + b^2 + c^2 - d$; un plano tangente en un punto equivale a tres condiciones, una que expresa que la superficie esférica pasa por el punto y otras dos que se obtienen expresando el paralelismo del plano dado con el plano de ecuación [6].

Veamos un ejemplo:

Determinar la ecuación de la superficie esférica que pasa por el punto $(-1, 6, -3)$ y que es tangente al plano $4x + 4y + 7z - 96 = 0$ en el punto $(7, 3, 8)$.

Las condiciones de pasar por los dos puntos se expresan mediante las ecuaciones

$$46 + 2a - 12b + 6c + d = 0$$
$$122 - 14a - 6b - 16c + d = 0$$

y la de que el plano sea tangente, mediante las ecuaciones que expresan la proporcionalidad de los coeficientes de x, y, z,

$$\frac{7-a}{4} = \frac{3-b}{4} = \frac{8-c}{7}.$$

Se tiene así un sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas; resolviéndolo se obtienen como soluciones $a = 3$, $b = -1$, $c = 1$, $d = -70$; luego, la ecuación buscada es

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z - 70 = 0.$$

De la misma forma que en el caso de la circunferencia, se demuestra que por cuatro puntos $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ y $M_4(x_4, y_4, z_4)$ no situados en un mismo plano pasa una superficie esférica y sólo una, cuya ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\ x^2_1 + y^2_1 + z^2_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x^2_2 + y^2_2 + z^2_2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x^2_3 + y^2_3 + z^2_3 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x^2_4 + y^2_4 + z^2_4 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Potencia de un punto. Elementos radicales. — Esta teoría es completamente análoga a la establecida para la circunferencia. El teorema fundamental es el siguiente:

TEOR. 3. *El producto de las longitudes de los dos segmentos que intercepta sobre una superficie esférica una secante que pasa por un punto fijo es constante, cualquiera que sea la secante.*

En efecto: tomemos como origen de coordenadas el punto fijo y sea la ecuación de la superficie esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

Las ecuaciones paramétricas de una recta cualquiera que pase por el origen son

$$x = \alpha\lambda \quad ; \quad y = \beta\lambda \quad ; \quad z = \gamma\lambda \quad ;$$

siendo α, β, γ los cosenos directores de la recta; el parámetro es la distancia orientada del punto correspondiente al origen.

Los puntos de intersección de la recta con la superficie se obtienen resolviendo la ecuación de segundo grado en λ:

$$\alpha^2\lambda^2 + \beta^2\lambda^2 + \gamma^2\lambda^2 - 2a\alpha\lambda - 2b\beta\lambda - 2c\gamma\lambda + d = 0$$

y las raíces son las longitudes de los segmentos interceptados; el producto de estas raíces es, teniendo en cuenta que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, igual a d, luego, no depende de la recta que se tome, el teorema está por lo tanto demostrado.

DEF. 4. Este producto constante se denomina la *potencia del punto respecto de la superficie esférica.* Según acabamos de ver, la potencia del origen de coordenadas respecto de una superficie esférica es igual al término independiente de la ecuación de la misma.

Como en el caso de la circunferencia, haciendo una traslación de ejes se demuestra:

TEOR. 4. *La potencia de un punto cualquiera respecto de una superficie esférica es igual al resultado de reemplazar las coordenadas del punto en el primer miembro de la ecuación de la recta.*

También se demuestra, igual que en el caso de la circunferencia, que: *la potencia es igual a $d^2 - r^2$, siendo d la distancia del punto al centro de la superficie esférica.*

La teoría de los elementos radicales siendo totalmente análoga a la de la circunferencia, nos limitaremos a dar las definiciones y enunciar los resultados.

DEF. 5. Se denomina *plano radical* de dos superficies esféricas no concéntricas al lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia con respecto a ambas superficies. *La*

ecuación del plano radical se obtiene restando miembro a miembro las ecuaciones de las dos superficies.

TEOR. 5. *El plano radical tiene las propiedades siguientes:*

a) *Es perpendicular a la línea de los centros.*

b) *Si las superficies esféricas son secantes, el plano radical pasa por la circunferencia común.*

c) *Si las superficies esféricas son tangentes, el plano radical se confunde con el plano tangente común.*

TEOR. 6. *Dadas tres superficies esféricas, cuyos centros no estén en línea recta, los planos radicales obtenidos tomando dos a dos las superficies, pasan por una misma recta.*

DEF. 6. Esta recta se denomina el *eje radical* de las tres superficies esféricas y es el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia con respecto a las tres superficies.

Cuando los centros están en línea recta, entonces, o las tres superficies tienen el mismo plano radical, o no existe ningún punto que tenga la misma potencia con respecto a las tres superficies.

TEOR. 7. *Dadas cuatro superficies esféricas cuyos centros no estén en el mismo plano, existe un punto común a los seis planos radicales de dichas superficies tomadas dos a dos.*

DEF. 7. Dicho punto se denomina el *centro radical* de las cuatro superficies y por él pasan los cuatro ejes radicales de éstas tomados dos a dos. Este punto es el único que tiene *igual potencia* con respecto a las cuatro superficies esféricas.

Si los cuatro centros son coplanarios, las cuatro superficies o tienen el mismo plano radical, o tienen el mismo eje radical, o no existe ningún punto cuya potencia sea la misma respecto de las cuatro superficies.

6. **Superficies esféricas ortogonales.** — Como en el caso de la circunferencia consideremos dos superficies esféricas distintas de ecuaciones

$$[8]\qquad \begin{aligned} f_1(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d \\ f_2(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 2a'x - 2b'y - 2c'z + d' \end{aligned}$$

DEF. 8. Denominaremos *haz lineal de superficies esféricas* al conjunto de las superficies esféricas de ecuaciones

$$[9]\qquad \lambda f_1(x, y, z) + \mu f_2(x, y, z) = 0$$

en donde λ y μ toman todos los valores reales posibles.

Para $\lambda = -\mu$ la ecuación [9] no representa una superficie esférica, sino el plano radical de las dos superficies dadas, al

que se considera como un caso límite de las superficies esféricas del haz.

Razonamientos completamente análogos a los empleados en el caso de los haces lineales de circunferencias, nos probarían el siguiente teorema:

TEOR. 8. *Todas las superficies esféricas de un haz lineal tienen el mismo plano radical y recíprocamente el conjunto de todas las superficies esféricas que tienen el mismo plano radical forma un haz lineal.*

Por consiguiente *los centros de las superficies esféricas del haz están situados en una perpendicular al plano radical.* Tomemos esta perpendicular como eje OX y el plano radical como plano YZ. De la misma forma que en el caso de los haces de circunferencias, se ve que las ecuaciones de las superficies del haz son de la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda x + d = 0 \tag{10}$$

siendo d fijo y λ un parámetro variable real.

Si $d < 0$, todas las superficies esféricas cortan al plano radical en una circunferencia de ecuación

$$y^2 + z^2 + d = 0$$

que es por consiguiente común a todas las superficies del haz. El haz está formado por las superficies esféricas que pasan por una circunferencia.

Si $d > 0$, las superficies no tienen ningún punto comun con el plano radical y por lo tanto no tienen ningún punto común dos a dos. La ecuación [10] puede escribirse también

$$(x - \lambda)^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 - d$$

luego los centros de las superficies esféricas son exteriores al segmento del eje OX de centro el origen y radio $\sqrt{d}$. Los extremos de ese segmento se denominan *puntos límites* del haz y pueden considerarse como dos superficies esféricas de radio nulo pertenecientes al haz.

Finalmente si $d = 0$, la ecuación del haz toma la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda x = 0$$

y el haz se compone de las superficies esféricas tangentes a un plano en un mismo punto.

DEF. 9. Dos superficies esféricas se dice que son *ortogonales* cuando son perpendiculares sus planos tangentes en los puntos comunes a ambas superficies. Luego el triángulo formado por los centros de las dos superficies y el punto común tiene que ser rectángulo; por lo tanto, si r y r' son los radios y d la distancia de los centros, es necesario y suficiente para la ortogonalidad de las dos superficies que se tenga $d^2 - r^2 =$

$= r'^2$, o lo que es lo mismo que la *potencia del centro de una de las superficies esféricas respecto de la otra sea igual al cuadrado del radio de la primera.*

De esta propiedad se deduce, con el mismo razonamiento que el hecho para las circunferencias ortogonales, que la condición de ortogonalidad de dos superficies esféricas de ecuaciones [8] es

$$2aa' + 2bb' + 2cc' = d + d'. \tag{11}$$

Las superficies esféricas ortogonales a dos dadas tienen que tener su centro en el plano radical de éstas, las ortogonales a tres en el eje radical y la ortogonal a cuatro, si existe, en el centro radical, como se deduce de la condición de ortogonalidad; de esta misma condición se deduce que el radio de la superficie esférica ortogonal a varias, es la raíz cuadrada de la potencia de su centro con respecto a las superficies a las que es ortogonal. Dicho centro debe, por lo tanto, ser *exterior* a las superficies esféricas.

7. Elementos imaginarios en geometría del espacio. — Las consideraciones que hicimos (§ 14) sobre la necesidad de introducir los elementos imaginarios en geometría analítica se aplican igualmente a la geometría analítica tridimensional.

Un punto del espacio será el conjunto de las ternas de números $(a + bi,\ c + di,\ e + fi)$ complejos cualesquiera. Un plano será el conjunto de los puntos del espacio cuyas coordenadas satisfacen una ecuación lineal $ax + by + cz + d = 0$; y una recta, el conjunto de puntos del espacio cuyas coordenadas satisfacen dos ecuaciones lineales.

Cuando los coeficientes de las ecuaciones son reales se dice que el plano o la recta son reales, e imaginarios en el caso en que alguno de los coeficientes sea imaginario. Se exceptúa, naturalmente, el caso en que los coeficientes sean todos números reales multiplicados por un mismo número complejo. Así, por ejemplo,

$$(1 + i)x + (2 + 2i)y - (1 + i)z + 3 + 3i = 0 \quad ,$$

es la ecuación de un plano real, ya que los coeficientes son los productos de 1, 2, —1 y 3 por el número complejo $1 + i$.

Una superficie definida por una ecuación del tipo $f(x, y, x) = 0$, será el conjunto de los puntos cuyas coordenadas reales o complejas satisfacen a la ecuación. Aquí puede suceder que una superficie tal que en su ecuación sólo aparezcan números reales, tenga únicamente puntos imaginarios. Por ejemplo la de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$. En este caso se dice también que la superficie es imaginaria. Lo mismo sucede para las líneas curvas del espacio, definidas como intersección de dos superficies. Dos superficies reales, que no tengan puntos reales comunes, definen también una línea imaginaria.

Veamos ahora algunas propiedades de las rectas y planos imaginarios.

Es inmediato que toda recta o plano real que contenga un punto imaginario, contiene el punto conjugado, es decir el punto cuyas coordenadas son los conjugados de las coordenadas del primer punto.

TEOR. 9. *Todo plano imaginario contiene una recta real.*

En efecto, la ecuación del plano puede siempre ponerse en la forma

$$(ax + by + cz + d) + i(a'x + b'y + c'z + d) = 0 \quad ,$$

que escribiremos abreviadamente en la forma $P + iP' = 0$, y es claro que los puntos de la recta real de ecuaciones $P = 0$ y $P' = 0$ están en el plano. Dicha recta está, por otra parte, contenida en el plano conjugado del dado, de ecuación $P - iP' = 0$.

TEOR. 10. *Una recta imaginaria, en general, carece de puntos reales; puede tener uno, como máximo, que pertenece entonces a la recta conjugada.*

En efecto, sean las ecuaciones de la recta.

$$P + iP' = 0 \quad ; \quad Q + iQ' = 0.$$

Para que un punto real pertenezca a la curva, sus coordenadas deben satisfacer las cuatro ecuaciones $P = 0$, $P' = 0$, $Q = 0$ y $Q' = 0$, es decir, el punto debe estar situado en cuatro planos, lo que, en general, no es posible. Si estos cuatro planos tienen un punto común, este punto pertenece a la recta, y es inmediato que también pertenece a la conjugada de ecuaciones

$$P - iP' = 0 \quad ; \quad Q - iQ' = 0.$$

Si hubiese otro punto real más en la recta también pertenecería a su conjugada; ambas rectas se confundirían y por lo tanto la recta sería real.

TEOR. 11. *La recta que pasa por un par de puntos imaginarios conjugados es real.*

En efecto: sean los dos puntos imaginarios conjugados

$$(a + ia',\ b + ib',\ c + ic') \quad \text{y} \quad (a - ia',\ b - ib',\ c - ic');$$

la ecuación de la recta que pasa por ambos es

$$\frac{x - a - ia'}{2ia'} = \frac{y - b - ib'}{2ib'} = \frac{z - c - ic'}{2ic'}$$

y simplificando,

$$\frac{x - a}{a'} = \frac{y - b}{b'} = \frac{z - c}{c'},$$

que es la ecuación de una recta real.

TEOR. 12. *Si dos rectas imaginarias conjugadas se cortan, su punto de intersección y el plano que ambas determinan son reales.*

En efecto, si el punto fuese imaginario su conjugado pertenecería también a ambas rectas; luego, éstas coincidirían y serían entonces reales. Si el plano fuese imaginario ambas rectas tendrían que estar también en el plano conjugado y por consiguiente coincidirían.

Como en el caso de la circunferencia, al considerar los elementos imaginarios, los enunciados geométricos alcanzan una mayor generalidad. Así, una recta real corta siempre a una superficie esférica real en dos puntos, reales y distintos, reales y confundidos o imaginarios conjugados. Por ejemplo, el eje OZ corta a la superficie esférica de ecuación $(x - 12)^2 + (y - 5)^2 + z^2 = 25$ en los dos puntos $(0, 0, 12i)$ y $(0, 0, -12i)$.

Dos superficies esféricas exteriores tienen común una circunferencia imaginaria. Así, por ejemplo, las dos superficies esféricas de ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 1 = 0$ y $x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 1 = 0$, tienen comunes los puntos de una circunferencia imaginaria situada en el plano XY de ecuación $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

8. Círculo del infinito. — En la geometría plana vimos que dos circunferencias tenían siempre comunes dos puntos imaginarios impropios fijos, denominados puntos cíclicos. Vamos a estudiar ahora la extensión de esta propiedad al caso de las superficies esféricas. La ecuación de una superficie esférica en coordenadas homogéneas es

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2axt - 2byt - 2czt + dt^2 = 0$$

y cortándola por el plano impropio obtenemos una curva impropia cuyas ecuaciones son

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad ; \quad t = 0 \quad : \tag{12}$$

es decir, que no depende para nada de los coeficientes a, b, c y d de la ecuación, es por consiguiente común a todas las superficies esféricas.

DEF. 10. La curva de ecuaciones [12] se denomina *circunferencia del infinito* y está situada en cualquier superficie esférica.

Como la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ sólo admite la solución real $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, se deduce que todos los puntos de la circunferencia del infinito son imaginarios e impropios.

La circunferencia del infinito caracteriza a las superficies esféricas, es decir, no sólo todas las superficies esféricas la contienen, sino que también *toda superficie de segundo grado que la contenga es una superficie esférica.*

En efecto, sea la superficie de segundo grado de ecuación

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gxz + 2lxt + 2myt + \\ + 2nzt + dt^2 = 0$$

que suponemos pasa por la circunferencia del infinito.

Entonces, los puntos $(1, i, 0, 0)$, $(1, 0, i, 0)$ y $(0, 1, i, 0)$ pertenecen a la superficie y se tienen las relaciones

$$a - b + 2ih = 0 \quad ; \quad a - c + 2ig = 0 \quad ; \quad b - c + 2if = 0$$

que nos dan

$$a = b = c \quad ; \quad h = g = f = 0 \quad :$$

luego la superficie es esférica.

De las fórmulas de cambio de coordenadas ortogonales

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + \gamma z \\ y' &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \\ z' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \end{aligned}$$

y de las seis relaciones que ligan los nueve coeficientes se deduce que se tiene

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Es decir que la ecuación de la circunferencia del infinito es la misma en cualquier rotación de ejes.

Dado un plano cualquiera que pase por el origen, se puede tomar como plano XY, la circunferencia del infinito corta a este plano en los puntos de coordenadas homogéneas $(i, 1, 0)$ y $(-i, 1, 0)$, es decir que la *circunferencia del infinito contiene los puntos cíclicos del plano.* La superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, corta al plano XY según la curva de ecuación $x^2 + y^2 = 0$, es decir la formada por las dos rectas isótropas $x \pm iy = 0$, esta superficie contiene todas las rectas isótropas que pasan por el origen y se la denomina por ello, *cono isótropo.*

9. **Proyección estereográfica.** — DEF. 11. Para estudiar las figuras trazadas sobre una esfera conviene proyectarlas desde un punto P de la misma (llamado polo) sobre un plano cualquiera paralelo al plano tangente en P. Esta proyección se llama *estereográfica.* Como plano de proyección suele tomarse el tangente a la esfera en el punto opuesto diametralmente al P, o bien el plano ecuatorial paralelo; en este caso llamaremos *ecuatorial* a la proyección.

A cada punto de la esfera corresponde un punto del plano,

y viceversa; pero hay un punto excepcional, que es el polo P que carece de proyección, pues al acercarse un punto M, de la esfera, hacia P, el rayo PM tiende hacia una tangente a la esfera, y, por ser paralela al plano de proyección, no lo corta; pero sí determina una dirección o punto en el infinito. Según cual sea la dirección en que M tiende hacia P, así resulta una dirección distinta en el plano; y recíprocamente: a cada dirección, cualquiera que sea, trazada en el plano, corresponde siempre el mismo punto P.

Las propiedades fundamentales de la proyección estereográfica son dos: la primera es el

TEOR. 12. *Dos curvas cualesquiera del plano, que se cortan en un punto* M′ *forman un ángulo igual al de sus correspondientes de la esfera.*

El ángulo de dos curvas se mide por el ángulo de sus tangentes; bastará, pues, considerar en el plano dos rectas, a', b', que forman en M′ el ángulo α. Los rayos proyectantes desde P forman dos planos, es decir, un diedro, de arista PM, que corta al plano tangente según un ángulo a_1, b_1, de lados paralelos y, por tanto, de amplitud α. Estos dos planos proyectantes cortan a la esfera en dos arcos que son las proyecciones de las rectas a', b'; arcos que pasan por P y, además, por el punto M, proyección del M′ donde tienen tangentes a y b. Pero dos circunferencias de una esfera forman ángulos iguales en sus puntos de intersección, luego resulta:

$$a_1 b_1 = ab = a'b'$$

como queríamos demostrar (fig. 147).

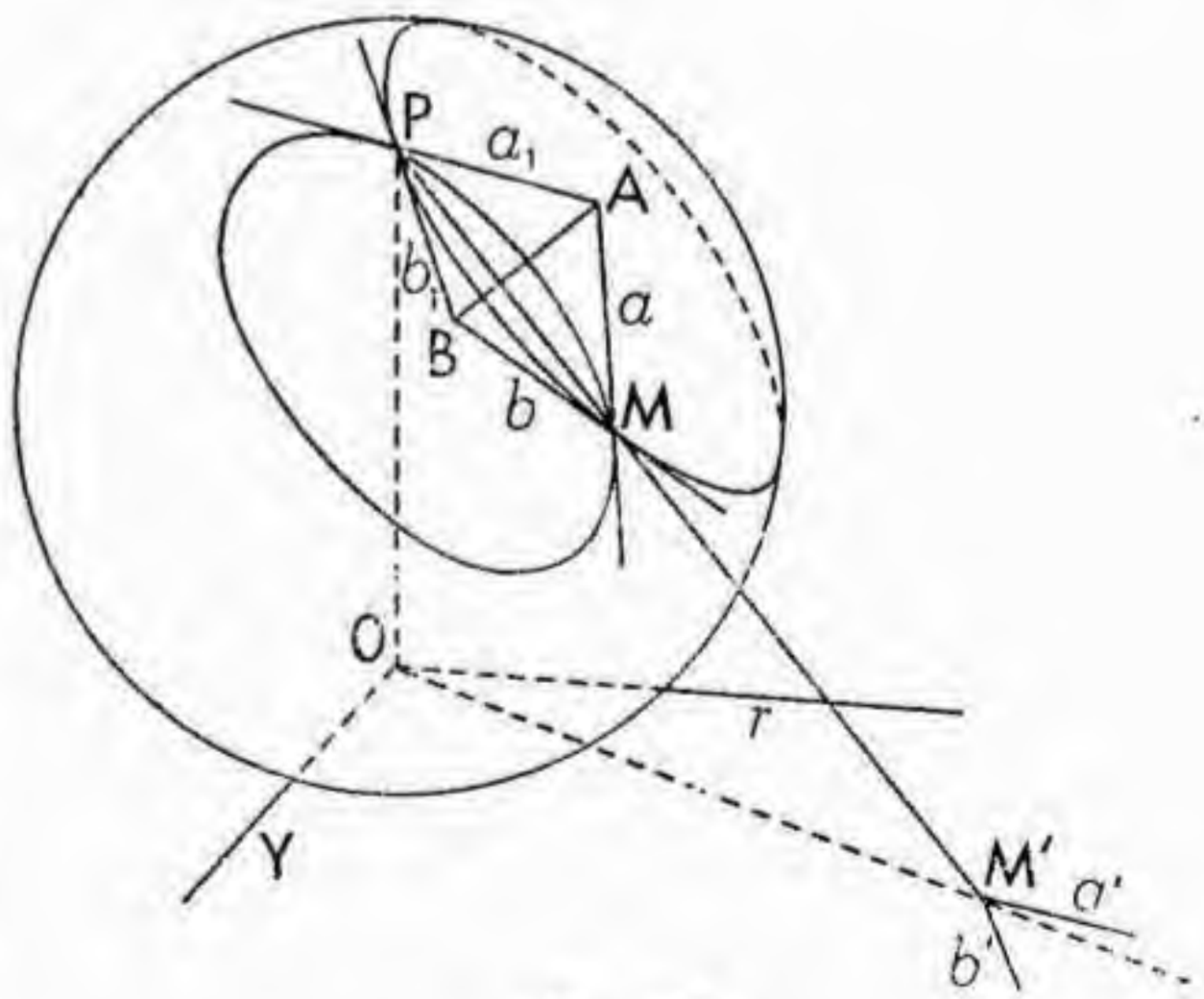

Fig. 147.

Demostraremos ahora la segunda propiedad fundamental: la proyección estereográfica de toda sección plana de la esfera es una circunferencia. Entre los planos diametrales que pasan por el eje PO hay uno perpendicular a dicha sección, y, por simetría de la esfera, la sección es también simétrica y lo es también el cono proyectante. Si dicho plano de simetría es el del dibujo, será AB el diámetro de la circunferencia y ABP la sección diametral del cono. Vamos a demostrar

que la sección A'B', producida por el plano estereográfico, es también el diámetro de un círculo (fig. 148).

Esto resulta observando que las secciones AB y A'B' son antiparalelas, es decir: áng. PAB = áng. A'B'P; y aunque en Geometría Elemental se demuestran las propiedades de estas secciones, vamos a deducirlas brevemente.

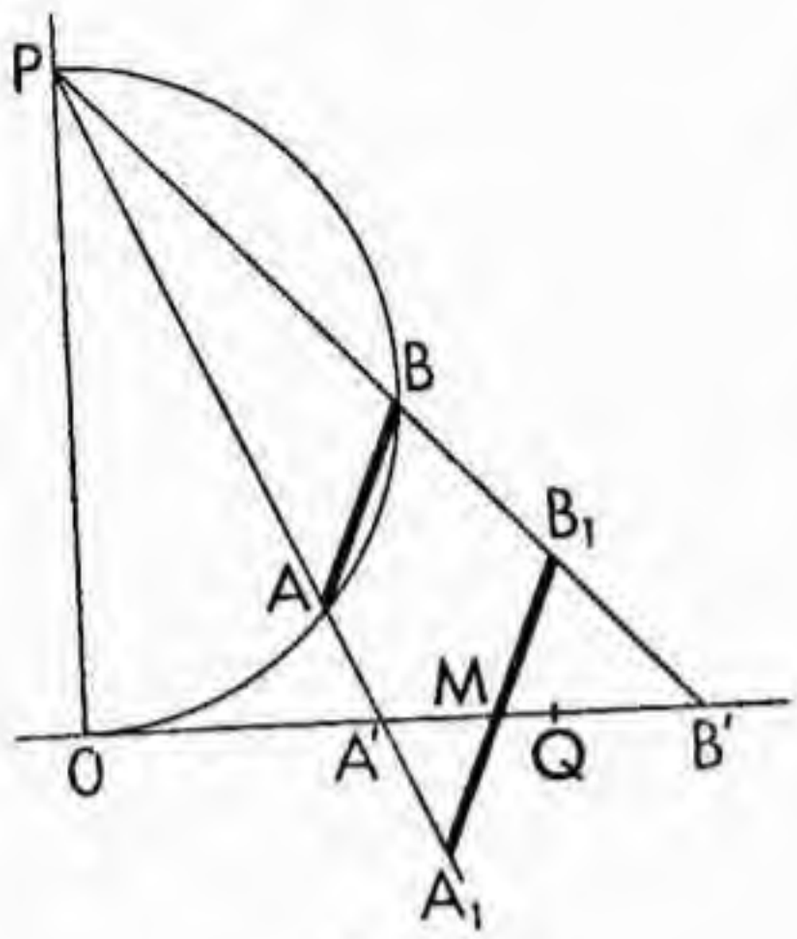

Fig. 148.

Desde luego, todas las secciones paralelas a AB son circunferencias. Si por cada punto M de la sección antiparalela A'B' trazamos un plano paralelo al AB, se verifica:

$$\frac{MA'}{MA_1} = \frac{MB'}{MB_1}$$

de donde: $MA' . MB' = MA_1 . MB_1$.

Sea $y = MN$ la ordenada común a las dos curvas secciones, cuyas trazas sobre el plano del dibujo son A_1B_1 y A'B'. Por ser la primera una circunferencia, se verifica:

$$y^2 = MA_1 . MB_1, \quad \text{luego:} \quad y^2 = MA' . MB'.$$

Tomando el punto Q medio de A'B' como origen, y llamando R a la mitad de este segmento, resulta:

$$(R + x)(R - x) = y^2, \quad \text{o sea:} \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

Por tanto:

TEOR. 13. *La proyección estereográfica de una circunferencia de la esfera es una circunferencia del plano.*

10. **Estudio analítico de la proyección estereográfica.** — Tomaremos un sistema de coordenadas cuyo centro sea el de la superficie esférica, el eje OZ pasando por el polo y el segmento unidad igual al radio. Como plano de proyección tomaremos el plano XY, es decir, consideramos una proyección ecuatorial.

La superficie esférica tiene entonces como ecuación

[14] $$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

y el polo como coordenadas (0, 0, 1).

Sea $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto de la esfera y M'_0 el punto proyección de M_0 desde el polo P; sean X_0 é Y_0 las coordenadas de M'_0. La recta PM'_0 tiene como ecuaciones

$$\frac{x}{X_0} = \frac{y}{Y_0} = \frac{z-1}{-1} \quad ;$$

y como M_0 está en la recta, se tiene

$$\frac{x_0}{X_0} = \frac{y_0}{Y_0} = 1 - z_0 \quad ;$$

por consiguiente, las relaciones que ligan las coordenadas X, Y de un punto del plano con las x, y, z de su proyectado son

$$[15] \qquad X = \frac{x}{1-z} \; ; \quad Y = \frac{y}{1-z} .$$

Supongamos ahora dadas X é Y, y vamos a determinar x, y, z. De [15] deducimos

$$\frac{x^2}{X^2} = \frac{y^2}{Y^2} = \frac{(1-z)^2}{1} = \frac{x^2+y^2+z^2-2z+1}{X^2+Y^2+1} ,$$

y teniendo en cuenta [14], se tiene

$$[16] \qquad \frac{x^2}{X^2} = \frac{y^2}{Y^2} = \frac{2(1-z)}{X^2+Y^2+1} \; ;$$

Reemplazando $1-z$ por su valor deducido de [15] se tiene

$$\frac{x^2}{X^2} = \frac{2}{X^2+Y^2+1} \cdot \frac{x}{X} \; ; \quad \frac{y^2}{Y^2} = \frac{2}{X^2+Y^2+1} \cdot \frac{y}{Y} \; ;$$

y por lo tanto

$$[17] \qquad x = \frac{2X}{X^2+Y^2+1} \; ; \quad y = \frac{2Y}{X^2+Y^2+1}$$

Además de [16] y [17] se deduce

$$2(1-z) = \frac{x^2}{X^2} \; (X^2+Y^2+1) = \frac{4}{X^2+Y^2+1} \; ;$$

$$z = 1 - \frac{2}{X^2+Y^2+1} \; ;$$

$$[18] \qquad z = \frac{X^2+Y^2-1}{X^2+Y^2+1} .$$

Las fórmulas [17] y [18] nos dan por lo tanto las coordenadas del punto proyectado en función de las de su proyección.

Vamos ahora a probar el teorema 13.

Una circunferencia en la superficie esférica queda determinada por la intersección de la superficie esférica con un plano. Sea la ecuación del plano

$$[19] \qquad ax + by + cz + d = 0 .$$

De acuerdo con [17] las coordenadas de los puntos proyecciones de la circunferencia satisfacen a la relación

$$\frac{2aX}{X^2+Y^2+1} + \frac{2bY}{X^2+Y^2+1} + c\,\frac{X^2+Y^2-1}{X^2+Y^2+1} + d = 0 .$$

$$[20] \qquad (c+d)(X^2+Y^2) + 2aX + 2bY + d - c = 0$$

que es la ecuación de una circunferencia si $c+d \neq 0$.

Pongamos la ecuación de la circunferencia en forma normal,

$$X^2 + Y^2 + \frac{2a}{c+d} X + \frac{2b}{c+d} Y + \frac{d-c}{c+d} = 0 \; ;$$

para que sea real tiene que ser

$$0 < \frac{a^2}{(c+d)^2} + \frac{b^2}{(c+d)^2} - \frac{d-c}{c+d} = \frac{a^2+b^2+c^2-d^2}{(c+d)^2}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 > d^2$$

$$\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2} < 1 .$$

Pero el primer miembro de esta desigualdad es el cuadrado de la distanca del plano $ax + by + cz + d = 0$, al origen (§ 36, nº 6) y si el plano corta a la superficie esférica, su distancia tiene que ser menor que 1, radio de la esfera, luego la proyección es una circunferencia real.

Si fuese $a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = 0$ el plano sería tangente a la superficie esférica; la circunferencia proyectada y la de proyección se reducen ambas a un punto. Si fuese $a^2 + b^2 + c^2 - d^2 < 0$ ambas circunferencias son imaginarias.

Si $c + d = 0$, la ecuación representa una recta; el plano pasa entonces por el polo como se ve reemplazando las coordenadas de éste en la ecuación del plano.

Recíprocamente, sea la circunferencia

[21] $$m(X^2 + Y^2) + nX + pY + q = 0$$

que se reduce a una recta si es $m = 0$; según [15] las coordenadas de los puntos de la superficie esférica cuya proyección está en la circunferencia satisfacen a la relación

$$m\frac{x^2 + y^2}{(1-z)^2} + n\frac{x}{1-z} + p\frac{y}{1-z} + q = 0 \quad ;$$

y teniendo en cuenta [14] y multiplicando por $1 - z$, esta relación toma la forma

$$m(1 + z) + nx + py + q(1 - z) = 0$$

[22] $$nx + py + z(m - q) + m + q = 0$$

que es la ecuación de un plano que determina en la superficie esférica una circunferencia, si su distancia al origen es menor que 1, es decir, que tiene que ser

$$\frac{(m + q)^2}{n^2 + p^2 + (m - q)^2} < 1$$

$$(m + q)^2 < n^2 + p^2 + (m - q)^2$$

$$4mq < n^2 + p^2$$

pero si la circunferencia de ecuación [21] es real, se tiene

$$\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p^2}{4m^2} - \frac{q}{m} > 0$$

$$n^2 + p^2 - 4mq > 0 \quad ;$$

luego, se cumple la condición.

Si fuese $m = 0$, la ecuación [21] representa una recta y la [22] un plano que pasa por el polo, ya que su ecuación se satisface para $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$.

Vamos a probar ahora el teorema 12. Como el ángulo de dos rectas en el plano es la diferencia de los ángulos que forman con el eje OX, el teorema estará probado si demostramos que la circunferencia correspondiente a una recta cualquiera y la correspondiente al eje OX, que es el círculo máximo situado en el plano XZ, se cortan bajo el mismo ángulo que la recta del plano y el eje OX; las tangentes a ambas circunferencias están en el plano tangente a la superficie esférica en el polo, es decir, en el plano $z = 1$; luego, su ángulo es igual al de sus proyecciones ortogonales en el plano XY.

Sea la recta de ecuación

$$nX + pY + q = 0 \quad ;$$

la circunferencia correspondiente está, [22], en el plano

$$nx + py - qz + q = 0$$

y la tangente a esta circunferencia está en este plano y en el $z = 1$. Sus ecuaciones son, por lo tanto,

$$nx + py - qz + q = 0 \quad ; \quad z = 1$$

o bien,

$$nx + py = 0 \quad ; \quad z = 1 \quad ;$$

luego, la proyección ortogonal de esta tangente tiene como ecuación en XY

$$nX + pY = 0 \quad ;$$

es decir, es paralela a la recta dada, lo que prueba el teorema.

§ 39. Elipsoides

1. **Ecuaciones reducidas de las cuádricas.** — Definición 1. Una cuádrica es una superficie cuya ecuación en un sistema de coordenadas cartesianas (rectangulares o no) es un polinomio de segundo grado en las tres variables x, y, z, igualado a cero.

Como las fórmulas de cambio de coordenadas son lineales, el grado del polinomio no altera al hacer el cambio, luego la definición anterior es independiente del sistema de coordenadas. La ecuación general de las cuádricas es por consiguiente

$$[1] \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2gxz + 2fyz + 2lx + \\ + 2my + 2nz + d = 0.$$

Las cuádricas son la generalización, al espacio, de las cónicas. Al estudiar éstas vimos que sus ecuaciones podían siempre reducirse a alguno de los tipos siguientes:

$$[2] \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad [6] \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$[3] \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0 \qquad [7] \quad y^2 - 2px = 0$$

$$[4] \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad [8] \quad y^2 - a = 0$$

$$[5] \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad [9] \quad y^2 = 0$$

que se denominaban ecuaciones reducidas de las cónicas.

Podemos ahora intentar generalizar estas ecuaciones al caso de tres variables y estudiar las ecuaciones que así se obtienen.

Las ecuaciones [2], [3] y [4] generalizadas al espacio y teniendo en cuenta las combinaciones posibles de signos, nos dan las siguientes ecuaciones[1]:

[1] Desde luego que en las combinaciones posibles de signos no tenemos en cuenta las ecuaciones que se obtienen permutando las variables o multiplicando la ecuación por —1.

[10] $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

[11] $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

[12] $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

[13] $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

Análogamente, la generalización de las ecuaciones [5] y [6] nos conduce a las ecuaciones

[14] $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

[15] $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

La ecuación [7], generalizándola, tomando dos términos de segundo grado y uno de primero, nos conduce a las ecuaciones

[16] $$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0$$

[17] $$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2x = 0.$$

Con respecto a las ecuaciones [8] y [9], observamos que se caracterizan por faltar una de las variables; si suponemos que la variable que falta es la z, entonces las ecuaciones [2] a [9], consideradas como ecuaciones de superficies en el espacio, nos suministran otras tantas posibles ecuaciones de las cuádricas.

Más adelante veremos que la ecuación de cualquier cuádrica puede, mediante una adecuada elección de sistema de coordenadas, ponerse en una de las formas [2] a [17] que acabamos de enunciar.

Las superficies de ecuación [10], análoga a la de la elipse, se denominan *elipsoides*. Las superficies de ecuación [11] que no tienen puntos reales se denominan *elipsoides imaginarios*, y las de ecuaciones [12] y [13] *hiperboloides*.

Las ecuaciones homogéneas [14] y [15] tienen la propiedad de que si se satisfacen para los valores x_0, y_0, z_0, se satisfacen también para los valores λx_0, λy_0, λz_0, luego están formadas por rectas que pasan por el origen, es decir, son *conos reales* en el caso de las superficies de ecuación [14], e *imaginarios* en el caso de superficies de ecuación [15] que sólo tienen la solución real $(0, 0, 0)$.

Las superficies de ecuaciones [16] y [17] se denominan *paraboloides*. Con respecto a las ecuaciones [2] a [9], todas ellas tienen la propiedad siguiente: sus puntos satisfacen a la ecuación siendo z cualquiera. Son, por consiguiente, *cilindros* formados por rectas paralelas al eje OZ y que pasan por una cónica del plano XY, cuya ecuación es la de la superficie, considerada como ecuación de una cónica del plano XY.

Por consiguiente, la ecuación [2] representará un *cilindro elíptico*, la [3] un *cilnidro imaginario*, la [4] un *cilindro hiperbólico*. Las [5] y [6] en el plano representan dos rectas que se cortan, reales o imaginarias, luego en el espacio, las superficies de ecuación [5] representarán dos *planos imaginarios que se cortan*, y las de ecuación [6] *dos planos reales que se cortan*. Las superficies de ecuación [7] son *cilindros parabólicos*, las de ecuación [8] representan *dos planos paralelos reales o imaginarias*, y las de ecuación [9] *un plano real doble*.

2. **Elipsoide: definición y forma.** — DEF. 2. Se llama *elipsoide* a la superficie que, con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas (rectangulares o no), tiene una ecuación reducible a la forma

$$[18] \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

De la simple consideración de la ecuación se deduce que el origen es un centro de simetría que se denomina el *centro del elipsoide* y que los ejes y planos coordenados son ejes de simetría oblicua.

Para estudiar la forma del elipsoide (fig. 149) consideraremos las secciones del elipsoide por planos paralelos a los ejes; por ejemplo al plano XY, sea $z = k$ la ecuación de uno de esos planos. Si llevamos el origen al punto $(0, 0, k)$, la ecuación del elipsoide toma la forma

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2 + 2kz' + k^2}{c^2} = 1$$

y cortándola por el plano dado, cuya ecuación es ahora $z' = 0$, obtenemos como ecuación de la curva sección

$$[19] \qquad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2} = 1.$$

La sección es, por consiguiente, una elipse referida a dos diámetros conjugados, y que es real únicamente si se tiene $-c < k < c$, lo que muestra que el elipsoide está comprendido dentro de los planos de ecuaciones $z = -c$ y $z = c$; análogamente se ve que el elipsoide está comprendido dentro de los

planos de ecuaciones $x = -a$, $x = a$, y dentro de los de ecuaciones $y = -b$, $y = b$.

La elipse de ecuación [19] tiene su centro en OZ y los diámetros conjugados paralelos a OX y OY tienen sus extremos en las elipses ACA'C' y en la BCB'C', secciones del elipsoide por los planos $y = 0$ y $x = 0$.

Por lo tanto, puede definirse el elipsoide de una forma geométrica de la manera siguiente:

Dadas tres rectas concurrentes y no coplanarias OX, OY y OZ; en los planos XOZ y ZOY consideraremos dos elipses ACA'C' y BCB'C' que tienen OX y OZ, y OY y OZ como diá-

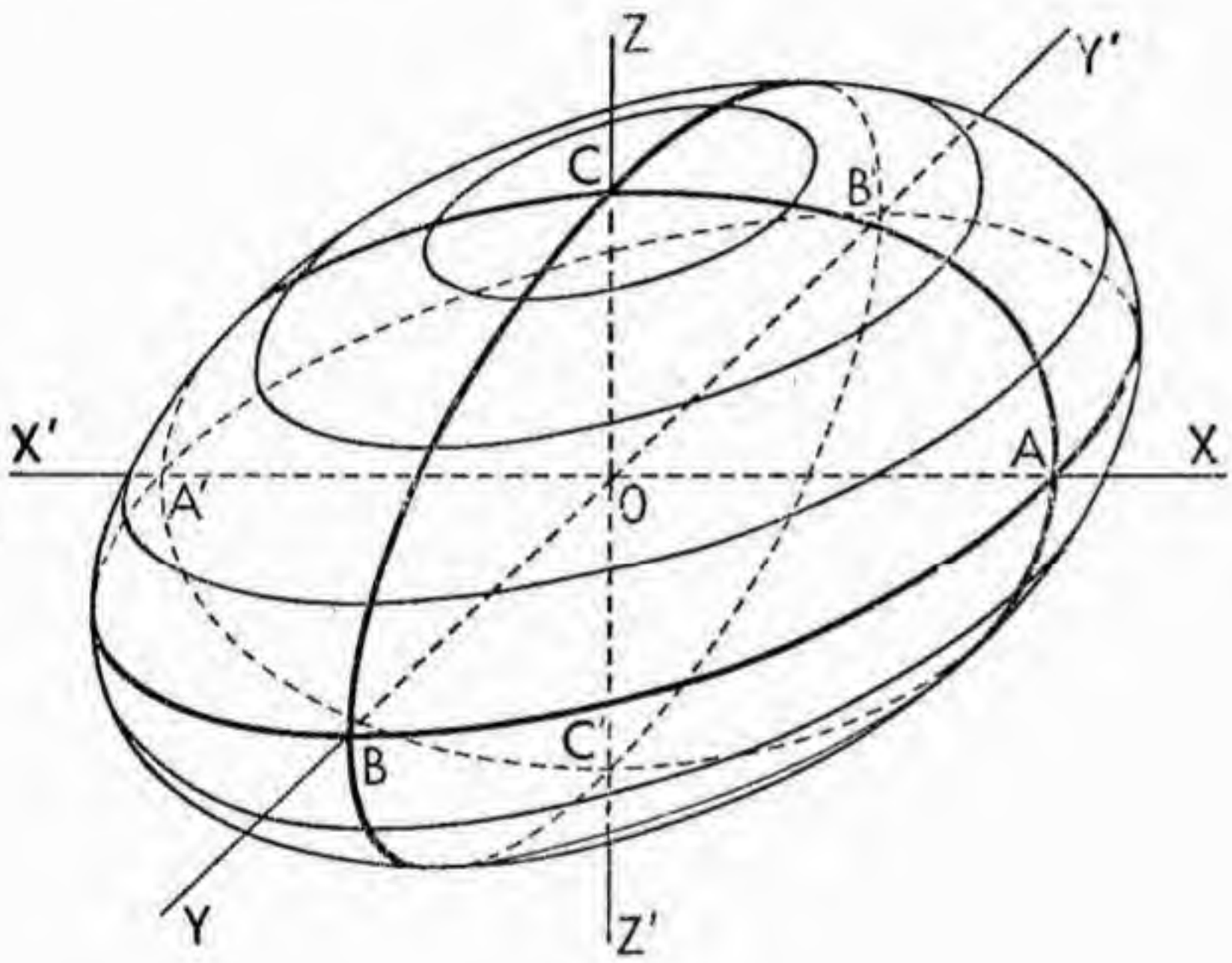

Fig. 149.

metros conjugados, respectivamente, siendo comunes los extremos del diámetro OZ, entonces el elipsoide puede definirse como la superficie engendrada por una elipse variable cuyo centro está en OZ, cuyo plano es paralelo al XOY y tal que dos diámetros conjugados tengan sus extremos en las dos elipses dadas ACA'C' y BCB'C' (fig. 149).

3. **Intersección del elipsoide con una recta. Planos diametrales.** — Sea una recta cualquiera de coeficientes directores α, β, γ. Siempre puede suponerse uno de éstos distinto de cero, supongamos que fuese el α. Las ecuaciones de la recta pueden entonces escribirse en la forma

$$[20] \qquad y = \frac{\beta}{\alpha} x + h \quad ; \quad z = \frac{\gamma}{\alpha} x + k.$$

Reemplazando estos valores de x en la ecuación del elipsoide se tiene la ecuación

$$[21] \qquad x^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)+2x\alpha\left(\frac{\beta h}{b^2}+\frac{\gamma k}{c^2}\right)+$$
$$+\alpha^2\left(\frac{h^2}{b^2}+\frac{k^2}{c^2}-1\right)=0$$

cuyas raíces son las abscisas de los puntos comunes al elipsoide con la recta.

El coeficiente de x^2 en [21] es siempre distinto de cero, luego esta ecuación es siempre de segundo grado; luego podemos enunciar el siguiente resultado:

TEOREMA 1. *Una recta corta siempre a un elipsoide en dos puntos, que pueden ser reales y distintos, reales y confundidos o imaginarios conjugados.*

DEF. 2. En el segundo caso se dice que la recta es *tangente* al elipsoide.

Vamos a determinar ahora las coordenadas del punto medio del segmento (de extremos reales y distintos, o imaginarios conjugados, o reducido a un solo punto) que determina el elipsoide en la recta. La abscisa es la semisuma de las raíces de la ecuación [21] y las otras coordenadas se determinan aplicando las fórmulas [20]. Se tiene, entonces,

$$x\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)=-\alpha\left(\frac{\beta h}{b^2}+\frac{\gamma k}{c^2}\right);$$

$$y=\frac{\beta}{\alpha}x+h \quad ; \quad z=\frac{\gamma}{\alpha}x+k \quad ,$$

y si eliminamos h y k entre estas tres ecuaciones se tiene

$$\frac{\alpha^2 x}{a^2}+\frac{\beta^2 x}{b^2}+\frac{\gamma^2 x}{c^2}=-\frac{\alpha\beta}{b^2}\left(y-\frac{\beta}{\alpha}x\right)-\frac{\alpha\gamma}{c^2}\left(z-\frac{\gamma}{\alpha}x\right)=$$
$$=-\frac{\alpha\beta y}{b^2}+\frac{\beta^2}{b^2}x-\frac{\alpha\gamma z}{c^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}x$$

y simplificando

$$[22] \qquad \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=0.$$

Pero esta relación no depende para nada de h y k, luego se satisface cualesquiera que éstos sean, es decir, los puntos medios de los segmentos interceptados sobre el elipsoide por cualquier recta de coeficientes directores α, β y γ satisfacen a la ecuación [22], y como esta ecuación es la de un plano, se deduce: que dichos puntos están en un plano; recíprocamente.

dado un punto del plano existe siempre una recta y una sola paralela a las dadas que pasa por él, luego se tiene el siguiente teorema:

TEOR. 2. *El lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos interceptados por el elipsoide sobre las rectas paralelas a una dirección dada es un plano, que se denomina plano diametral.*

DEF. 3. Este plano se dice que es el *plano conjugado* de la dirección dada y recíprocamente la dirección se dice conjugada del plano.

Si los coeficientes directores de la dirección son α, β, γ, la ecuación del plano conjugado es la [22].

Como se tiene evidentemente

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \neq 0$$

se ve que *un plano diametral no puede ser nunca paralelo a su dirección conjugada,* lo que resulta también inmediatamente de la definición.

El plano diametral pasa siempre por el centro y puede demostrarse que: *recíprocamente, todo plano que pasa por el centro es un plano diametral.* Basta ver que si la ecuación del plano es

$$mx + ny + pz = 0$$

la dirección de los coeficientes directores a^2m, b^2n, c^2p, es conjugada del plano dado.

Por otra parte se ve de la definición de plano diametral que:

TEOR. 3. *La sección del elipsoide por un plano diametral es el lugar geométrico de los puntos de contacto de las tangentes al elipsoide paralelas a la dirección conjugada.*

De las propiedades de simetría oblicua de los ejes y planos coordenados se deduce que los planos conjugados de las direcciones paralelas a OX, OY y OZ son los planos YZ, XZ y XY.

4. **Diámetros. Diámetros conjugados.** — TEOR. 4. *Los planos diametrales conjugados de las direcciones paralelas a un plano fijo que pasa por el centro, pasan todos por una misma recta, que se denomina diámetro.*

DEF. 4. Este diámetro se dice que es el diámetro conjugado del plano dado y recíprocamente.

Vamos a demostrar el teorema. En efecto, sea P el plano fijo; como pasa por el centro es un plano diametral; sean α, β, γ, los coeficientes directores de su dirección conjugada D, la ecuación de P es [22].

Sea D′ una dirección cualquiera paralela a P y sean α', β', γ' sus coeficientes directores, los que tendrán que cumplir la relación

$$[23] \qquad \frac{\alpha\alpha'}{a^2} + \frac{\beta\beta'}{b^2} + \frac{\gamma\gamma'}{c^2} = 0 \quad ;$$

pero el plano P′ diametral conjugado de D′ tiene por ecuación

$$\frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\beta' y}{b^2} + \frac{\gamma' z}{c^2} = 0$$

y la relación [23] nos indica que P′ es paralelo a D; como pasa por el origen contiene la recta R paralela a D por el origen, lo que prueba el teorema.

Vemos, por consiguiente, que los diámetros son rectas que pasan por el centro del elipsoide y recíprocamente cualquier recta que pase por el centro es un diámetro conjugado de su plano diametral.

Resumiendo: *entre las rectas que pasan por el centro (diámetros) y los planos que pasan por el centro (planos diametrales) existe una correspondencia biunívoca tal que todo plano es el diametral conjugado de la recta correspondiente y ésta es el diámetro conjugado del plano.*

Si en las ecuaciones [20] de una recta suponemos que pasa por el centro, se tiene $h = 0$ y $k = 0$, la ecuación [21] tiene entonces siempre dos raíces reales no nulas, iguales en valor absoluto y de signos contrarios; luego todo diámetro corta al elipsoide en dos puntos simétricos con respecto al origen que se denominan los *extremos del diámetro.*

5. Ecuación del elipsoide referida a una terna de diámetros conjugados. — Se dice que tres diámetros son conjugados cuando cada uno de ellos es conjugado del plano que determinan los otros dos; por consiguiente, para obtener una terna de diámetros conjugados, basta tomar uno de ellos D arbitrariamente, el otro D′ arbitrariamente pero dentro del plano diametral conjugado de D, y el otro D″ es el diámetro conjugado del plano determinado por D y D′.

Refiramos ahora la ecuación del elipsoide a un sistema de ejes formados por tres diámetros conjugados; como las fórmulas de cambio de coordenadas son lineales, la nueva ecuación seguirá siendo de segundo grado; toda cuerda paralela a uno de los nuevos ejes de coordenadas, al OZ′, por ejemplo, es cortada en su punto medio por el plano X′OY′, luego la ecuación no se altera al cambiar z en $-z$, y por consiguiente sólo contiene potencias pares de z; análogamente, se ve que sólo contiene potencias pares de x y de y, luego su ecuación es de la forma

$$mx'^2 + ny'^2 + pz'^2 + q = 0.$$

Sean a', b' y c' las distancias de los extremos de los diámetros OX', OY' y OZ' al origen; los puntos de coordenadas $(a', 0, 0)$, $(0, b', 0)$ y $(0, 0, c')$ pertenecen al elipsoide, lo que nos da las relaciones

$$ma'^2 + q = 0 \quad ; \quad nb'^2 + q = 0 \quad ; \quad pc'^2 + q = 0$$

$$m = -\frac{q}{a'^2} \quad ; \quad n = -\frac{q}{b'^2} \quad ; \quad p = -\frac{q}{c'^2}$$

y la ecuación del elipsoide, reemplazando y dividiendo por $-q$, toma la forma

$$[24] \qquad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

que es la ecuación del elipsoide referida a una terna cualquiera de diámetros conjugados.

Dado ahora un plano cualquiera que corte al elipsoide, podemos referir éste a un sistema de diámetros conjugados cuyo plano X'Y' sea paralelo al de la sección; las consideraciones que hicimos en nº 2 sobre la forma del elipsoide son ahora aplicables y por consiguiente podemos enunciar el teorema siguiente:

TEOR. 4. *Cualquier sección plana del elipsoide es una elipse cuyo centro está en el diámetro conjugado de la dirección del plano.*

6. Planos tangentes al elipsoide. — Sea M un punto del elipsoide y t y t' dos rectas tangentes en M al elipsoide; sea P el plano determinado por t y t'. El plano diametral conjugado de la dirección t pasa por M, por ser M el punto de contacto (Teorema 3), y lo mismo el conjugado de la dirección de t', luego (Teorema 4) M pertenece al diámetro conjugado del plano paralelo a P por el origen, o lo que es lo mismo el plano P es paralelo al plano diametral conjugado de OM; este plano es independiente de la elección de las tangentes t y t'. Podemos así enunciar el siguiente teorema:

TEOR. 5. *Las rectas tangentes a un elipsoide en un punto* M *del mismo están todas situadas en el plano paralelo al diametral conjugado del diámetro que pasa por* M.

DEF. 5. El plano, lugar geométrico de las rectas tangentes al elipsoide en un punto del mismo, se denomina *plano tangente al elipsoide.*

Vamos a determinar su ecuación. Sea $M(x_0, y_0, z_0)$ el punto. Como coeficientes directores de la recta OM, podemos to-

mar x_0, y_0, z_0. La ecuación del plano diametral conjugado de la dirección OM es [22],

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

El plano tangente siendo paralelo a éste y pasando por el punto tiene como ecuación

$$\frac{(x - x_0)x_0}{a^2} + \frac{(y - y_0)y_0}{b^2} + \frac{(z - z_0)z_0}{c^2} = 0$$

y como las coordenadas de M satisfacen a la ecuación de la elipse, queda

$$[25] \qquad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

que es la *ecuación del plano tangente* en un punto al elipsoide.

Supongamos ahora un plano de ecuación $mx + ny + pz + q = 0$, y vamos a determinar los planos tangentes paralelos a esta dirección. El problema se reduce a determinar los puntos de contacto. Sea (x_0, y_0, z_0) uno de estos puntos; se tienen las siguientes relaciones:

$$\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} + \frac{z^2_0}{c^2} = 1 \quad ; \quad \frac{x_0}{a^2m} = \frac{y_0}{b^2n} = \frac{z_0}{c^2p} = \lambda$$

$$x_0 = \lambda a^2 m \quad , \quad y_0 = \lambda b^2 n \quad ; \quad z_0 = \lambda c^2 p$$

$$1 = \frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} + \frac{z^2_0}{c^2} = \lambda^2 a^2 m^2 + \lambda^2 b^2 n^2 + \lambda^2 c^2 p^2$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2m^2 + b^2n^2 + c^2p^2}}.$$

La ecuación del plano tangente es

$$mx + ny + pz - (mx_0 + ny_0 + pz_0) = 0$$

$$mx + ny + pz - (\lambda a^2m^2 + \lambda b^2n^2 + \lambda c^2n^2) = 0$$

$$[26] \qquad mx + ny + pz \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2n^2 + c^2n^2} = 0$$

que son las *ecuaciones de los dos planos tangentes al elipsoide paralelos a un plano dado.*

El teorema 3 nos sirve para determinar las *tangentes paralelas a una recta dada*; sus puntos de contacto están en la sección del elipsoide por el plano diametral conjugado de la dirección dada; deben satisfacer por lo tanto a las dos ecuaciones:

$$\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} + \frac{z^2_0}{c^2} = 1 \quad ; \quad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 0.$$

Las tangentes forman un cilindro circunscrito al elipsoide.

Consideremos ahora los *planos tangentes que pasan por un punto del espacio.* Sea $M_1(x_1, y_1, z_1)$ el punto; las coordenadas (x_0, y_0, z_0) del punto de contacto de un plano tangente que pase por M_1, deben de satisfacer únicamente las siguientes condiciones:

$$\frac{x^2_0}{a^2} + \frac{y^2_0}{b^2} + \frac{z^2_0}{c^2} = 1 \quad ; \quad \frac{x_1x_0}{a^2} + \frac{y_1y_0}{b^2} + \frac{z_1z_0}{c^2} = 1 \quad ;$$

luego los puntos de contacto son los de la intersección del elipsoide con el plano de ecuación

$$[27] \qquad \frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} + \frac{z_1z}{c^2} = 1$$

que se denomina plano polar del punto M_1.

Es por otra parte consecuencia inmediata de la definición de plano tangente, que *las rectas tangentes al elipsoide que pasan por el punto* M_1 son las que unen M_1 con la sección del elipsoide por el plano polar, es decir, que *forman un cono circunscrito al elipsoide de vértice* M_1.

La definición que hemos dado del plano polar de un punto M_1, plano que pasa por los puntos de contacto de las tangentes y planos tangentes al elipsoide, trazados por M_1, es la extensión al espacio de la propiedad de la polar en las cónicas, al pasar por los puntos de contacto de las tangentes (teorema 5 del § 21). Puede también definirse el plano polar con respecto al elipsoide, o en general a una cuádrica, como el lugar de los puntos conjugados armónicos del punto dado con respecto a los puntos de intersección del elipsoide con una recta cualquiera que pase por dicho punto.

7. Propiedades métricas del elipsoide. — El teorema fundamental es el siguiente:

TEOR. 6. *En todo elipsoide existe por lo menos una terna de diámetros conjugados, perpendiculares dos a dos.*

Para probar este teorema basta probar el siguiente

LEMA: *En todo elipsoide existe por lo menos un diámetro que es perpendicular a su plano diametral conjugado.*

En efecto, basta tomar entonces como terna de diámetros conjugados el diámetro del lema y los ejes de la elipse sección del elipsoide por el plano diametral conjugado.

Todo se reduce, pues, a probar el lema.

Vamos a demostrarlo.

Observemos primeramente que la superficie esférica es un caso particular del elipsoide (coordenadas rectangulares y a, b, c iguales al radio de la superficie esférica). Por otra parte, es inmediato que el plano conjugado de un diámetro con respecto a la esfera es el perpendicular a dicho diámetro.

Por lo tanto, el lema estaría probado si pudiésemos probar que dados un elipsoide cualquiera y una superficie esférica de centro el del elipsoide, ambas superficies tienen un diámetro y plano diametral conjugados comunes.

Dado un elipsoide cualquiera siempre lo podemos referir a un sistema de diámetros conjugados OX, OY y OZ, tal que los ejes OZ y OY sean perpendiculares; en efecto, fijado arbitrariamente OZ, basta tomar una perpendicular a él en su plano conjugado. Sean λ y μ los ángulos que forma OX con OY y OZ. El elipsoide tendrá como ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{28}$$

Consideremos una superficie esférica de centro el del elipsoide (es decir el origen) y radio r. Su ecuación será, teniendo en cuenta la fórmula de la distancia de un punto al origen en ejes oblicuos,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos\lambda + 2xz\cos\mu = r^2. \tag{29}$$

Tomemos una recta cualquiera de coeficientes directores α, β y γ; sus ecuaciones paramétricas son

$$x = x_0 + \alpha\varrho \quad ; \quad y = y_0 + \beta\varrho \quad ; \quad z = z_0 + \gamma\varrho.$$

Reemplazando estos valores en la ecuación de la superficie esférica y ordenando respecto del parámetro ϱ, se tiene

$$\begin{aligned}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta\cos\lambda + 2\alpha\gamma\cos\mu)\varrho^2 + 2(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \\ + \alpha y_0\cos\lambda + \beta x_0\cos\lambda + \alpha z_0\cos\mu + \gamma x_0\cos\mu)\varrho + \\ + x^2_0 + y^2_0 + z^2_0 + 2x_0y_0\cos\lambda + 2x_0z_0\cos\mu = 0.\end{aligned}$$

Las raíces de esta ecuación en ϱ nos dan los valores del parámetro correspondientes a los puntos de intersección de la superficie esférica con la recta. Para que (x_0, y_0, z_0) sea el punto medio de la cuerda es necesario y suficiente que ambas raíces sean iguales en valor absoluto y de signos contrarios; es decir, que se anule el coeficiente de ϱ. Los puntos medios de las cuerdas paralelas a la dirección de coeficientes directores α, β, γ son entonces los puntos x, y, z, que satisfacen la ecuación

$$x(\alpha + \beta\cos\lambda + \gamma\cos\mu) + y(\alpha\cos\lambda + \beta) + z(\alpha\cos\mu + \gamma) = 0. \tag{30}$$

Ésta es, pues, la ecuación del plano diametral conjugado del diámetro de coeficientes directores α, β, γ con respecto a la superficie esférica. La ecuación del plano diametral conjugado con respecto al elipsoide es [22]:

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} = 1 \quad ; \tag{31}$$

luego, para que [30] y [31] representen el mismo plano, es condición necesaria y suficiente que exista un factor S distinto de cero tal que se tenga

$$\left\{\begin{aligned} \alpha + \beta\cos\lambda + \gamma\cos\mu &= \frac{S\alpha}{a^2} \\ \alpha\cos\lambda + \beta &= \frac{S\beta}{b^2} \\ \alpha\cos\mu + \gamma &= \frac{S\gamma}{c^2} \end{aligned}\right. . \tag{32}$$

La demostración del lema queda ahora subordinada a probar que se pueden encontrar valores de α, β, γ (no nulos los tres) y un valor de S, no nulo, que satisfagan el sistema [32] de ecuaciones. Pero este sistema

siendo lineal homogéneo en α, β, γ, es condición necesaria y suficiente para que existan soluciones no todas nulas que sea cero el determinante

$$[33] \qquad \begin{vmatrix} 1 - \frac{S}{a^2} & \cos\lambda & \cos\mu \\ \cos\lambda & 1 - \frac{S}{b^2} & 0 \\ \cos\mu & 0 & 1 - \frac{S}{c^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Esta es una ecuación en S de tercer grado, siendo el coeficiente de S^3, $-\frac{1}{a^2b^2c^2}$, que no es nulo; luego la ecuación tiene una raíz real. Si esta raíz fuese $S = 0$ debería ser nulo el determinante [33] para $S = 0$; desarrollándolo en esta hipótesis se llega a la conclusión $\cos^2\lambda + \cos^2\mu = 1$; luego OZ formaría con la perpendicular a los ejes OX y OY un ángulo ν tal que $\cos\nu = 0$; es decir, que estaría en el plano XY, lo que es absurdo.

La ecuación [33] admite, pues, siempre una raíz real no nula, y por lo tanto está probado el lema.

Referida la ecuación del elipsoide a tres diámetros conjugados ortogonales dos a dos tomará la forma

$$[34] \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Supondremos, salvo indicación en contrario, que los ejes se toman de modo que se tenga

$$[35] \qquad a \geqslant b \geqslant c.$$

DEF. 6. Los planos coordenados se denominan *planos principales*, y los ejes coordenados *ejes principales*, o simplemente *ejes* del elipsoide. Los puntos en que los ejes cortan al elipsoide se denominan *vértices*. Las secciones del elipsoide por los planos principales se denominan *secciones principales*; son elipses que tienen comunes con el elipsoide dos ejes. En la hipótesis $a > b > c$ se denomina *eje mayor* al eje OX, *eje medio* al OY y *eje menor* al OZ. Los números $2a$, $2b$, $2c$, que miden las distancias entre los vértices situados sobre un mismo eje se denominan *longitudes de los ejes*.

La distancia de un punto (x, y, z) del elipsoide al origen puede ponerse en las formas

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2 - \frac{a^2}{c^2}z^2 + y^2 + z^2 =$$

$$= a^2 - y^2\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) - z^2\left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + c^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 - \frac{c^2}{b^2}y^2 =$$

$$= c^2 + x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)$$

lo que muestra que, si ninguna de las desigualdades [35] es una igualdad, la distancia de un punto del elipsoide al centro es máxima para los vértices $(\pm a, 0, 0)$ y mínima para los vértices $(0, 0, \pm c)$.

Si fuese $a = b$, la distancia sería máxima para todos los puntos del plano XY y mínima para los dos vértices del eje OZ; si fuese $b = c$, máxima para los dos puntos del eje OX y mínima para los puntos del plano YZ. Si fuese $a = b = c$, todos los puntos equidistan del centro, el elipsoide se reduce a una superficie esférica.

Si las longitudes de dos ejes son iguales, por ejemplo $a = b$, la ecuación del elipsoide toma la forma

$$[36] \qquad \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Las secciones paralelas al plano XY son circunferencias, luego el elipsoide está engendrado por la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

situada en el plano XZ. Es por consiguiente una superficie de revolución que se denomina *elipsoide de revolución*; en este caso se dice que el elipsoide es alargado porque la elipse gira alrededor del eje mayor; si la elipse gira alrededor del eje menor, el elipsoide se dice aplastado, tal es el de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1.$$

Para finalizar daremos el teorema siguiente:

TEOR. 7. *En un elipsoide que no sea de revolución los únicos diámetros perpendiculares a sus planos diametrales conjugados son los ejes.*

En efecto, sea un diámetro de coeficientes directores α, β, γ; la ecuación de su plano diametral conjugado es [22]

$$\frac{x\alpha}{a^2} + \frac{y\beta}{b^2} + \frac{z\gamma}{c^2} = 0$$

y la condición para que este plano sea perpendicular a su diámetro conjugado es que exista $k \neq 0$, tal que

$$\frac{\alpha}{a^2} = k\alpha \quad ; \quad \frac{\beta}{b^2} = k\beta \quad ; \quad \frac{\gamma}{c^2} = k\gamma \quad ;$$

si a, b y c son distintos, esta condición sólo se satisface si son nulos dos de los coeficientes α, β; es decir, que los únicos diámetros perpendiculares a sus planos conjugados son los ejes, lo que prueba el teorema; si el elipsoide es de revolución $a = b$, las condiciones anteriores se cumplen cuando sea nulo γ, o

cuando lo sean a la vez α y β; es decir, que los diámetros perpendiculares a sus planos conjugados son el eje OZ y los situados en el plano XY; si $a = b = c$, las condiciones anteriores se cumplen idénticamente; volvemos a encontrar el caso de la esfera en que todo diámetro es perpendicular a su plano diametral conjugado.

§ 40. Hiperboloides y conos cuadráticos

1. **Hiperboloides: definición y forma. Cono asociado.** — Definición 1. Se llaman *hiperboloides de una hoja* e *hiperboloides de dos hojas* a las superficies cuyas ecuaciones referidas a un sistema de coordenadas cartesianas, rectangulares o no, son respectivamente reducibles a las formas

$$[1] \qquad \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$[2] \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0.$$

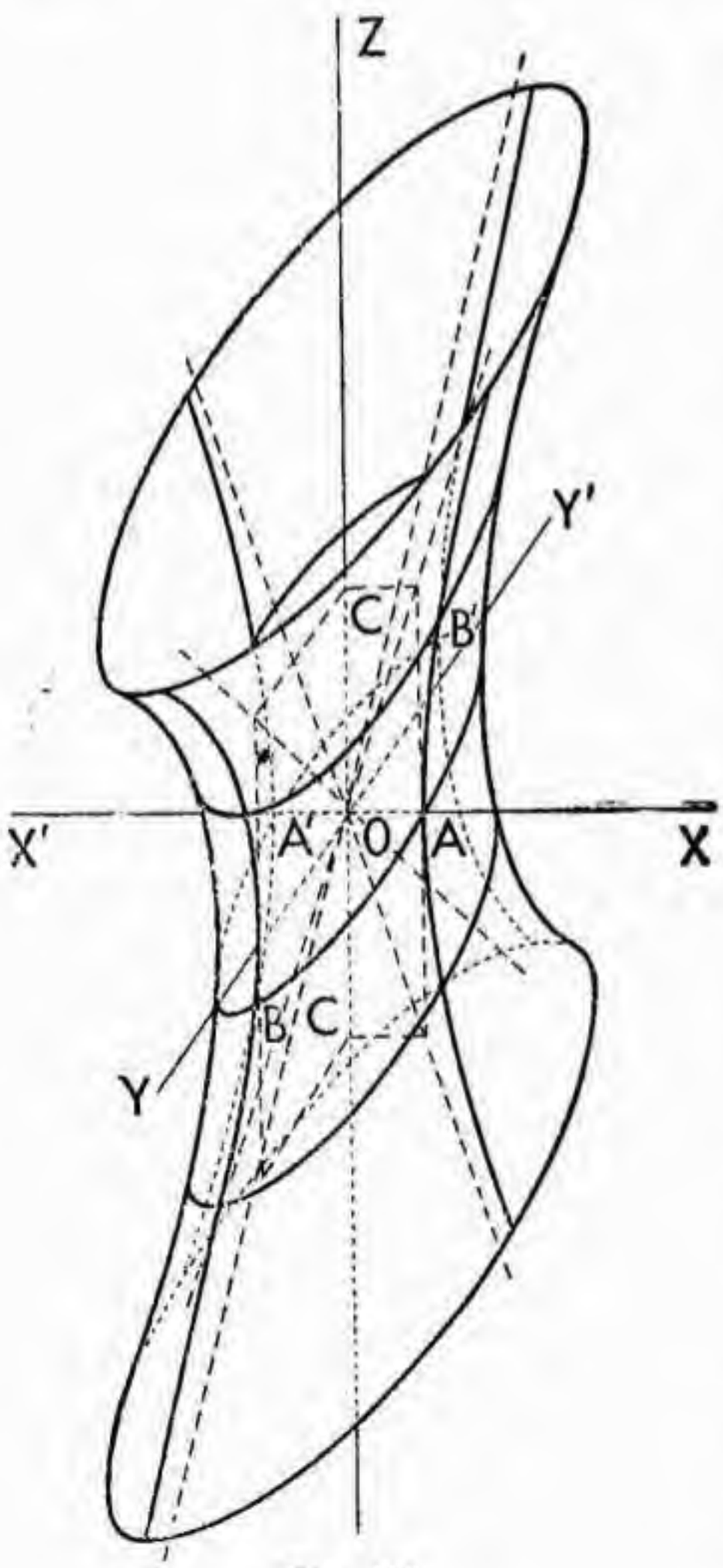

Fig. 150.

El estudio de la forma de los hiperboloides se hace igual que en el caso del elipsoide, cortando la superficie por planos paralelos al XY.

De la simple consideración de la ecuación se deduce que el origen es un centro de simetría que se denomina *centro* del elipsoide y que los eje y planos considerados son ejes de simetría oblicua.

La sección del hiperboloide de una hoja (fig. 150) por el plano $z = k$ es una elipse cuya ecuación es, con respecto a los ejes paralelos a los OX y OY en dicho plano:

$$[3] \qquad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}.$$

Es, por consiguiente, cualquiera que sea k, una elipse de centro en OZ, con dos diámetros conjugados paralelos a OX y OY, que tiene sus extremos en las hipérbolas secciones del hi-

perboloide por los planos XZ é YZ, y cuyas ecuaciones en dichos planos son

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad ; \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Puede por tanto definirse geométricamente el hiperboloide de una hoja de la forma siguiente:

Dadas tres rectas concurrentes y no coplanarias OX, OY y OZ, se dan en los planos XOZ y ZOY dos hipérbolas AA′ y BB′ que tienen OX y OZ, OY y OZ como diámetros conjugados, siendo OZ el diámetro imaginario, el cual tiene en ambas la misma longitud; entonces puede definirse el hiperboloide de una hoja como *la superficie engendrada por una elipse variable cuyo centro está en* OZ,*cuyo plano es paralelo al* XOY *y tal que dos diámetros conjugados tengan sus extremos en las dos hipérbolas dadas* AA′ *y* BB′.

Consideremos ahora el hiperboloide de dos hojas (fig. 151); su ecuación por el plano $z = k$ es una elipse cuya ecuación es, con respecto a los dos ejes paralelos a los OX y OY en dicho plano,

$$[4] \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1.$$

Es por consiguiente una elipse real sólo si se tiene $|k| \geqslant |c|$, lo que muestra las dos hojas distintas de la superficie. El centro de la elipse está en el eje OZ y tiene dos diámetros conjugados paralelos a los ejes OX y OY, cuyos extremos están en las dos hipérbolas de ecuaciones

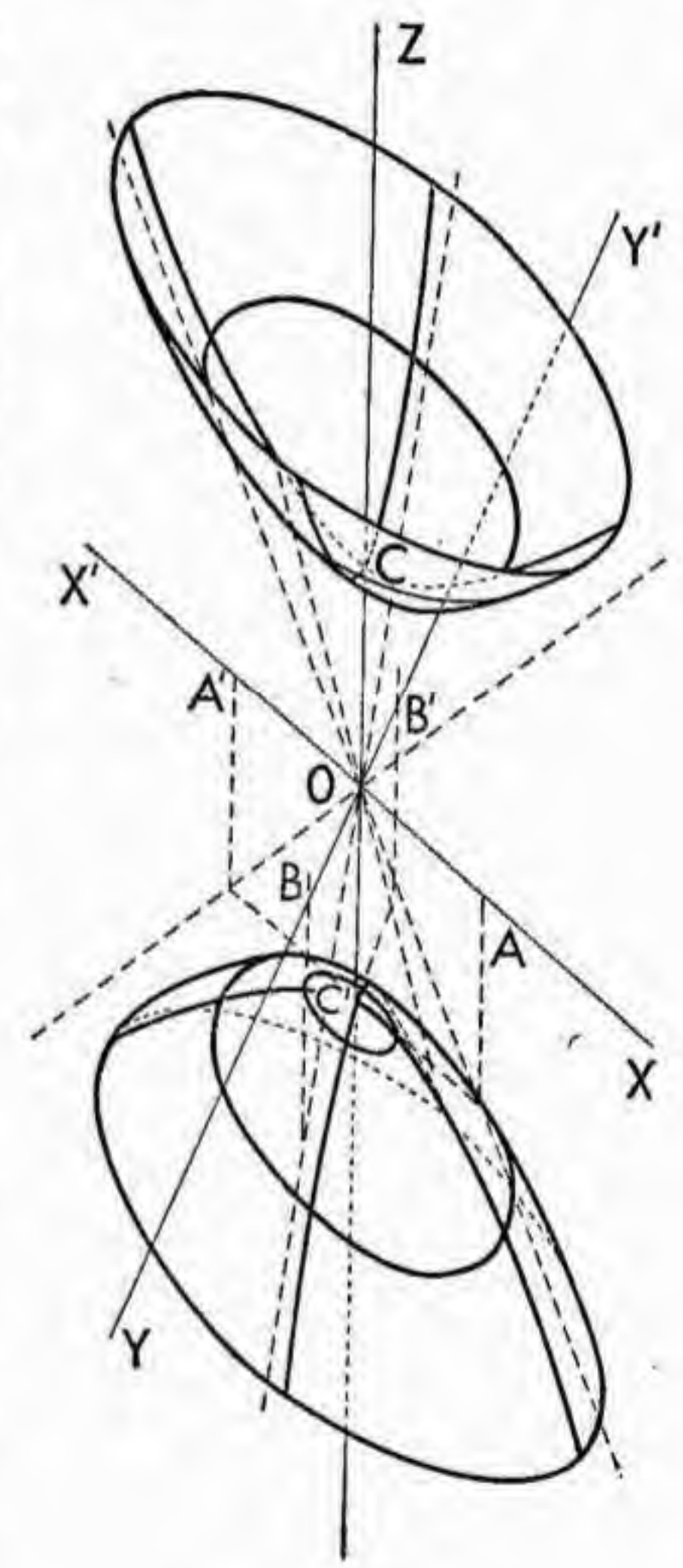

Fig. 151.

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad ; \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ;$$

situadas en los planos XZ é YZ.

La definición geométrica del hiperboloide de dos hojas es la misma que la del de una hoja con la diferencia de que las

dos hipérbolas tienen común el diámetro real, en lugar del imaginario.

Nosotros asociaremos a estos dos hiperboloides el cono de ecuación

$$[5] \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

que es la [14] del § 39.

Haremos simultáneamente el estudio de las propiedades de los dos hiperboloides y del cono, escribiendo sus ecuaciones en la forma común a las tres

$$[6] \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \varepsilon = 0$$

en donde ε puede tomar los tres valores $+1$ (hiperboloide de una hoja), -1 (hiperboloide de dos hojas) y 0 (cono).

En gran parte estas propiedades son análogas a las del elipsoide y se deducen de la misma manera por un cambio de signos. Nos limitaremos, en general, a indicar las particularidades nuevas de cada una de las teorías.

2. **Direcciones asintóticas y cono asintótico.** — El problema de la intersección de la superficie de ecuación [6] con una recta conduce, como en el caso del elipsoide, a la ecuación

$$[7] \qquad x^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2}\right) + 2\alpha x\left(\frac{\beta h}{b^2} - \frac{\gamma k}{c^2}\right) + \\ + \alpha^2\left(\frac{h^2}{b^2} - \frac{k^2}{c^2} - \varepsilon\right) = 0$$

en lugar de la [21] del § 39 (V. Nota). Pero ambas ecuaciones, presentan una diferencia esencial, porque el coeficiente de x^2 puede anularse y se anula en [7] para todas las rectas cuyos coeficientes directores cumplan la condición

$$[8] \qquad \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2} = 0 \quad ,$$

condición que sólo depende de la dirección de la secante. Por tanto, si x, y, z son las coordenadas de un punto de una recta que pase por el origen y cumpla la condición [8], se ha de tener

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad ;$$

es decir, que las rectas cuyos coeficientes directores cumplen la condición [8] son las paralelas a las rectas que forman el cono.

NOTA. Para obtener la ecuación [21] en el parágrafo 39, supusimos $\alpha \neq 0$; ello no tenía allá ninguna importancia, pues si α es cero, alguno de los otros dos coeficientes directores, β ó γ no serían cero y todo el razonamiento podía repetirse intercambiando los ejes que jugaban análogo papel en el caso del elipsoide. Lo mismo sucede aquí si es $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$; pero si ambos son nulos, no se puede intercambiar el papel del eje OZ con el de los otros.

Ahora bien, si es $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, la recta, siendo paralela a OZ, tiene como ecuaciones $x = h$, $y = k$; reemplazando en [6] se tiene la ecuación en z

$$\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \varepsilon = 0$$

cuyo coeficiente de z^2 no puede anularse nunca. Las paralelas al eje OZ cortan a la superficie en dos puntos.

DEF. 2. Una dirección cuyos coeficientes directores cumplan la condición [8] se dice que es una *dirección asintótica*, y el cono que contiene a todas las direcciones paralelas a las direcciones asintóticas que pasan por el origen se denomina *cono asintótico*. Ya vimos que no es otro que el de ecuación [5].

Consideremos ahora una recta cuya dirección sea asintótica. Sus ecuaciones pueden ponerse en la forma

$$[9] \qquad y = \frac{\beta}{\alpha} x + h \quad ; \quad z = \frac{\gamma}{\alpha} x + k \quad .$$

puesto que como dijimos en la nota, siempre puede suponerse $\alpha \neq 0$.

La ecuación [7] toma ahora la forma

$$[10] \qquad 2\alpha \left(\frac{\beta h}{b^2} - \frac{\gamma k}{zz_1} \right) x + \alpha^2 \left(\frac{h^2}{b^2} - \frac{k^2}{c^2} - \varepsilon \right) = 0 .$$

Si el coeficiente de x no se anula, la ecuación tiene una raíz y la recta corta a la superficie en un solo punto.

Si el coeficiente de x se anula y no se anula el término independiente, la ecuación se transforma en una imposibilidad. La recta no tiene ningún punto común con la superficie.

Si se anulan el coeficiente de x y el término independiente, la ecuación se transforma en una identidad. La recta está toda ella situada sobre la superficie.

Podemos entonces enunciar el siguiente teorema:

TEOREMA 1. *Las posiciones de una recta con respecto a la superficie de ecuación* [6] *pueden ser las siguientes*:

a) *La recta corta a la superficie en dos puntos, reales y distintos, reales y confundidos (recta tangente) o imaginarios conjugados.*

b) *La recta tiene un solo punto común con la superficie, no la corta en ningún punto, o está contenida en la superficie.*

El caso b) se presenta si, y sólo si, la recta es paralela a una dirección asintótica, en caso contrario se presenta siempre el caso a).

EJEMPLOS. Consideremos la superficie de ecuación

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} - \varepsilon = 0$$

y la recta de ecuaciones $x = 1$, $y = 1$; reemplazando en la ecuación de la superficie tenemos la ecuación

$$\frac{z^2}{25} = \frac{25}{144} - \varepsilon$$

que nos da las ordenadas z de los puntos de intersección; según que sea $\varepsilon = -1, +1, 0$, tenemos las ecuaciones

$$z^2 = \frac{4225}{144} \quad ; \quad z^2 = -\frac{2975}{144} \quad ; \quad z^2 = \frac{625}{144} \quad :$$

luego la recta corta al hiperboloide de dos hojas en los puntos

$$\left(1, 1, \frac{65}{12}\right), \left(1, 1, -\frac{65}{12}\right) ;$$

al de una hoja en los puntos

$$\left(1, 1, \frac{i\sqrt{119}}{12}\right) \text{ y } \left(1, 1, -\frac{i\sqrt{119}}{12}\right),$$

y al cono en los puntos

$$\left(1, 1, \pm\frac{25}{12}\right).$$

Si tomamos ahora la recta de ecuaciones $y = 4$, $z = 0$, se tiene como ecuación de las abscisas de los puntos de contacto $x^2 = 9(\varepsilon - 1)$; luego la recta es tangente al hiperboloide de una hoja en el punto $(0, 4, 0)$ y corta al hiperboloide de dos hojas y al cono en los puntos $(\pm i3\sqrt{2}, 4, 0)$, $(\pm 3i, 4, 0)$ respectivamente.

Consideremos ahora una recta de dirección asintótica, por ejemplo la de ecuaciones

$$y = x + 1 \quad ; \quad z = \frac{25}{12}x.$$

Las abscisas de los puntos de intersección están dadas por la ecuación

$$\frac{x}{8} + \frac{1}{16} - \varepsilon = 0 \quad ; \quad x = 8\varepsilon - \frac{1}{2}.$$

Por consiguiente, esta recta corta en un solo punto a las tres superficies; en el

$$\left(\frac{15}{2}, \frac{17}{2}, \frac{125}{8}\right)$$

al hiperboloide de una hoja; en el

$$\left(-\frac{17}{2}, -\frac{15}{2}, -\frac{425}{24}\right)$$

al hiperboloide de dos hojas, y en el

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{24}{25}\right)$$

al cono.

Si tomamos ahora la recta de ecuaciones

$$y = x + 5 \quad ; \quad z = \frac{25}{12}x + \frac{15}{4} ,$$

la ecuación de los puntos de intersección toma ahora la forma

$$1 - \varepsilon = 0 \quad ;$$

luego la recta no corta ni al cono ni al hiperboloide de dos hojas y está situada en el hiperboloide de una hoja. En cambio la recta de ecuaciones $y = 0$, $3z = 5x$ no corta a ninguno de los hiperboloides y está situada en el cono.

En el ejemplo anterior vimos que existían rectas situadas en el hiperboloide de una hoja y, naturalmente, en el cono. Más adelante nos ocuparemos de las generatrices rectilíneas de las cuádricas pero puede adelantarse ahora un resultado con demostración simple: *no existen rectas situadas sobre el hiperboloide de dos hojas.*

En efecto: si existiese una, sus ecuaciones serían [9] con la condición de anular los coeficientes de x^2, x y el término independiente en la ecuación [7]. De la anulación del coeficiente de x se deduce

$$\frac{h^2}{b^2} = \frac{\gamma^2 b^2 k^2}{\beta^2 c^4} ,$$

y reemplazando en la ecuación obtenida por la anulación del término independiente

$$0 = \frac{\gamma^2 b^2 k^2}{\beta^2 c^4} - \frac{k^2}{c^2} + 1 = \frac{k^2}{c^2} - \frac{b^2}{\beta^2}\left[\frac{\gamma^2}{c^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right] + 1$$

y teniendo en cuenta que se anula el coeficiente de x^2 se deduce la relación

$$0 = \frac{k^2 b^2 \alpha^2}{c^2 \beta^2 a^2} + 1$$

que no se puede satisfacer para ningún valor real de k.

Si consideramos rectas imaginarias, entonces pueden estar situadas sobre el hiperboloide de dos hojas; así, por ejemplo, la recta de ecuaciones $y = 4i$; $3z - 5x = 0$ está situada sobre el hiperboloide de dos hojas del ejemplo anterior.

Consideremos coordenadas homogéneas; la ecuación de la superficie es ahora

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \varepsilon t^2 = 0.$$

Consideremos una dirección asintótica de ecuaciones

$$y = \frac{\beta}{\alpha}x + ht \quad ; \quad z = \frac{\gamma}{\alpha}x + kt.$$

Reemplazando estos valores en la ecuación de la superficie se tiene

$$2\left(\frac{\beta h}{b^2} - \frac{\gamma k}{c^2}\right)xt + \alpha^2\left(\frac{h^2}{b^2} - \frac{k^2}{c^2}\right)t^2 = 0$$

que admite la solución $t = 0$ que corresponde al punto impropio $(\alpha, \beta, \gamma, 0)$ común a la recta y a la superficie. Si se anulase el coeficiente de xt, entonces dicho punto impropio sería doble.

Por consiguiente, el teorema 1, cuando se consideran puntos impropios, toma la siguiente forma más general:

TEOR. 2. *Dada la superficie de ecuación* [6] *y una recta cualquiera, o la recta está en la superficie, o tiene comunes con la superficie dos puntos, reales, propios o impropios, distintos o confundidos, o imaginarios conjugados.*

Consideremos ahora todas las rectas paralelas a una dirección asintótica que no corten a la superficie o que estén contenidas en ella. Si α, β, γ, son los coeficientes directores de la dirección, y [9] las ecuaciones de una cualquiera de estas rectas, se debe cumplir

$$\frac{\beta h}{b^2} - \frac{\gamma k}{c^2} = 0.$$

Eliminemos h y k entre esta relación y las dos ecuaciones de la recta; se tiene

$$\frac{\beta}{b^2}\left(y - \frac{\beta}{\alpha}\right)x - \left(z - \frac{\gamma}{\alpha}\right)x = 0 \quad ,$$

y como se cumple [8], tenemos

$$[11] \qquad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - \frac{\gamma^2 z}{c^2} = 0 \quad ,$$

lo que nos indica que todas las rectas están contenidas en el plano de ecuación [11].

Podemos ahora enunciar el siguiente teorema:

TEOR. 3. *Dada una dirección asintótica, al conjunto de las rectas paralelas a la misma que no cortan a la superficie de ecuación* [6] *o que están contenidas en ella, es un plano.*

DEF. 3. El plano definido por el teorema anterior se denomina *plano asintótico* y se dice que es *conjugado* de la dirección asintótica dada. Su ecuación para una dirección de coeficientes α, β, γ es [11].

3. **Planos diametrales y diámetros.** — Tomemos una dirección no asintótica. De la misma forma que demostramos el teorema 2 del § 39 se demuestra ahora el siguiente teorema:

TEOR. 4. *El lugar geométrico de los puntos medios interceptados por la superficie de ecuación* [6] *sobre las rectas no paralelas a una dirección asintótica es un plano.*

DEF. 4. Este plano se denomina *plano diametral* y se dice que es el *plano conjugado* de la dirección dada; recíprocamen-

te, la dirección se dice que es conjugada del plano. La ecuación del plano diametral conjugado de una dirección de coeficientes α, β y γ se deduce como la ecuación [22] del § 39, y es la siguiente:

$$[12] \qquad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - \frac{\gamma z}{c^2} = 0.$$

Cuando tomamos una dirección asintótica, el teorema y la definición anteriores carecen de sentido, ya que las rectas paralelas a esta dirección no determinan ningún segmento, pero la ecuación [12] es en este caso la [11] del plano asintótico. Por ello se dice que el plano asintótico es un *plano diametral singular*, conjugado de la dirección asintótica, la cual, recíprocamente, se dice que es la dirección conjugada del plano; *ambos son paralelos*. En cambio, como en el caso del elipsoide, se ve que un plano diametral no singular no es nunca paralelo a su dirección conjugada.

También, como en el caso del elipsoide, se demuestra que *todo plano que pase por el centro es un plano diametral*, y que: *un plano diametral no singular no es paralelo a su dirección conjugada.*

La sección de la superficie por un plano diametral no singular es el lugar geométrico de las tangentes a la superficie paralelas a la dirección conjugada.

De las propiedades de simetría oblicua de los ejes y planos coordenados se deduce que los planos diametrales conjugados de las direcciones paralelas a los ejes OX, OY y OZ son los planos YZ, XZ y XY.

Como en el caso del elipsoide, se demuestra el teorema siguiente, análogo al teorema 4 del § 39.

TEOR. 5. *Los planos diametrales de las direcciones paralelas a un plano fijo que pasa por el centro pasan todos por una misma recta.*

DEF. 5. Esta recta se denomina un *diámetro* y se dice que es el diámetro conjugado del plano dado y recíprocamente.

En resumen: *Entre las rectas que pasan por el centro (diámetros) y los planos que pasan por el centro (planos diametrales) existe una correspondencia biunívoca tal que todo plano es el diametral conjugado de la recta correspondiente y ésta es el diámetro conjugado del plano.*

En el caso del elipsoide todo diámetro lo cortaba en dos puntos simétricos con respecto al centro. Esta propiedad ya no subsiste ahora.

Tomemos un diámetro cualquiera de ecuaciones paramétricas

$$x = \alpha\lambda \quad ; \quad y = \beta\lambda \quad ; \quad z = \gamma\lambda \quad ;$$

sus intersecciones con la superficie de ecuación [6] vienen dadas por la ecuación en λ:

$$[13] \qquad \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2}\right)\lambda^2 - \varepsilon = 0.$$

El cono asintótico divide al espacio en dos regiones caracterizadas por las desigualdades

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} > 0 \quad ; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} < 0 \quad ;$$

y se ve inmediatamente que toda recta que pase por el centro está situada totalmente en una de las dos regiones, o en el cono. Denominemos *región exterior* a la que caracteriza la primera desigualdad, es decir, a la que contiene a los ejes OX y OY, y a la otra, que contiene el eje OZ, *región interior.*

Los diámetros situados en la región exterior cortan al hiperboloide de una hoja en dos puntos reales simétricos con respecto al centro, y al hiperboloide de dos hojas en dos puntos imaginarios; inversamente, los situados en la región interior cortan al hiperboloide de una hoja en dos puntos imaginarios, y al de dos hojas en dos puntos reales. Esto se deduce inmediatamente de la ecuación [13].

DEF. 6. Se dice que un *diámetro de un hiperboloide es real o imaginario* según que corte o no al hiperboloide. Con respecto al cono observemos que todos los diámetros pasan por su vértice.

De las consideraciones que acabamos de hacer se deduce el siguiente teorema:

TEOR. 6. *Todo diámetro situado en la región exterior del cono asintótico es real en el hiperboloide de una hoja e imaginario en el hiperboloide de dos hojas. Todo diámetro situado en la región interior es real en el hiperboloide de dos hojas e imaginario en el de una hoja.*

Ya hemos visto que los diámetros situados sobre el cono son los singulares.

4. **Ternas de diámetros conjugados.** — Consideremos ahora un diámetro no singular; el mismo razonamiento que empleamos en § 39-5 en el caso del elipsoide, nos demuestra que existen siempre infinitos pares de diámetros que con el dado forman una terna de diámetros conjugados, es decir que cada uno de ellos es conjugado del plano que determinan los otros dos.

Ningún diámetro de una terna de diámetros conjugados puede ser singular. En efecto: si δ es un diámetro singular, está situado en su plano conjugado Π, y entonces todo diáme-

tro situado en Π tiene un plano diametral que pasa por δ, luego la intersección de ambos planos diametrales se confunde con δ. Por tanto, en las elecciones arbitrarias que se hacen para determinar una terna de diámetros conjugados, hay que poner siempre la restricción de no elegir un diámetro singular.

Consideremos ahora un hiperboloide de una hoja y consideremos un nuevo sistema de ejes de coordenadas formado por tres diámetros conjugados OX′, OY′ y OZ′.

El mismo razonamiento empleado en el caso del elipsoide nos prueba que la ecuación es de la forma

$$mx'^2 + ny'^2 + pz'^2 + q = 0. \tag{14}$$

Como el origen no pertenece al hiperboloide se tiene siempre $q \neq 0$; dividiendo por él siempre podemos suponer $q = 1$.

Los coeficientes m, n y p no pueden ser nulos; en efecto: supongamos que uno de ellos, p lo fuese, la ecuación tomaría la forma $mx'^2 + ny'^2 + 1 = 0$. Una recta paralela al eje OZ′, pasando por un punto de la superficie estaría contenida en ella; el eje OZ′, siendo paralelo a una recta contenida en el hiperboloide, sería un diámetro singular contra la hipótesis.

Los tres coeficientes m, n, p (siempre en la hipótesis $q = 1$), no pueden ser los tres positivos, pues entonces el hiperboloide carecería de puntos reales; tampoco pueden ser los tres negativos, pues entonces la ecuación [14] sería la de un elipsoide y es inmediato que un hiperboloide de una hoja y un elipsoide son superficies distintas (por ejemplo las distancias mutuas de dos puntos del elipsoide están acotadas y ello no ocurre en el hiperboloide).

Si dos coeficientes fuesen positivos y uno negativo, entonces permutando convenientemente los ejes y llamando a', b' y c' a las raíces cuadradas de los valores absolutos de $1/m$, $1/n$ y $1/p$, la ecuación [14] tomaría la forma

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} - \frac{z'^2}{c'^2} + 1 = 0 \quad ,$$

que es la ecuación de un hiperboloide de dos hojas y es también inmediato que un hiperboloide de una hoja y uno de dos no son la misma superficie (la primera superficie contiene rectas y la segunda no).

Luego la única combinación posible es la de dos coeficientes negativos y uno positivo. Permutando los ejes convenientemente y multiplicando la ecuación [14] por —1, se obtiene finalmente como *ecuación de un hiperboloide de una hoja referida a una terna de diámetros conjugados*

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} - \frac{z'^2}{c'^2} - 1 = 0. \tag{15}$$

Una consecuencia inmediata de esta ecuación es el siguiente teorema:

TEOR. 7. *En el hiperboloide de una hoja toda terna de diámetros conjugados está compuesta de un diámetro imaginario y dos diámetros reales.*

Un razonamiento casi idéntico al que acabamos de hacer nos probaría que *la ecuación de un hiperboloide de dos hojas referida a una terna de diámetros conjugados es de la forma*

$$[16] \qquad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} - \frac{z'^2}{c'^2} + 1 = 0 \quad ,$$

y consecuencia inmediata de la ecuación es el teorema siguiente:

TEOR. 8. *En el hiperboloide de dos hojas toda terna de diámetros conjugados está compuesta de un diámetro real y dos imaginarios.*

Si queremos obtener ahora la ecuación del cono referida a una terna de diámetros conjugados, tendríamos igualmente que su ecuación tiene que ser del tipo [14], como el cono pasa por el origen tiene que ser $q = 0$; los tres coeficientes m, n, p no pueden ser los tres del mismo signo, pues entonces el cono se reduciría a un solo punto real, luego dos han de ser del mismo signo y el otro de signo contrario. Permutando convenientemente los ejes y multiplicando, si fuese necesario, la ecuación por —1, ésta tomaría la forma

$$[17] \qquad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} - \frac{z'^2}{c'^2} = 0 \quad ,$$

que es *la ecuación de un cono cuadrático referido a una terna de diámetros conjugados.*

Consideremos ahora un sistema de ejes coordenados formado por dos diámetros singulares y el diámetro conjugado al plano de ambos (es inmediato que este plano no es singular). Tomemos como ejes OX y OY los dos diámetros singulares, la ecuación de un hiperboloide o del cono es de segundo grado; por la simetría con respecto al centro no puede contener términos de primer grado; siendo OZ un plano diametral la ecuación no puede contener términos en z; como toda paralela al eje OX corta a la superficie a lo más en un punto, la ecuación ha de ser de primer grado con respecto a x y lo mismo con respecto a y, luego tiene que ser de la forma

$$[18] \qquad mz'^2 + nx'y' + p = 0.$$

Supongamos ahora que la superficie sea un hiperboloide de una hoja. Debe ser $p \neq 0$. Su sección por el plano $z' = 0$ es la hipérbola, no degenerada por ser $p \neq 0$, de ecuación

$$nx'y' + p = 0 \ .$$

La terna formada por el eje OZ′ y dos diámetros de esta hipérbola es una terna de diámetros conjugados, como de los dos diámetros del plano X′Y′ uno es imaginario, se deduce (teorema 8) que el diámetro OZ′ es real; llamemos c' a la raíz cuadrada del valor absoluto de $-p/m$; invirtiendo, si fuese necesario, el sentido de OX, se puede suponer que p/n es positivo, y llamando k a su raíz cuadrada se tiene finalmente como *ecuación del hiperboloide de una hoja referida a dos diámetros singulares y al diámetro conjugado de su plano*

$$[19] \qquad \frac{z'^2}{c'^2} - \frac{x'y'}{k^2} - 1 = 0.$$

De una manera análoga *obtendríamos la ecuación del hiperboloide de dos hojas referida a dos diámetros singulares y al diámetro conjugado de su plano,*

$$[20] \qquad \frac{z'^2}{c'^2} - \frac{x'y'}{k^2} + 1 = 0$$

y *la ecuación del cono referida al mismo sistema*

$$[20'] \qquad \frac{z'^2}{c'^2} - \frac{x'y'}{k^2} = 0.$$

Consideremos ahora la superficie de ecuación [6] y un plano que pase por el centro y cuyo diámetro conjugado esté en la región interior del cono asintótico. Entonces tomando una terna de diámetros conjugados como ejes, de forma que el eje OZ′ sea el diámetro conjugado del plano dado, las ecuaciones [15], [16] y [17] se escriben bajo la forma común

$$[21] \qquad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} - \frac{z'^2}{c'^2} - \varepsilon = 0.$$

Las secciones por planos de ecuaciones $z' = h$, paralelos al X′Y′, que es el dado, son ahora elipses de ecuaciones

$$[22] \qquad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = \varepsilon + \frac{h^2}{c'^2}.$$

Es decir, son elipses, reales o imaginarias, con centro en OZ′, y que se reducen a un punto en las intersecciones (si existen) de la superficie con el eje OZ′.

Si el diámetro conjugado estuviese en la región exterior del cono asintótico subsiste la ecuación [21] cuando la referimos a una terna de diámetros conjugados, en la cual el diámetro conjugado del plano dado sea el eje OY′. El plano dado es ahora el X′Z′ y las secciones de la superficie por planos de ecuaciones $y' = h$ paralelos al X′Z′ son ahora hipérbolas de ecuaciones

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{z'^2}{c'^2} = \varepsilon - \frac{h^2}{b'^2}. \tag{23}$$

Es decir, se trata de hipérbolas con el centro en el eje OY y que se reducen a dos rectas en los puntos de intersección, si existen, de la superficie con el eje OZ'.

Consideremos ahora el caso en que el diámetro conjugado del plano dado sea singular, es decir que el plano sea asintótico.

Refiramos la superficie a una terna de ejes tal que el eje OX' sea el diámetro singular y el plano dado sea el X'Z'.

Las ecuaciones [18], [19] y [20] pueden ponerse en la forma común

$$\frac{z'^2}{c'^2} - \frac{x'y'}{k^2} - \varepsilon = 0. \tag{24}$$

Las secciones por planos paralelos al X'Z' (que es el dado) tienen como ecuaciones

$$z'^2 = c^2 \left(\frac{hx'}{k^2} + \varepsilon\right), \tag{25}$$

es decir, son parábolas en que la dirección de los diámetros es la del eje OX' que se reducen a dos rectas paralelas cuando el plano es el X'Z', es decir el plano asintótico dado.

Podemos ahora enunciar el teorema siguiente:

TEOR. 9. *Las secciones de la superficie de ecuación* [6] *por un plano* Π *cualquiera son cónicas del género elipse, si el diámetro conjugado* δ *del plano paralelo al dado por el origen está en la región interior del cono asintótico; los centros de dichas elipses están en* δ. *Si* δ *está en la región exterior son cónicas del género hipérbola cuyos centros están en* δ. *Finalmente, si* Π *es un diámetro singular, es decir, si el plano es paralelo a un plano asintótico, las secciones son parábolas cuyos diámetros son paralelos a* δ.

5. **Planos tangentes.** — El teorema 5 del § 39 se generaliza inmediatamente al caso de los hiperboloides, es decir, se tiene:

TEOR. 10. *Las rectas tangentes a un hiperboloide en un punto* M *del mismo están todas situadas en el plano paralelo al plano diametral conjugado del diámetro que pasa por* M.

DEF. 7. Dicho plano se denomina *plano tangente en* M *al hiperboloide.* Si las coordenadas de M son x_0, y_0, z_0, la ecuación del plano tangente se deduce como la [25] del § 39, y es por lo tanto

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1. \tag{26}$$

Consideremos ahora un hiperboloide de una hoja y sea M un punto del mismo. Tomemos un sistema de coordenadas formado por una terna de diámetros conjugados tal que el eje OX sea el diámetro que pasa por M. La ecuación del hiperboloide es entonces [15]. Las coordenadas de M son ahora $(a', 0, 0)$ y la ecuación [26] del plano tangente toma la forma $x' = a'$. La sección del hiperboloide por este plano tiene como ecuación

$$\frac{y'^2}{b'^2} - \frac{z'^2}{c'^2} = 0 \quad ,$$

que representa dos rectas que pasan por M. Podemos entonces enunciar el siguiente teorema:

TEOR. 11. *La sección del hiperboloide de una hoja por el plano tangente en un punto, está formada por dos rectas que pasan por el punto.*

Si consideramos un hiperboloide de dos hojas y un punto M en él, podemos tomar un nuevo sistema de ejes coordenados formado por una terna de diámetros conjugados de modo que el eje OZ′ sea el diámetro que pasa por M. La ecuación del hiperboloide es [16]. El punto M tiene como coordenadas $(0, 0, c')$; ecuación del plano tangente en M es $z' = c'$. La sección del hiperboloide por ese plano tiene como ecuación

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 0$$

que sólo tiene un punto real. Por lo tanto:

TEOR. 12. *La sección del hiperboloide de dos hojas por el plano tangente a él en un punto se reduce a dicho punto.*

Observando la ecuación anterior se ve que también representa un par de rectas imaginarias concurrentes en el punto, luego el hiperboloide de dos hojas es cortado por un plano tangente según dos rectas imaginarias que pasan por el punto. *El teorema 12 es, pues, válido sólo cuando no se consideran elementos imaginarios.*

Nos quedaría por estudiar ahora las secciones de un hiperboloide por un plano asintótico. Tomándolo como plano X′Z′ la ecuación del hiperboloide es [24]. Su sección por el plano X′Z′ tiene como ecuación $z'^2 = \varepsilon c'^2$, luego:

TEOR. 13. *La sección de la superficie de ecuación* [6] *por un plano asintótico está formada por dos rectas paralelas, reales y distintas en el caso del hiperboloide de una hoja, imaginarias en el caso del de dos y reales y confundidas en el caso del cono.*

El estudio de *los planos tangentes a un hiperboloide paralelos a un plano dado* se hace igual que en el caso del elipsoide

y la ecuación de dichos planos ([26] del § 39) toma ahora las formas

$$[27] \qquad mx + ny + pz \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2n^2 - c^2p^2} = 0$$

para el hiperboloide de una hoja, y la forma

$$[28] \qquad mx + ny + pz \pm \sqrt{c^2p^2 - a^2m^2 - b^2n^2} = 0$$

para el hiperboloide de dos hojas. Luego los planos tangentes paralelos al de ecuación $mx + ny + pz + q = 0$ existen en el caso del hiperboloide de una hoja si se cumple $a^2m^2 + b^2n^2 > c^2p^2$, y en el caso del hiperboloide de dos hojas si se cumple $a^2m^2 + b^2n^2 < c^2p^2$. Se excluye el caso en que $a^2m^2 + b^2n^2 = c^2p^2$, pues entonces el plano pasaría por el origen y la ecuación [26] nos indica que no existen planos tangentes que pasen por el origen.

También como en el caso del elipsoide se ve que las *tangentes a un hiperboloide, paralelas a una dirección dada no asintótica, forman un cilindro circunscrito al hiperboloide.*

Finalmente, de la misma forma que en el caso del elipsoide, se ve que las *rectas tangentes al hiperboloide que pasan por un punto* $M(x_1, y_1, z_1)$ *del espacio forman un cono circunscrito al hiperboloide, de vértice* M, que pasa por la sección del hiperboloide por *el plano polar* de M, cuya ecuación es

$$[29] \qquad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{c^2}{c^2} = 1$$

y cuyas propiedades son las mismas que enunciamos en el caso del elipsoide.

6. Propiedades métricas de los hiperboloides. — TEOR. 14. *En todo hiperboloide, y también en todo cono cuadrático, existen por lo menos una terna de diámetros conjugados perpendiculares dos a dos.*

La demostración es idéntica a la del teorema 6 del § 39.

Referida la superficie de ecuación [6] a tres diámetros conjugados ortogonales dos a dos, toma la forma

$$[30] \qquad \frac{x^2}{a^2} \frac{y^2}{b^2} + - \frac{z^2}{c^2} - \varepsilon = 0$$

en la que supondremos, salvo indicación en contrario que se tiene $a \geqslant b$.

Las definiciones de *planos principales, ejes principales* o *ejes, vértices* y *secciones principales,* son las mismas que en el caso del elipsoide.

El hiperboloide de una hoja corta a los ejes OX y OY en los pares de puntos A, A′ y B, B′ (fig. 150) que se denominan *vértices.* No existen vértices en el eje OZ. Por esta razón los

ejes OX y OY que son diámetros reales se denominan *ejes reales*, y el eje OZ eje imaginario. Los puntos del eje OZ, C y C′ situados a distancias de O iguales a c se denominan *extremos del eje imaginario*; los números $2a$ y $2b$ se denominan *longitudes de los ejes reales*, y $2c$ *longitudes de los ejes imaginarios*.

Las secciones principales son elipses en el plano XY e hipérbolas en los otros dos que tienen todos comunes (con el hiperboloide) los ejes, y los vértices o los extremos del eje imaginario. La elipse sección del hiperboloide por el plano XY, es la que tiene ejes más pequeños de todas las elipses producidas por planos paralelos al XY en el hiperboloide. Por ello se la denomina *elipse de garganta*.

En el hiperboloide de dos hojas sólo hay un *eje real*, el OZ, siendo *los otros dos imaginarios*; los *vértices, extremos de los ejes imaginarios* y las *longitudes de los ejes* se definen como en el hiperboloide de una hoja. Finalmente, las secciones principales situadas en los planos XZ é YZ son hipérbolas que tienen comunes los ejes y vértices o extremos de ejes imaginarios con el hiperboloide, mientras que no existe sección principal real en el plano XY.

Si se tiene $a = b$, la ecuación [30] toma la forma

$$[31] \qquad \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - \varepsilon = 0 \quad ;$$

luego, las secciones por planos paralelos al XY, cuando son reales, son circunferencias. Las superficies son, por lo tanto, *superficies de revolución*.

El hiperboloide de revolución de una hoja está engendrado por la rotación de una hipérbola alrededor de su eje imaginario; el de dos hojas por la rotación de una hipérbola alrededor de su eje real y el cono por la rotación de una recta.

Apliquemos el teorema 9 al caso del cono de revolución; tenemos que al cortar un cono de revolución por un plano puede obtenerse, según se tome el plano, una elipse, una hipérbola o una parábola. *Esta propiedad de las cónicas de poderse obtener como secciones por planos de un cono de revolución fué la primera definición que se dió de estas curvas y el origen de su nombre.*

Por esta razón, en el § 39-1 no distinguimos en los conos, como lo hicimos en los cilindros, los casos del cono elíptico, hiperbólico o parabólico, pues todo cono es a la vez de los tres tipos.

Para finalizar, observaremos que se puede extender al caso de los hiperboloides, con demostración casi idéntica, el teorema 7 del § 39; tenemos por tanto

TEOR. 15. *En un hiperboloide de una o dos hojas que no sea de revolución, los únicos diámetros perpendiculares a sus planos diametrales conjugados son los ejes.* Si la superficie es de revolución, los diámetros perpendiculares a sus planos diametrales conjugados son el eje OZ y los situados en el plano XY.

§ 41. PARABOLOIDES

1. Paraboloide elíptico: definición y forma. — DEFINICIÓN 1. Se denomina *paraboloide elíptico* a la superficie que con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas, oblicuas o rectangulares, tiene una ecuación reducible a la forma

$$[1] \qquad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0 \quad ,$$

en donde p y q son números positivos.

De la simple consideración de la ecuación se deduce que el eje OX y los planos XZ y XY son ejes y planos de simetría oblicua.

Para estudiar la forma del paraboloide elíptico observemos primero que la superficie sólo está definida para los valores positivos de x; las secciones por los planos XY y XZ son dos parábolas P y P′, de ecuaciones

$$y^2 = 2px \quad ; \quad z^2 = 2qx .$$

Si cortamos ahora el paraboloide por planos paralelos al plano YZ de ecuación $x = h$, la sección plana tiene como ecuación

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2h \quad ,$$

es decir, si $h > 0$ son elipses cuyo centro está en el eje OX referidas a dos diámetros conjugados, paralelos a OY y OZ, y estando los extremos de los diámetros situados en las parábolas P

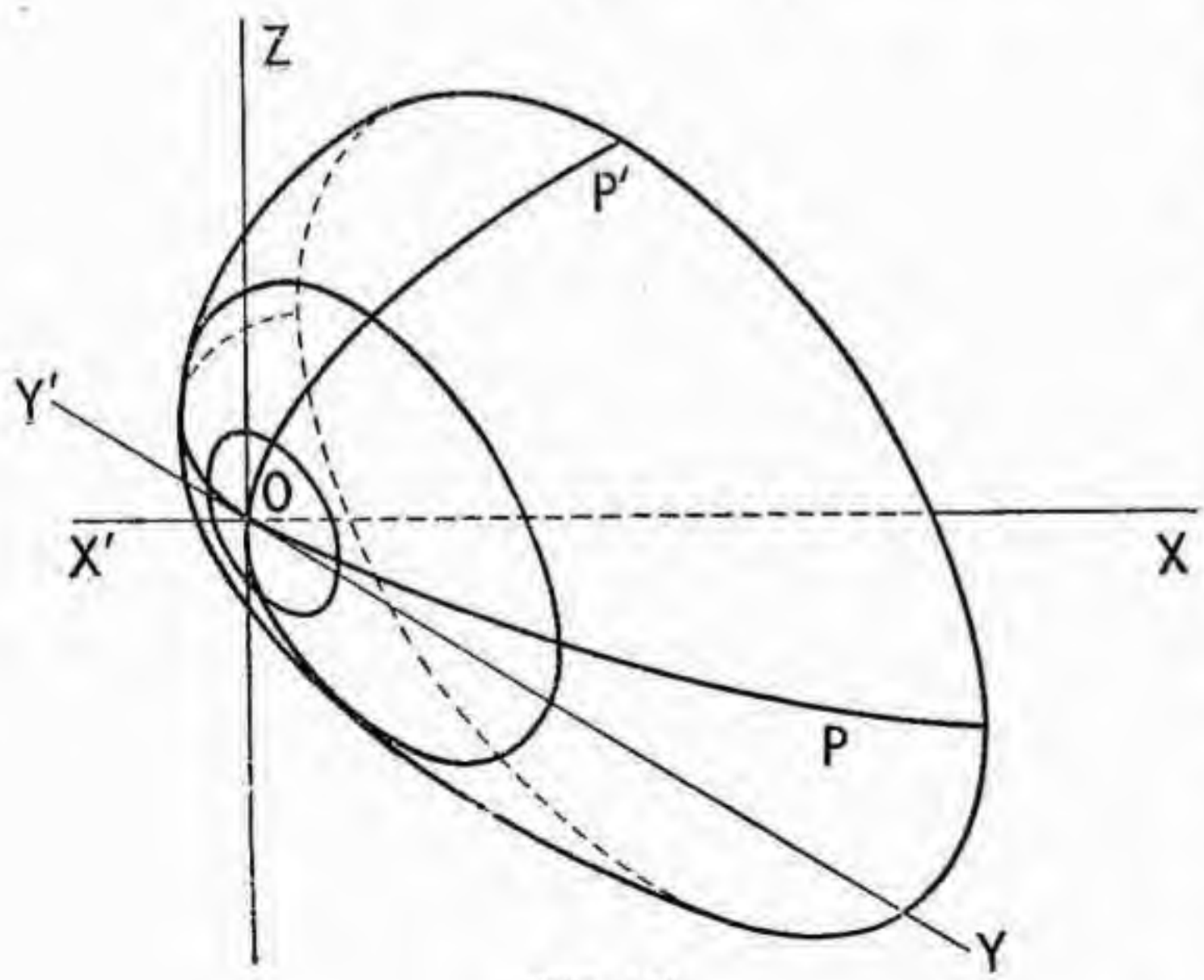

Fig. 152.

y P′ (fig. 152). Podemos por lo tanto definir el paraboloide elíptico de una forma geométrica de la manera siguiente:

Dadas tres rectas concurrentes y no coplanarias OX, OY y OZ, y en los planos XZ y XY dos parábolas P y P′ que tienen como diámetro común OX y como tangentes en O los ejes OZ y OY, respectivamente, y además dirigidas en el mismo sentido, se define el paraboloide elíptico como la superficie engendrada por una elipse variable cuyo plano es paralelo al YZ, cuyo centro está en OX y tal que dos diámetros conjugados tengan sus extremos en las parábolas P y P′.

2. **Intersección con una recta. Planos diametrales y diámetros.** — Supongamos una recta cualquiera de ecuaciones paramétricas

$$[2] \qquad x = x_0 + \alpha\lambda \quad ; \quad y = y_0 + \beta\lambda \quad ; \quad z = z_0 + \gamma\lambda \quad ;$$

los puntos de intersección con el paraboloide vienen determinados por la ecuación en λ

$$[3] \qquad \left(\frac{\beta^2}{p} + \frac{\gamma^2}{q}\right)\lambda^2 + 2\lambda\left(\frac{\beta y_0}{p} + \frac{\gamma z_0}{q} - \alpha\right) + \\ + \frac{y^2_0}{p} + \frac{z^2_0}{q} - 2x_0 = 0 \quad ,$$

donde cada raíz de λ determina un punto de intersección de la recta de ecuaciones [2] con el paraboloide. Esta ecuación en λ es siempre de segundo grado, salvo en el caso $\beta = 0$, $\gamma = 0$, es decir, cuando la recta es paralela al eje OX; luego, con excepción de este caso, toda recta corta al paraboloide en dos puntos; si la recta es paralela a OX la ecuación es de primer grado y la recta corta al paraboloide en un solo punto. Tenemos en resumen el siguiente resultado:

TEOREMA 1. *Toda recta no paralela al eje* OX *corta a un paraboloide elíptico en dos puntos reales o distintos, reales y confundidos (recta tangente) o imaginarios conjugados. Si la recta es paralela al eje* OX *lo corta en un solo punto.*

En coordenadas homogéneas la ecuación del paraboloide es

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2xt = 0$$

y las de una recta paralela al eje OX son

$$y = mt \quad ; \quad z = nt$$

y se ve inmediatamente que el paraboloide y la recta tienen común el punto impropio (1, 0, 0, 0); luego el teorema 1 puede, cuando se consideran elementos impropios, ponerse en la forma más general.

TEOR. 2. *Un paraboloide elíptico y una recta tienen siempre comunes aos puntos propios o impropios, reales o imaginarios, distintos o confundidos.*

Vamos ahora a determinar las coordenadas del punto medio del segmento (de extremos reales y distintos, reales y confundidos o imaginarios conjugados). Para que el punto (x_0, y_0, z_0) de las ecuaciones [2] sea el punto medio del segmento es necesario y suficiente que las raíces de la ecuación [3] sean iguales y de signo contrario, es decir, es necesario que se anule el coeficiente de λ,

$$\frac{\beta y_0}{p} + \frac{\gamma z_0}{q} - \alpha = 0 \quad ;$$

esta condición nos dice que los puntos medios de los segmentos determinados por el paraboloide en todas las rectas paralelas a una dirección de coeficientes angulares α, β, γ están en el plano de ecuación

$$[4] \qquad \frac{\beta y}{p} + \frac{\gamma z}{q} - \alpha = 0.$$

Para que la ecuación de este plano tenga sentido es necesario que no sean nulos simultáneamente β y γ, es decir, que la recta no sea paralela a OX, pero si lo fuese, también carecería de sentido el hablar del punto medio del segmento determinado.

Podemos entonces enunciar el teorema siguiente:

TEOR. 3. *El lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos interceptados por un paraboloide elíptico sobre las rectas paralelas a una dirección dada, que no sea paralela al eje* OZ, *es un plano.*

DEF. 2. Este plano se denomina *plano diametral* y se dice que es *conjugado de la dirección dada* y, recíprocamente, la dirección se dice conjugada del plano.

De la misma forma que en el caso del elipsoide (§ 39-3) se prueba que:

a) *Todo plano diametral es paralelo al eje* OX *y, recíprocamente, todo plano paralelo al eje* OX *es un plano diametral.*

b) *La sección de un paraboloide elíptico por un plano diametral es el lugar geométrico de los puntos de contacto de las tangentes al elipsoide paralelas a una dirección dada.*

c) *Un plano diametral no es nunca paralelo a su dirección conjugada.*

Para estudiar los diámetros en el paraboloide, vamos a demostrar previamente dos teoremas:

TEOR. 4. *Los planos diametrales conjugados de las direcciones paralelas a un plano fijo no paralelo al eje* OX *pasan todos por una misma recta, paralela al eje* OY.

TEOR. 5. *Los planos diametrales conjugados de las direc-*

ciones paralelas a un plano diametral fijo son paralelos entre sí.

Demostremos el teorema 4: un plano no paralelo al eje OX tiene como ecuación una de la forma

$$[5] \qquad x = my + nz + h$$

y los coeficientes directores α, β, γ de cualquier recta paralela a este plano tienen que satisfacer a la relación

$$\alpha = m\beta + n\gamma \quad ;$$

luego, la ecuación del plano diametral conjugado de dicha recta es

$$[6] \qquad \frac{\beta y}{p} + \frac{\gamma z}{q} - m\beta - n\gamma = 0 \quad ,$$

o bien

$$q\beta(y - mp) + p\gamma(2 - nq) = 0$$

y cualesquiera que sean β y γ, y por consiguiente cualquiera que sea la paralela al plano, los planos de ecuación [5] pasan por la recta cuyas ecuaciones son

$$[7] \qquad y = mp \quad ; \quad z = nq \quad ;$$

luego, el teorema está demostrado.

Pasemos ahora a la demostración del teorema 5.

Sean α, β, γ los coeficientes directores de la dirección conjugada del plano fijo; la ecuación de este plano es entonces [4] y los coeficientes directores α', β', γ' de cualquier dirección paralela al plano fijo tienen que satisfacer las ecuaciones

$$[8] \qquad \frac{\beta\beta'}{p} + \frac{\gamma\gamma'}{q} = 0.$$

Pero el plano diametral conjugado de la dirección de coeficientes directores α', β', γ' tiene como ecuación

$$\frac{\beta' y}{p} + \frac{\gamma' z}{q} - \alpha' = 0$$

y las condiciones [8] indican que este plano es paralelo a la dirección conjugada del plano fijo; además es paralelo a OX; luego, siendo paralelo a dos rectas, no paralelas entre sí (por la propiedad *c* de los planos diametrales), es paralelo a un plano fijo, como queríamos probar.

Podemos definir los diámetros del paraboloide en la misma forma que los del elipsoide, apoyándonos en el teorema 4.

DEF. 3. Se denomina *diámetro* de un paraboloide elíptico a una recta por la cual pasan todos los planos diametrales conjugados de las direcciones paralelas a un plano fijo. Se dice que el diámetro es *conjugado* de la dirección del plano y, recíprocamente, que ésta es conjugada del diámetro.

Si [5], con h cualquiera, es la ecuación de los planos paralelos a la dirección, [7] es la ecuación del diámetro y recíprocamente. De aquí se deduce inmediatamente que *los diámetros son rectas paralelas al eje* OX, por consiguiente, cortan al paraboloide en un solo punto que se denomina *extremo* del diámetro. Recíprocamente, *toda recta paralela al eje es un diámetro.*

El teorema 5 nos sirve para definir los *planos diametrales conjugados.*

DEF. 4. Se dice que dos planos diametrales son conjugados cuando cada uno de ellos es paralelo a la dirección conjugada del otro.

Es claro que dado un plano diametral existen infinitos planos diametrales (los paralelos a su dirección conjugada), que son conjugados con el dado.

Vamos a ver cómo se expresa la condición para que dos planos diametrales sean conjugados: sean

$$my + nz + h = 0 \quad ; \quad m'y + n'z + h' = 0$$

las ecuaciones de los dos planos y sean α, β, γ los coeficientes directores de la dirección anguiar conjugada del primer plano, y α', β', γ' los análogos para el segundo. Se tiene

$$\alpha = -h \quad ; \quad \beta = mp \quad ; \quad \gamma = nq \quad ;$$
$$\alpha' = -h' \quad ; \quad \beta' = m'p \quad ; \quad \gamma' = n'q$$

y la condición para que cada plano sea paralelo a la dirección conjugada del otro es

$$[9] \qquad mm'p + nn'q = 0.$$

3. **Plano tangente.** — De una manera análoga al teorema 5 del § 39, se demuestra el siguiente teorema:

TEOR. 6. *Las rectas tangentes a un paraboloide elíptico en un punto* M *del mismo están situadas en un plano paralelo a la dirección conjugada del diámetro que pasa por* M.

DEF. 5. Dicho plano se dice que es el *plano tangente* al paraboloide en el punto M.

Vamos a determinar la ecuación del plano tangente. Sean (x_0, y_0, z_0) las coordenadas del punto M. El diámetro que pasa por M tiene como ecuaciones

$$y = y_0 \quad ; \quad z = z_0.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta [5] y [7], la ecuación de los planos de dirección conjugada del diámetro es

$$x = \frac{yy_0}{p} + \frac{zz_0}{q} + h.$$

Para determinar h expresamos que el plano pasa por M y teniendo también en cuenta que el punto está en el paraboloide se tiene

$$h = x_0 - \frac{y^2_0}{p} - \frac{z^2_0}{q} = x_0 - 2x_0 = - x_0 \quad ;$$

luego, finalmente, la ecuación del plano tangente es

$$[10] \qquad \frac{yy_0}{p} + \frac{zz_0}{q} - (x + x_0) = 0.$$

Vamos a determinar ahora la ecuación del plano tangente paralelo a uno de ecuación

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Sean x_0, y_0, z_0 las coordenadas del punto de contacto; se tendrá, expresando que este punto está en el paraboloide y que el plano tangente en él es paralelo al plano dado,

$$\frac{y^2_0}{p} + \frac{z^2_0}{q} - 2x_0 = 0 \quad ; \quad - \frac{1}{a} = \frac{y_0}{pb} = \frac{z_0}{qc}$$

que nos da como única solución para las coordenadas del punto de contacto, si $a \neq 0$, es decir, *si el plano no es paralelo al eje* OX,

$$y_0 = - \frac{pb}{a} \quad ; \quad z_0 = - \frac{qc}{a} \; ; \quad x_0 = \tfrac{1}{2} \left(\frac{pb^2}{a^2} + \frac{qc^2}{a^2} \right) \; ;$$

luego, *la ecuación del plano tangente paralelo al plano dado* es

$$\frac{by}{a} + \frac{cz}{a} + x + \tfrac{1}{2} \left(\frac{pb^2}{a^2} + \frac{qc^2}{a^2} \right) = 0$$

que puede también ponerse en la forma

$$[11] \qquad ax + by + cz + \frac{1}{2a} (pb^2 + qc^2) = 0.$$

Si el plano fuese paralelo a OX *el problema carecería de solución.*

De la misma forma que en el caso del elipsoide (§ 40-6) se ve que:

Las tangentes a un paraboloide elíptico, paralelas a una dirección que no sea la de los diámetros, forman un cilindro circunscrito al paraboloide.

Las rectas tangentes a un paraboloide elíptico que pasan por un punto $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *del espacio forman un cono circunscrito al paraboloide* de vértice M_1 y que pasa por la sección del paraboloide por el *plano polar* de M_1, cuya ecuación es

$$[12] \qquad \frac{yy_1}{p} + \frac{zz_1}{q} - (x + x_1) = 0$$

y cuyas propiedades son las mismas que enunciamos en el caso del elipsoide (§ 39-6).

4. **Paraboloide elíptico referido a dos planos diametrales conjugados y al plano tangente en el extremo de su diámetro común.** — Vamos a determinar la ecuación del paraboloide elíptico con respecto a un nuevo sistema de coordenadas.

Tomaremos como planos X'Y' y X'Z' dos planos diametrales conjugados cualesquiera. Su intersección es un diámetro que será el eje de las abscisas en el nuevo sistema. Tomaremos como nuevo origen O' el extremo de este diámetro. Tomemos como plano Y'Z' el plano tangente en O' al paraboloide. Vamos a ver cuál es la forma de la ecuación del paraboloide con respecto a este nuevo sistema.

Observemos primero que la recta O'Z' siendo tangente al paraboloide en O' está situada en un plano paralelo a la dirección del diámetro que pasa por O' (teorema 6), luego su plano diametral conjugado pasa por O'; este plano, por definición de planos diametrales conjugados, es paralelo a X'Y', luego es el mismo plano X'Y'; por consiguiente, *la ecuación sólo puede contener potencias pares de z.* Análogamente, se ve que *sólo puede contener potencias pares de y.* Como cada recta paralela a O'X' es un diámetro que corta al paraboloide en un solo punto, la *ecuación tiene que ser de primer grado en x.* Como O' está en la superficie *carece de término independiente.* Una ecuación de segundo grado que reúna todas esas condiciones es del tipo

$$my'^2 + nz'^2 - hx = 0.$$

El coeficiente h es distinto de cero, pues si fuese igual a cero el eje O'X' estaría contenido en la superficie y sabemos que sólo la corta en un punto. Dividiendo por $-h/2$ y llamando p' y q' a los números $-h/2m$, $-h/2n$, la ecuación toma la forma

$$\frac{y'^2}{p'} + \frac{z'^2}{q'} - 2x = 0. \tag{13}$$

Si fuesen p' ó q' nulos, la superficie contendría rectas paralelas a O'Y' ó a O'Z', lo que está en contradicción con el teorema 1. Si ambos fuesen de signos contrarios, x podría variar de $-\infty$ a $+\infty$, haciendo nula una u otra de las variables, lo que no puede ser, ya que O'X' por ser un diámetro, es paralelo al eje primitivo OX y vimos que sólo estaba definida la superficie para los valores de x pertenecientes a una semirrecta.

Podemos finalmente, invirtiendo si fuese necesario el sentido de O'X', suponer que p y q son positivos. En estas condi-

ciones la ecuación [13] es *la ecuación del paraboloide referida al nuevo sistema de coordenadas.*

Esta ecuación nos sirve para estudiar las secciones planas del paraboloide elíptico.

TEOR. 7. *La sección de un paraboloide elíptico por un plano no paralelo a la dirección de los diámetros es una elipse real o imaginaria cuyo centro está en el diámetro conjugado de la dirección del plano.*

En efecto, basta aplicar la ecuación [13] tomando como eje OX el diámetro conjugado de la dirección del plano. El plano Y'Z' es paralelo al plano dado; la ecuación de éste será de la forma $x' = h$, y la sección (cuando se toma en el plano dado el origen de coordenadas en la intersección con OX y como ejes dos paralelos a los ejes O'Y' y O'Z') tiene como ecuación

$$\frac{y'^2}{p'} + \frac{z'^2}{q'} = h \quad ,$$

lo que prueba el teorema.

TEOR. 8. *Las secciones de un paraboloide elíptico por planos paralelos al eje son parábolas cuyos diámetros son paralelos a los del paraboloide.*

Basta aplicar la ecuación [13] cuando se toma como plano X'Y' el plano diametral dado. La sección tiene como ecuacion $y'^2 = 2p'x'$.

Cortemos ahora por planos paralelos al dado de ecuaciones $z = h$. Las ecuaciones de las secciones son

$$y'^2 = 2p' \left(x' - \frac{h^2}{2q'} \right) .$$

Todas estas parábolas son iguales a la parábola situada en el plano X'Y', pues se deducen de ésta por una traslación del origen sobre el eje de abscisas.

Esta propiedad puede servirnos para definir de otra manera el paraboloide elíptico por el movimiento de una parábola; este movimiento está definido por el de uno de sus puntos $\left(\frac{h^2}{2q'} , 0, h \right)$, que describe una parábola fija ($y = 0$, $z^2 = 2q'x$) cuyo plano es cualquiera, pero cuyo eje tiene la misma dirección y sentido que el de la parábola móvil.

5. **Propiedades métricas del paraboloide elíptico.** — El teorema fundamental es el siguiente:

TEOR. 9. *En todo paraboloide elíptico existe una dirección que es perpendicular a su plano diametral conjugado.*

La demostración es análoga a la del lema del teorema 6 del § 39.

Tomemos como plano XY un plano diametral cualquiera: como plano YZ un plano diametral conjugado de XY que pase por el vértice de la parábola, sección del paraboloide por el plano XY y como plano YZ el tangente en O al paraboloide. Así obtenemos la ecuación [13] del paraboloide referida a un sistema de ejes en el que son perpendiculares OX y OY.

El resto de la demostración se prosigue como en el caso del elipsoide, pero la ecuación [33] del § 39 (debido a la diferente forma de la ecuación del plano conjugado y al hecho de que los ejes perpendiculares son ahora OX y OY en lugar de OZ y OY), toma ahora la forma

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cos\mu \\ 0 & 1-\dfrac{S}{p} & \cos\nu \\ \cos\mu & \cos\nu & 1-\dfrac{S}{q} \end{vmatrix} = 0 \quad ;$$

es, pues, una ecuación de segundo grado en S, con el coeficiente de S^2 positivo. Para $S = p$, el determinante toma el valor $-\cos^2\nu$; luego, si este coseno es nulo, la ecuación admite la raíz $S = p \neq 0$; si no es nulo el trinomio en S se hace negativo para $S = p$; luego, la ecuación tiene dos raíces reales.

Repitiendo la construcción anterior, pero tomando como plano XY el que es perpendicular a su dirección, obtenemos como *ecuación del paraboloide elíptico referido a un sistema de coordenadas ortogonales*

$$[14] \qquad \frac{z^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2x = 0.$$

Los números positivos p y q se denominan *parámetros* de la superficie; el único *vértice* es el origen; los *planos, ejes* y *secciones principales* se definen como en el elipsoide.

Cuando los parámetros p, q son iguales, la ecuación del paraboloide toma la forma

$$[15] \qquad z^2 + y^2 = 2px.$$

Sus secciones por planos paralelos al YZ son circunferencias; el paraboloide es un *paraboloide elíptico de revolución* engendrado por la rotación de una parábola alrededor de su eje.

Como en el caso del elipsoide (teorema 7 del § 39) se demuestra aquí:

TEOR. 10. *En un paraboloide elíptico, que no sea de revolución, los únicos planos diametrales perpendiculares a su dirección conjugada son los principales.*

6. Paraboloide hiperbólico. Definición y forma. — DEF. 6. Se denomina *paraboloide hiperbólico* a la superficie cuya ecuación, con respecto de un sistema de coordenadas cartesianas, rectangulares u oblicuas, es reducible a la forma

$$[16] \qquad \frac{z^2}{p} - \frac{z^2}{q} - 2x = 0 \quad ,$$

siendo p y q números positivos.

Se deduce inmediatamente que el eje OX y los planos XZ é XY son eje y planos de simetría oblicua.

Para estudiar la forma del paraboloide hiperbólico, veamos primero sus secciones por los planos XY y XZ; son (fig. 153) dos parábolas P y P′ de ecuaciones $y^2 = 2px$; $z^2 = -2qx$. Las secciones por planos paralelos al XY, de ecuación $z = h$, tienen como ecuaciones

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{h^2}{2q}\right),$$

es decir que son, como en el caso del paraboloide elíptico (teorema 8), parábolas iguales.

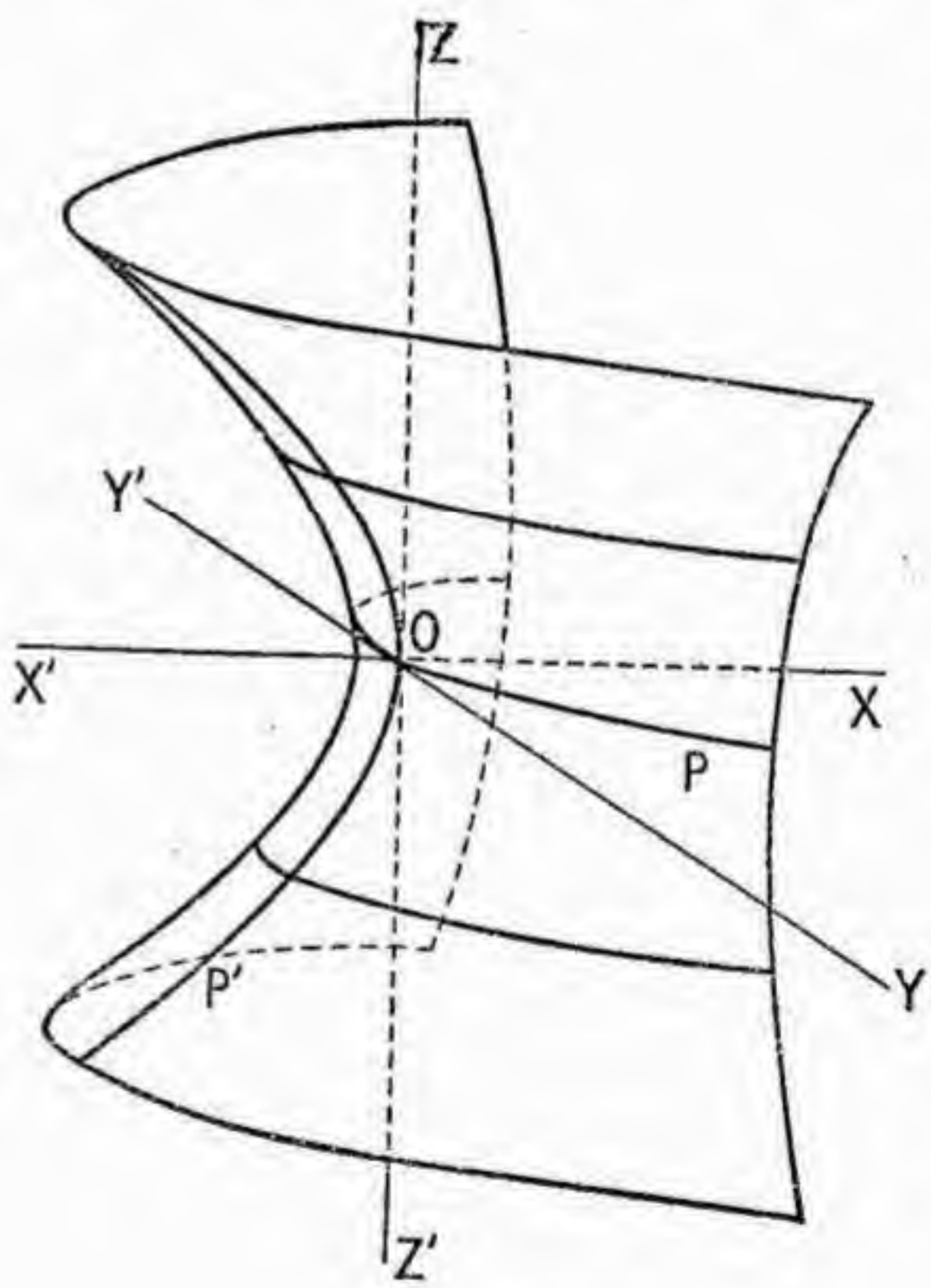

Fig. 153.

La definición del paraboloide hiperbólico es entonces la misma que la del elíptico. Está engendrada por el movimiento de una parábola P en la que uno de sus puntos describe otra parábola fija P′, siendo los ejes de ambas parábolas paralelos, pero, y en esto reside la diferencia con el paraboloide elíptico, de sentido contrario.

Las propiedades del paraboloide hiperbólico se deducen en gran parte de las del elíptico sin más que hacer el cambio de signo de q, y en algunos casos son análogas a las de los hiperboloides. Nos limitaremos en general a señalar únicamente las particularidades que distinguen esta teoría de las ya expuestas.

7. Intersección con una recta, direcciones asintóticas, planos directores y planos asintóticos. — La ecuación [3], que determina los puntos de intersección del paraboloide elíptico con una recta de ecuaciones [2] toma en el caso del paraboloide hiperbólico la forma

$$[17] \qquad \left(\frac{\beta^2}{p} - \frac{\gamma^2}{q}\right)\lambda^2 + 2\left(\frac{\beta y_0}{p} - \frac{\gamma z_0}{q} - \alpha\right)\lambda + \\ + \frac{y^2_0}{p} - \frac{z^2_0}{q} - 2x_0 = 0.$$

Aquí se presenta ya una diferencia esencial; puede anularse el coeficiente de λ^2 para valores reales no nulos de β y γ; también pueden anularse los coeficientes de λ y el término independiente, luego estamos en las mismas condiciones que en el caso de los hiperboloides, la recta pudiendo tener dos puntos comunes con la superficie, uno o ninguno o estar contenida en ella.

Para que una recta corte en un punto a la superficie, no la corte o esté contenida en ella, tiene que ser nulo el coeficiente de λ^2, es decir, se han de cumplir las condiciones

$$[18] \qquad \frac{\beta^2}{p} - \frac{\gamma^2}{q} = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\beta}{\sqrt{p}} = \pm\frac{\gamma}{\sqrt{q}}.$$

Estas condiciones no dependen más que de los coeficientes directores de la recta; luego, si se cumple para una recta, se cumple para todas las paralelas, es decir, depende sólo de la dirección de la recta.

DEF. 7. Una dirección cuyos coeficientes directores satisfagan a la condición [18] se dice que es una *dirección asintótica*.

Las rectas paralelas a una dirección asintótica que pasan por el origen están, como se ve inmediatamente, situadas en uno de los dos planos paralelos al eje OX de ecuaciones

$$[19] \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} = +\frac{z}{\sqrt{q}} \quad ; \quad \frac{y}{\sqrt{p}} = -\frac{z}{\sqrt{q}}.$$

DEF. 8. Los dos planos de ecuaciones [19] se denominan *planos directores*.

Podemos ahora enunciar el siguiente teorema:

TEOR. 11. *Las posiciones de una recta con respecto a un paraboloide hiperbólico pueden ser las siguientes:*

a) *La recta corta al paraboloide en dos puntos, reales y distintos, reales y confundidos (recta tangente) o imaginarios conjugados.*

b) *La recta tiene un solo punto común con el paraboloide, no lo corta, o está situada en él.*

El caso b) se presenta si, y sólo si, la recta es paralela a una dirección asintótica; en caso contrario se presenta el caso a).

Entre las direcciones asintóticas está la paralela al eje OX, $\beta = 0$, $\gamma = 0$; como en este caso no puede ser $\alpha = 0$, no se anula el coeficiente de λ, en [17], luego, *toda paralela al eje* OX *corta al paraboloide en un punto y en uno solo.*

EJEMPLOS. Consideremos el paraboloide de ecuación

$$\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} - 2x = 0.$$

La recta de ecuaciones $x = 1/2$, $z = 0$, corta al paraboloide en dos puntos $(1/2, 2, 0)$ y $(1/2, -2, 0)$.

La recta de ecuaciones $x = 0$, $y = 0$, es tangente en el origen al paraboloide.

La recta de ecuaciones $x = 1/2$, $y = 0$, corta al paraboloide en los dos puntos imaginarios $(1/2, 0, 3i)$ y $(1/2, 0, -3i)$.

La recta de ecuaciones $x = 0$, $y = 2/3z$, está contenida en el paraboloide.

La recta de ecuaciones $x = 1$, $y = 2/3z$, no corta al paraboloide en ningún punto.

La recta de ecuaciones $y = 12$, $z = 6$, corta al paraboloide en un solo punto, el $(16, 12, 6)$.

Si consideramos coordenadas homogéneas, el teorema se puede poner en la forma más precisa siguiente:

TEOR. 12. *Dados un paraboloide hiperbólico y una recta cualquiera, o la recta está situada en el paraboloide o tiene comunes con él dos puntos: reales, propios o impropios, distintos o confundidos, o imaginarios confundidos.*

La demostración es completamente análoga a la del teorema 2 del § 40.

Consideremos ahora todas las rectas paralelas a una dirección asintótica que no corten al paraboloide o estén situadas en él. Sean α, β, γ los coeficientes de la dirección asintótica; deben hacer nulos los coeficientes de λ^2 y de λ en [17]. Consideremos el plano de ecuación

$$[20] \qquad \frac{\beta y}{p} - \frac{\gamma z}{q} - \alpha = 0$$

y sea una recta paralela a la dirección asintótica dada de ecuaciones [2]. Reemplazando en la ecuación [20] se tiene

$$\frac{\beta(y_0 + \lambda\beta)}{p} - \frac{\gamma(z_0 + \lambda\gamma)}{q} - \alpha = 0$$

$$\lambda\left(\frac{\beta^2}{p} - \frac{\gamma^2}{q}\right) + \frac{\beta y_0}{p} - \frac{\gamma z_0}{q} - \alpha = 0 \quad ;$$

pero como β y γ anulan a los coeficientes de λ^2 y λ en la ecua-

ción [17] la relación anterior es una identidad, es decir, que la recta está contenida en el plano de ecuación [20]. Podemos entonces enunciar el siguiente teorema:

TEOR. 13. *Las rectas paralelas a una dirección asintótica que no cortan al paraboloide hiperbólico o están situadas en él, están todas ellas en un mismo plano.*

DEF. 7. El plano definido por el teorema anterior se denomina *plano asintótico.*

Si los coeficientes de la dirección son α, β, γ, la ecuación del plano asintótico es la [20]. Para que esta ecuación tenga sentido no tienen que ser nulos a la vez α, β, γ, es decir, que *para que exista el plano asintótico la dirección asintótica no tiene que ser paralela al eje* OX.

Los coeficientes β, γ de una dirección asintótica satisfacen a la relación [18], luego se tiene uno de los dos casos:

$$\frac{\beta}{\sqrt{p}} = \frac{\gamma}{\sqrt{q}} \; ; \quad \frac{\beta}{\sqrt{p}} = \frac{\gamma}{-\sqrt{q}} \; ;$$

que expresa que el plano asintótico correspondiente de ecuación [20] es paralelo a uno de los planos directores de ecuaciones [19] y ha de serlo evidentemente al que es paralelo a la dirección asintótica, es decir, que se tiene:

TEOR. 14. *Dada una dirección asintótica paralela a un plano director, su plano asintótico es también paralelo al mismo plano.*

8. **Planos diametrales, diámetros y planos tangentes.** — Estas teorías son completamente análogas a las del paraboloide elíptico. Como en aquel caso, a cada dirección no asintótica de coeficientes α, β, γ le corresponde un plano de ecuación

$$[21] \qquad \frac{\beta y}{p} - \frac{\gamma z}{q} - \alpha = 0$$

que es lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos interceptados por el paraboloide hiperbólico sobre las rectas paralelas a la dirección dada, y que se denomina *plano diametral conjugado de dicha dirección.*

Si la dirección dada es asintótica la ecuación [21] representa el plano asintótico correspondiente a la dirección. Como en el caso de las hiperboloides, se considera entonces a dicho plano como un *plano diametral singular, conjugado de su dirección asintótica a la que es paralelo.*

Las propiedades a), b) y c) de los planos diametrales del paraboloide elíptico (nº 2) se extienden al hiperbólico, con la sola restricción en b) y c) de que el plano diametral no sea singular.

La teoría de los diámetros y planos diametrales conjugados desarrollada en el nº 2 se extiende automáticamente al caso del paraboloide hiperbólico y dejamos al lector el cuidado de desarrollarla; nos limitaremos a señalar la siguiente particularidad:

Los planos diametrales conjugados de un plano diametral singular son paralelos a dicho plano diametral singular.

Basta en efecto ver que ambos son paralelos al eje OX y a la dirección asintótica conjugada del plano diametral, que no es paralela a OX.

La teoría del plano tangente desarrollada en el nº 3 para el paraboloide elíptico, también se extiende automáticamente al caso del paraboloide hiperbólico, a la ecuación del plano tangente en el punto (x_0, y_0, z_0) siendo

$$[22] \qquad \frac{yy_0}{p} - \frac{zz_0}{q} - (x + x_0) = 0$$

y análogamente para la ecuación del plano polar.

De la misma forma que en el nº 4 se prueba que *la ecuación del paraboloide hiperbólico referida a dos planos diametrales no singulares conjugados y al plano tangente en el extremo de su diámetro común es*

$$[23] \qquad \frac{y'^2}{p'^2} - \frac{z'^2}{q'^2} - 2x' = 0.$$

Vamos a referir ahora la ecuación del paraboloide hiperbólico a dos planos asintóticos y al plano tangente en el extremo de su diámetro común.

Para ello demostraremos previamente el siguente teorema:

TEOR. 15. *Todo plano asintótico corta al paraboloide según una recta paralela a su dirección conjugada.*

Sabemos que todo plano asintótico es paralelo a un plano director (teorema 14). Su ecuación será entonces, por ejemplo,

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = k \quad ,$$

y la sección de este paraboloide por el plano será una línea cuyas ecuaciones serán las del plano y la del paraboloide, que puede escribirse, esta última, en la forma

$$\left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}}\right) = 2x$$

y reemplazando en esta ecuación el primer factor del primer miembro por su valor deducido de la ecuación del plano obtenemos como otro sistema de ecuaciones de la intersección equivalente al anterior

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = k \quad ; \quad 2x = k\left(\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}}\right)$$

que son las ecuaciones de una recta, cuyos coeficientes angulares son k, $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$. La ecuación del plano conjugado de esta dirección es

$$\frac{y\sqrt{p}}{p} - \frac{z\sqrt{q}}{q} - k = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = k \quad ,$$

es decir el plano dado; luego el teorema está probado.

Si tomamos coordenadas homogéneas, las ecuaciones del plano y del paraboloide se escriben en la forma

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = kt \quad ; \quad \left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}}\right) = 2xt \quad ,$$

y se ve que la recta impropia de ecuaciones

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = kt \quad ; \quad t = 0$$

está situada en ambas superficies; luego *el paraboloide y el plano asintótico tienen además comunes una recta impropia.*

Tomemos ahora como sistema de coordenadas el formado por dos planos asintóticos no paralelos que serán los planos X'Y' y X'Z' y como plano Y'Z' el plano tangente al paraboloide en el extremo del diámetro común a los dos primeros planos.

La ecuación del paraboloide respecto de este sistema será una ecuación de segundo grado. El eje O'Y' situado en el plano tangente será la tangente a la curva sección del paraboloide en el plano X'Y', pero como este plano es asintótico, la sección que él produce en el hiperboloide es una recta (teorema 15); luego dicha sección es el eje O'Y'. Si en la ecuación general de segundo grado hacemos $z' = 0$ (cortamos por el plano XY) y expresamos que la sección es el eje OY, obtenemos la anulación de los términos en x'^2, y'^2, $x'y'$, y' y el independiente. Haciendo el mismo razonamiento con la sección del plano X'Z' se ve que también se anulan los términos en z'^2, $x'z'$ y z', luego sólo quedan los términos en $y'z'$ y x'; la ecuación toma por lo tanto la forma

$$[24] \qquad ay'z' + bx' = 0 \quad \text{ó} \quad y'z' = kx'$$

y siempre se puede suponer k positivo, cambiando si fuese necesario el sentido de uno de los ejes. La ecuación [24] es por lo tanto la *ecuación del paraboloide hiperbólico referido a dos planos asintóticos y al plano tangente al paraboloide en el extremo del diámetro común a los dos planos asintóticos.*

Utilizando ahora las ecuaciones [23] y [24] y razonando de la misma forma que hicimos en el caso del paraboloide elíp

tico para obtener los teoremas 7 y 8, se demuestran los siguientes teoremas:

TEOR. 16. *Las secciones del paraboloide hiperbólico por planos no paralelos a la dirección de los diámetros, son cónicas del género hipérbola cuyo centro está en el diámetro conjugado de la dirección del plano.*

Cuando el plano sea tangente, el centro pertenece a la cónica y por lo tanto es una hipérbola degenerada, es decir, un par de rectas; luego:

COROLARIO. *La sección de un paraboloide por un plano tangente es un sistema de dos rectas.*

TEOR. 17. *Las secciones del paraboloide hiperbólico por planos diametrales no asintóticos son parábolas cuyos diámetros son paralelos a los del paraboloide.*

9. **Propiedades métricas del paraboloide hiperbólico.** — Con un razonamiento completamente análogo al empleado en el nº 5 se prueba que *un paraboloide hiperbólico puede siempre referirse a un sistema de tres ejes rectangulares* OX, OY *y* OZ *de forma que su ecuacion sea*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2x = 0 \quad ,$$

en donde p y q son números positivos que se denominan *parámetros* del paraboloide; el único *vértice* es el origen, y los *planos, ejes y secciones principales se definen como en el elipsoide.*

Como (teoremas 15, 16 y 17) ninguna sección plana del paraboloide hiperbólico es del género elipse, tampoco puede tener secciones circulares; luego *el paraboloide hiperbólico no puede ser nunca una superficie de revolución.* Si $p = q$, se dice que el paraboloide es equilátero.

Finalmente el teorema 10 se extiende al paraboloide hiperbólico, y con la misma demostración se tiene

TEOR. 18. *En un paraboloide hiperbólico los únicos planos diametrales perpendiculares a su dirección conjugada son los principales.*

§ 42. CUÁDRICAS EN GENERAL

1. **Estudio de las cuádricas por el método de formación de cuadrados.** — En el § 39-1, dimos la definición general de cuádrica y la forma de su ecuación general. También dimos allá dieciséis formas de ecuaciones de cuádricas que eran las generalizaciones inmediatas de las ecuaciones reducidas de las cónicas. Hemos hecho ya el estudio de las cuádricas más im-

portantes (elipsoides, hiperboloides, paraboloides y conos). Los otros tipos no merecen interés especial; limitémonos a señalar que el estudio de los cilindros se reduce al de las cónicas secciones de ellos por un plano.

El estudio de las cuádricas definidas por su ecuación general se puede hacer, como en el caso de los cónicas (§ 20-2), por el *método de formación de cuadrados.*

Consideremos la cuádrica de ecuación

$$[1] \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gxz + 2lx + \\ + 2my + 2nz + d = 0$$

y consideraremos dos casos posibles.

A) Por lo menos uno de los tres coeficientes a, b, c es distinto de cero; supondremos $c \neq 0$ (los otros casos, tratándose de manera idéntica o por permutación de las variables).

Multipliquemos la ecuación de la cuádrica por c. Reunamos los términos en z y formemos el cuadrado de ellos. Tendremos

$$acx^2 + bcy^2 + c^2z^2 + 2chxy + 2cfyz + 2cgxz + 2clx + \\ + 2cmy + 2cnz + cd = 0$$

$$(gx + fy + cz + n)^2 + (ac - g^2)x^2 + (bc - f^2)y^2 + \\ + 2(ch - gf)xy + 2(cl - ng)x + 2(cm - nf)y + \\ + cd - n^2 = 0.$$

Llamemos

$$a' = ac - g^2 \quad , \quad b' = bc - f^2 \quad , \quad h' = ch - gf \quad , \\ g' = cl - ng \quad , \quad f' = cm - nf \quad , \quad c' = cd - n^2 \quad ,$$

la ecuación toma la forma

$$[2] \qquad (gx + fy + cz + n)^2 + (a'x^2 + b'y^2 + 2h'xy + \\ + 2g'x + 2f'y + c') = 0.$$

Pero el segundo paréntesis es la ecuación general de una cónica a la que podemos aplicar los resultados ya obtenidos en el § 20-2. De acuerdo a lo ya establecido consideraremos varios casos distintos, todos ellos dentro del caso general A).

A_1) $a' \neq 0$; $\delta' = a'b' - h'^2 \neq 0$.

En este caso el segundo paréntesis de la ecuación [2] puede, después de multiplicarla por a' y por δ', ponerse en la forma [4] del § 20 (o en una equivalente, permutando la x por la y); luego la ecuación [2] puede ponerse en la forma

$$[3] \qquad \delta' a' (gx + fy + cz + n)^2 + \delta' (a'x + h'y + g')^2 + \\ + (\delta' y + \lambda')^2 - \lambda'^2 + \delta' \mu' = 0.$$

Los tres planos de ecuaciones

$$gx + fy + cz + n = 0 \quad ; \quad a'x + h'y + g' = 0 \quad ; \quad \delta' y + \lambda' = 0$$

se cortan en un solo punto (los dos últimos son paralelos a OZ y no paralelos entre sí, el primero no es paralelo a OZ),

luego podemos tomarlos como nuevos planos coordenados de un nuevo sistema de ejes. En éste la ecuación [3] tomará la forma

[4] $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0; \quad A \neq 0; \quad B \neq 0; \quad C \neq 0.$

Si es $D \neq 0$, podemos suponerlo igual a —1, la ecuación tomará la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$$

que representa (§ 39-1) un *elipsoide*, si los tres coeficientes A, B y C son positivos; si los tres son negativos, un *elipsoidesoide imaginario*; un *hiperboloide de una hoja* si son dos negativos y uno positivo, y un *hiperboloide de dos hojas* si son uno negativo y dos positivos. Si es $D = 0$, obtenemos un *cono real*, si dos coeficientes son del mismo signo y el otro de signo contrario; y un *cono imaginario* si los tres tienen el mismo signo.

Si fuese $a' = 0$, $b' \neq 0$, basta cambiar la x por la y.

A_2) $a' = b' = 0; \quad h' \neq 0;$ entonces es $\delta' \neq 0$.

En ese caso vimos que el segundo paréntesis de la ecuación [2] puede ponerse en la forma [7] del § 20. La ecuación [2] toma ahora la forma

$$(gx + fy + cz + n)^2 + 2(h'x + f')(y + g'h') - \frac{2f'g'}{h} + c' = 0$$

y haciendo un cambio de coordenadas como en el caso anterior se reduce a la

[5] $$Az^2 + Bxy + D = 0.$$

Siempre podemos suponer A positivo y, cambiando la orientación de un eje si fuese necesario, B negativo. Entonces si $D = 0$, la superficie es un *cono real* ([20′] del § 40); si D es negativo, entonces dividiendo por —D nos queda la ecuación de un *hiperboloide de una hoja*; si D es positivo, se divide por D y nos queda la ecuación de un *hiperboloide de dos hojas* ([19] y [20] del § 40).

A_3) $\delta' = 0; \quad a' \neq 0.$ (Si fuese $a' = 0$, $b' \neq 0$, se cambia la x por la y).

En este caso vimos que el segundo paréntesis de la ecuación [2] adopta, después de multiplicarlo por a', la forma [10] del § 20. La ecuación [2] toma por consiguiente la forma

[6] $$a'(gx + fy + cz + n)^2 + (a'x + h'y + g')^2 + (2\lambda'y + \mu') = 0$$

que, haciendo como en los casos anteriores un cambio de coordenadas, puede ponerse en una de las formas

[7] $Ax^2 + By^2 + Cz = 0$, $(A \neq 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0)$

[8] $Ax^2 + By^2 + C = 0$, $(A \neq 0,\ B \neq 0)$

según que sea $\lambda' \neq 0$ ó $\lambda' = 0$, respectivamente.

En la ecuación [7] podemos suponer siempre A positivo, e invirtiendo si fuese necesario, el sentido de los ejes, C negativo; entonces, según que B sea positivo o negativo, la ecuación es la de un *paraboloide elíptico* o un *paraboloide hiperbólico.*

Supongamos ahora que en la ecuación [8] sea $D \neq 0$; lo podemos suponer igual a 1; entonces la ecuación [8] es: si A y B son los dos negativos, la de un *cilindro elíptico real* ([2] del § 39); si los dos son negativos, la de un *cilindro elíptico imaginario* ([3] del § 39); y si son de signo contrario, un *cilindro hiperbólico* ([4] del § 39).

Si fuera en [8] $D = 0$, la ecuación representaría: si A y B son del mismo signo, *dos planos imaginarios conjugados que se cortan* ([5] del § 39), y si son de signo contrario, *dos planos reales que se cortan* ([6] del § 39).

Los tres casos A_1), A_2) y A_3) son todos los casos que se pueden presentar, según vimos en el nº 2 del § 39, si el segundo paréntesis de [2] es un polinomio de segundo grado; cabe ahora un cuarto caso, que dicho polinomio sea de primer grado, es decir

A_4) $a' = b' = h' = 0.$

La ecuación [2] toma entonces la forma

$$(gx + fy + cz + n)^2 + (2g'x + 2f'y + c') = 0$$

que, haciendo como en los casos anteriores un cambio de coordenadas, puede ponerse en una de las dos formas

[9] $x^2 + Ay = 0$, si es $g' \neq 0$ ó $f' \neq 0$

[10] $x^2 + A = 0$, si es $g' = f' = 0$;

la ecuación [9] es la de un cilindro parabólico ([7] del § 39), y la [10] es la de *dos planos paralelos, reales* si $A < 0$, y si $A > 0$ *imaginarios* ([8] del § 39); $A = 0$, la ecuación es la de un *plano real doble* ([9] del § 39).

Pasemos ahora al segundo caso general:

B) $a = b = c = 0.$

Para que la ecuación sea de segundo grado, uno de los tres coeficientes h, f ó g tiene que ser distinto de cero. Supongamos $h \neq 0$ (los otros casos se tratan en forma idéntica o por permutación de variables). La ecuación [2] tiene ahora la forma

[11] $2hxy + 2fyz + 2gxz + 2lx + 2my + 2nz + d = 0$

que puede escribirse también de la manera siguiente:

$$2\left(x + \frac{f}{h}z + \frac{m}{h}\right)(hy + gz + l) - \frac{fg}{h}z^2 +$$

$$+ 2\left(n - \frac{fl}{h} - \frac{mg}{h}\right)z + d - \frac{ml}{h} = 0$$

(basta efectuar operaciones en la segunda ecuación para obtener su identidad con la primera). Llamando

$$a' = -\frac{fg}{h} \quad ; \quad b' = \left(n - \frac{fl}{h} - \frac{mg}{h}\right) \; ; \; c' = d - \frac{ml}{h}$$

[11] adopta la forma

$$[12] \qquad 2\left(x + \frac{f}{h}z + \frac{m}{h}\right)(hy + gz + l) +$$

$$+ a'z^2 + 2b'z + c' = 0.$$

Distinguiremos ahora cuatro casos:

B_1) $a' \neq 0$. La ecuación [12] puede ponerse entonces, multiplicando por a', y formando el cuadrado de los términos en z, en la forma

$$2a'\left(x + \frac{f}{h}z + \frac{m}{n}\right)(hy + gz + l) + (a'z + b')^2 +$$

$$a'c' - b'^2 = 0$$

y haciendo un cambio de coordenadas toma la forma

$$Axy + Bz^2 + C = 0 \quad , \quad (A \neq 0, \; B \neq 0)$$

que no es otra que la [5] ya estudiada. Tenemos entonces un *cono real, un hiperboloide de una hoja o un hiperboloide de dos hojas.*

B_2) $a' = 0$; $b' \neq 0$.

Haciendo un cambio de coordenadas la ecuación [12] toma la forma

$$Axy + Bz = 0 \quad , \quad (A \neq 0, \; B \neq 0)$$

que representa ([24] del § 41) un *paraboloide hiperbólico.*

B_3) $a' = b' = 0$; $c' \neq 0$.

Haciendo un cambio de coordenadas la ecuación [12] toma la forma

$$Axy + B = 0 \quad , \quad (A \neq 0, \; B \neq 0) \quad ,$$

que representa un *cilindro* (por faltar la z en la ecuación) *hiperbólico* (por ser la cónica de ecuación $Axy + B = 0$ una hipérbola).

B_4) $a' = b' = c' = 0$.

Haciendo un cambio de coordenadas la ecuación [12] toma la forma

$$Axy = 0 \quad , \quad (A \neq 0)$$

que representa dos planos (el YZ y el XZ).

Podemos por consiguiente enunciar ahora el teorema fundamental:

TEOREMA 1. *Una ecuación de segundo grado con tres variables en un sistema de coordenadas cartesianas (ortogonales u oblicuas) puede ser la ecuación de las siguientes superficies y sólo de ellas:*

a) *Un elipsoide (real o imaginario), un hiperboloide (de una o de dos hojas) o un paraboloide (elíptico o hiperbólico).*

b) *Un cono (real o imaginario).*

c) *Un cilindro que puede ser: elíptico (real o imaginario), hiperbólico o parabólico.*

d) *Dos planos que pueden ser: reales y concurrentes, reales e imaginarios conjugados, reales y paralelos, imaginarios conjugados y paralelos o, finalmente, un plano real doble.*

DEFINICIÓN 1. En los casos b), c) y d) la *cuádrica se dice que es degenerada.*

2. Aplicación práctica del método de formación de cuadrados. — Vamos a dar algunos ejemplos para mostrar la forma práctica de aplicar el método de formación de los cuadrados.

1º Sea la cuádrica de ecuación

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4yz - 4xy - 6 = 0$$

multiplicándola por 6 se tiene

$$42x^2 + 36y^2 + 30z^2 - 24yz - 24xy - 36 = 0$$

y formando el cuadrado

$$(6y - 2x - 2z)^2 + 38x^2 + 26z^2 - 8xz - 36 = 0$$

multiplicándola de nuevo por 26

$$26(6y - 2x - 2z)^2 + 988x^2 + 676z^2 - 288xz - 936 = 0$$

y formando el cuadrado de nuevo

$$26(6y - 2x - 2z)^2 + (26z - 4x)^2 + 972x^2 - 936 = 0$$

luego, la cuádrica es un elipsoide, cuyo centro es el origen (intersección de los tres planos de ecuaciones $x = 0$; $26z - 4x = 0$; $6y - 2x - 2z = 0$). Este último resultado podía verse directamente en la ecuación de la cuádrica, ya que ésta no alteraba al cambiar x en $-x$, y en $-y$, y z en $-z$.

2º Sea la cuádrica de ecuación

$$5x^2 - y^2 + z^2 + 6xz + 4xy + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$$

formando el cuadrado se tiene

$$(z + 3x + 3)^2 - 4x^2 - 17 - 16x - y^2 + 4xy + 4y = 0$$

y volviéndolo a formar se obtiene

$$(z + 3x + 3)^2 - (2x - y + 4)^2 + 12y - 1 = 0$$

luego, la cuádrica es un paraboloide hiperbólico.

3º Sea la cuádrica de ecuación

$$x^2 - 2y^2 + 5xy + xz - yz = 0$$

formando el cuadrado

$$\left(x - \frac{5}{2}y + \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{37}{4}y^2 - \frac{z^2}{4} + \frac{3}{2}xz = 0$$

y volviéndolo a formar se tiene

$$\left(x - \frac{5}{2}y + \frac{z}{2}\right)^2 - \left(\frac{z}{2} + \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{28}{4}y^2 = 0$$

luego, la cuádrica es un cono real, de vértice el origen (intersección de los planos de ecuaciones $y = 0$; $z + 3y = 0$; $2x - 5y + 5 = 0$).

Este resultado podía preverse desde un pricnipio; por ser la ecuación homogénea, tenía que representar un cono de vértice el origen; para ver si era real o imaginario bastaba cortarlo por un plano, por ejemplo el $x = 0$; la sección en YZ es la cónica de ecuación $-2y^2 - yz = 0$, que es real (se compone de las dos rectas $y = 0$; $z = -2y$); luego, el cono es real.

4º Sea la cuádrica de ecuación

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz + 2xy + 2x + 2z + 4 = 0$$

formando el cuadrado se pone en la forma

$$(x + y + 1)^2 + y^2 + 3 - 2y + z^2 - 2yz + 2z = 0$$

y volviéndolo a formar

$$(x + y + 1)^2 + (y - z - 1)^2 + 2 = 0$$

luego, la cuádrica es un cilindro elíptico imaginario.

5º Sea la cuádrica de ecuación

$$xy + yz - 3xz + 1 = 0$$

puede ponerse en la forma

$$(x + z)(y - 3z) + 3z^2 + 1 = 0$$

luego, la cuádrica es un hiperboloide de dos hojas.

6º Sea la cuádrica de ecuación

$$x^2 - 6y^2 + 6z^2 - xy + 5xz - 5yz - x - 7y - 4z - 2 = 0$$

formando el cuadrado se tiene

$$\left(x - \frac{y}{2} + \frac{5}{2}z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}y^2 -$$

$$- \frac{z^2}{4} - \frac{5}{2}yz - \frac{15}{2}y - \frac{3}{2}z - \frac{9}{4} = 0$$

y volviéndolo a formar se obtiene

$$\left(x - \frac{y}{2} + \frac{5}{2}z - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}y + \frac{z}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

luego, la cuádrica se compone de dos planos reales que se cortan, los de ecuaciones

$$x - 3y + 2z - 2 = 0 \quad ; \quad x + 2y + 3z + 1 = 0.$$

Vemos por estos ejemplos que el método de la formación de los cuadrados nos da en forma sencilla la clasificación de una cuádrica. Una clasificación de las cuádricas análoga a la hecha en el nº 3 del § 20 se puede hacer, y se puede deducir igualmente del método de la formación de cuadrados, pero los cálculos son muy complicados y la aplicación del método muy poco práctica, por lo que nos limitaremos a mencionar la existencia de tal método.

3. **Centro de las cuádricas.** — El problema de la determinación de los centros de una cuádrica dada por su ecuación general

$$[13] \quad f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gxz + \\ + 2lx + 2my + 2nz + d = 0$$

se hace exactamente en la misma forma que en el caso de las cónicas (nº 5 del § 20), con la diferencia que en vez del sistema [16] allí obtenido, de dos ecuaciones con dos incógnitas, obtenemos aquí el sistema

$$[14] \quad \begin{cases} ax + hy + gz + l = 0 \\ hx + by + fz + m = 0 \\ gx + fy + cz + n = 0 \end{cases}$$

cuya solución da el centro o los centros de la cuádrica. El problema equivale geométricamente a determinar los puntos de intersección de tres planos; por lo tanto caben las siguientes posibilidades:

1) Los tres planos se cortan en un solo punto; *la superficie tiene un solo centro.* Tal es el caso del elipsoide, de los hiperboloides y del cono.

2) Los tres planos son paralelos a una misma recta; *la cuádrica carece de centros.* Tal es el caso de los paraboloides.

3) Los tres planos pasan por la misma recta; *la cuádrica tiene una línea de centros.* Tal es el caso de los cilindros definidos por una cónica con centro.

4) Los tres planos son paralelos; *no hay centros.* Tal es el caso de los cilindros parabólicos.

5) Los tres planos están confundidos. Hay un *plano de centros.* Tal es el caso de las cuádricas formadas por dos planos paralelos.

Se suele denominar a las superficies de estos cinco tipos, superficies de primera, segunda, tercera, cuarta y quinta clase.

Si consideramos un sistema de ejes paralelos a los dados y llevamos el origen al centro de la cuádrica (si existe), se ve, igual que en el caso de las cónicas, que la ecuación [13] toma ahora la forma

$$[14'] \quad ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + 2hx'y' + 2fy'z' + 2gx'z' + \\ + f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

que es la que se denomina *ecuación en el centro* de la cuádrica.

Esta superficie será un cono si se tiene $f(x_0, y_0, z_0) = 0$; recíprocamente, si la superficie es un cono, su vértice es centro de la cuádrica; luego se tiene el siguiente teorema:

TEOR. 2. *Para que una cuádrica sea un cono es necesario y suficiente que tenga por lo menos un centro y que este cen-*

tro esté en la cuádrica. (Hay que observar que las cuádricas formadas por dos planos que se cortan y las formadas por un plano doble son casos particulares de conos).

EJEMPLO. Sea la cuádrica de ecuación

$$x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0 \;;$$

las ecuaciones que determinan el centro son

$$x - 3 = 0 \quad ; \quad 3y + 2z + 4 = 0 \quad ; \quad 2y = 0$$

y la solución de este sistema es $x = 3$, $y = 0$, $z = -2$; luego, el centro es el punto $(3, 0, -2)$. La ecuación en el centro de esta cuádrica es

$$x'^2 + 3y'^2 + 4y'z' - 1 = 0.$$

4. **Planos diametrales en las cuádricas.** — El problema de la intersección de la cuádrica de ecuación [13] con una recta de ecuaciones

$$[15] \qquad x = x_0 + p\lambda \quad ; \quad y = y_0 + q\lambda \quad ; \quad z = z_0 + r\lambda$$

conduce, por un razonamiento idéntico al hecho en el caso de las cónicas, a la resolución de la ecuación

$$[16] \qquad \lambda^2\alpha(p, q, r) + \lambda\Big(pf'_x(x_0, y_0, z_0) + \\ + qf'_y(x_0, y_0, z_0) + rf'_z(x_0, y_0, z_0)\Big) + f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

(análoga a la ecuación [19] del § 20), en donde $\alpha(x, y, z)$ designa el conjunto de los términos de segundo grado de [13].

DEF. Una dirección de coeficientes directores p, q, r se dice que es una *dirección asintótica* de la cuádrica de ecuación [13] si se tiene $\alpha(p, q, r) = 0$.

Cuando al determinar los centros la superficie no resulte de primera clase es fácil clasificarla.

Si es de segunda clase ha de ser un paraboloide; cortándolo por un plano coordenado no paralelo a la recta a la que son paralelos los planos [14], según que la sección sea una cónica del género elipse o una del género hipérbola, el paraboloide será elíptico o hiperbólico (teoremas [7] y [16] del § 41).

Si es de tercera clase, se la corta por un plano coordenado no paralelo a la línea de los centros, y la clase de la sección nos determinará la clase del cilindro. Si es de cuarta clase, es un cilindro parabólico, y si es de quinta basta cortarlo por un plano no paralelo al plano [14] para ver si los dos planos que constituyen la superficie son imaginarios o reales, distintos o confundidos.

EJEMPLO. Sea la cuádrica 2ª del nº 2.
Los planos para determinar el centro son

$$\begin{cases} 5x + 2y + 3z + 1 = 0 \\ 2x - y \qquad\quad + 2 = 0 \\ 3x + \qquad\quad z + 3 = 0. \end{cases}$$

Se ve que el sistema no tiene solución, puesto que reemplazando en la primera y tercera ecuaciones el valor de y obtenido de la segunda, el sistema

$$\begin{cases} 9x + 3z + 5 = 0 \\ 3x + z + 3 = 0 \end{cases}$$

es incompatible.

Los planos no son paralelos; luego, la cuádrica es de segunda clase; cortemos por el plano $x = 0$; tenemos la ecuación

$$-y^2 + z^2 + 4y + 6z - 8 = 0$$

que por ser $\delta < 0$, es una cónica del género hipérbola. La cuádrica es, por lo tanto, un paraboloide hiperbólico.

Cuando la dirección es asintótica, la ecuación [16] es de primer grado; luego, una recta paralela a la dirección asintótica corta a la cuádrica en un solo punto, o no la corta, o está contenida en ella. La definición que hemos dado comprende, por lo tanto, a la dada anteriormente para los hiperboloides y el paraboloide hiperbólico.

DEF. 2. El cono de ecuación $\alpha(x, y, z) = 0$, que está formado por las paralelas a las direcciones asintóticas por el origen, se denomina *cono asintótico* de la cuádrica. En algunas ocasiones conviene tomar como vértice otro punto cualquiera del espacio y el cono se denomina cono asintótico por ese punto.

Dada una dirección *no asintótica*, la ecuación [16] es siempre de segundo grado; luego, todas las paralelas a la dirección determinan cuerdas (de extremos reales y distintos, o reales y confundidos o imaginarios conjugados). Se demuestra, igual que en el caso de las cónicas, que el lugar de los puntos medios es un plano que se denomina *plano diametral conjugado de la dirección* y cuya ecuación, que se deduce como la ecuación [20] del § 20, es

$$[17] \qquad pf'_x(x, y, z) + qf'_y(x, y, z) + rf'_z(x, y, z) = 0$$

siendo p, q y r los coeficientes directores de la dirección.

Desarrollando [17] se tiene

$$[18] \qquad (ax + hy + gz + l)p + (hx + by + fz + m)q + \\ + (gx + fy + cz + n)r = 0$$

y ordenándola con respecto de x, y, z y multiplicando por 2 queda

$$(2ap + 2hq + 2gr)x + (2hp + 2bq + 2fr)y + \\ + (2gp + 2fq + 2rc)z + 2pl + 2qm + 2rn = 0$$

que puede escribirse

$$[19] \qquad x\alpha'_x(p, q, r) + y\alpha'_y(p, q, r) + z\alpha'_z(p, q, r) + \\ + 2pl + 2qm + 2rn = 0.$$

La ecuación [18] nos muestra que la ecuación de todo pla-

no diametral es una combinación lineal de las ecuaciones de los tres planos que definen el centro; luego tiene los puntos que tengan comunes estos planos y es paralelo a las rectas y planos a que sean paralelos los otros tres planos; luego se tiene:

TEOR. 3. *Los planos diametrales de una cuádrica de primera clase pasan por el único centro; los de una de segunda clase son paralelos a una recta; los de una de tercera clase pasan por la línea de los centros; los de una de cuarta clase son paralelos entre sí, y en una superficie de quinta clase hay un solo plano diametral.*

El concepto de plano diametral puede tomarse como base para demostrar el teorema 1 y para clasificar una cuádrica.

Consideremos una recta paralela a una dirección no asintótica de una cuádrica y tomémosla como eje OX de un nuevo sistema de coordenadas siendo el plano OZ el plano diametral conjugado de esta dirección.

Siendo YOZ el plano diametral conjugado de OX la ecuación de la superficie no se ha de alterar al cambiar x en $-x$, luego sólo contiene potencias pares de x, es decir, es de la forma

[20] $$Ax^2 + g(y, z) = 0.$$

Si $A = 0$, tenemos la ecuación de un cilindro. Si $g(y, z)$, es un polinomio de segundo grado; $g(y, z) = 0$ es ecuación de una cónica que puede, por un cambio conveniente de ejes OY y OZ, ponerse en una de las formas siguientes:

$$By^2 + Cz^2 + D = 0 \quad (B \neq 0,\ C \neq 0)$$
$$By^2 + Cz = 0 \quad (B \neq 0,\ C \neq 0)$$
$$By^2 + C = 0 \quad (B \neq 0)$$

luego la ecuación de la cuádrica puede adoptar las formas

[21] $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0 \quad (A \neq 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0)$

[22] $Ax^2 + By^2 + Cz = 0 \quad (A \neq 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0)$

[23] $Ax^2 + By^2 + C = 0 \quad (A \neq 0,\ B \neq 0)$

y también cabe el caso de que $g(x, y)$ sea de primer grado, tomandola como eje OZ la ecuación de la cuádrica será

[24] $$Ax^2 + By = 0 \quad (A \neq 0)$$

y finalmente si $g(x, y)$ es constante la ecuación será

[25] $$Ax^2 + B = 0 \quad (A \neq 0).$$

Las ecuaciones [21], [22], [23], [24] y [25] no son otras que las ecuaciones [4], [7], [8], [9] y [10] encontradas en el nº 1, lo que prueba nuevamente el teorema fundamental.

5. **Planos y direcciones principales. Ecuación en S.** — Consideraremos en esta teoría, únicamente sistemas de coordenadas cartesianas ortogonales.

DEF. 3. Se denomina *plano principal* todo plano diametral perpendicular a su dirección conjugada; esta dirección se llama entonces *dirección principal.*

Dada una dirección cualquiera de coeficientes p, q y r, su plano diametral conjugado es el plano de ecuación [19]; un plano perpendicular a la dirección tiene como ecuación

$$xp + yq + zr + k = 0 \quad , \tag{26}$$

luego, para que [19] y [26] sean paralelos, tienen que ser proporcionales sus coeficientes, es decir, tiene que haber un coeficiente 2S no nulo tal que

$$\alpha'_p(p, q, r) = 2Sp \quad ; \quad \alpha'_q(p, q, r) = 2Sq \quad ; \quad \alpha'_r(p, q, r) = 2Sr. \tag{27}$$

Por lo tanto la condición para que una dirección sea perpendicular a su plano diametral conjugado es que se cumplan las relaciones [27] para un valor de S no nulo y para valores de p, q y r que no sean nulos simultáneamente. Desarrollando las ecuaciones [27] se tiene

$$\begin{aligned} ap + hq + gr &= Sp \\ hp + bq + fr &= Sq \\ gp + fq + cr &= Sr. \end{aligned} \tag{28}$$

Pero este sistema es un sistema de ecuaciones lineales y homogéneas en p, q y r; para que admita una solución distinta de $p = q = r = 0$ es necesario y suficiente que el determinante de los coeficientes sea distinto de cero; por consiguiente el problema se reduce a encontrar una raíz distinta de cero de la *ecuación en* S,

$$\begin{vmatrix} a - S & h & g \\ h & b - S & f \\ g & f & c - S \end{vmatrix} = 0. \tag{29}$$

Ésta es una ecuación de tercer grado que desarrollada toma la forma

$$\begin{aligned} S^3 - (a + b + c)S^2 + \\ + (ab + ac + bc - h^2 - f^2 - g^2)S - \Delta = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

en donde Δ, término independiente, se obtiene haciendo $S = 0$ en [29].

Toda ecuación de tercer grado tiene siempre una raíz real; si ésta no es nula, entonces el problema está resuelto; reemplazando la raíz S_1 en las ecuaciones [28] y resolviendo el sistema, tenemos una dirección principal.

Ahora bien, puede probarse que *la ecuación en* S *admite siempre una raíz real no nula*; luego: *toda cuádrica admite por lo menos una dirección principal.* Es claro, por otra parte, que este método nos da siempre todas las direcciones principales que existan.

Puede todavía presentarse la objeción de que el método da también los planos asintóticos conjugados de una dirección asintótica. Vamos a ver cómo puede levantarse esta objeción. Si p, q y r fueran coeficientes de una dirección asintótica y soluciones de [27], se tendría, aplicando el teorema de Euler de las funciones homogéneas,

$$0 = \alpha(p, q, r) = \tfrac{1}{2}\,[p\alpha'_p(p, q, r) + q\alpha'_q(p, q, r) + r\alpha'_r(p, q, r)] = \\ = S(p^2 + q^2 + r^2),$$

lo que es absurdo, pues ninguno de los dos factores del último miembro pueden ser nulos.

EJEMPLOS: 1. Sea la cuádrica cuya ecuación en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares es

$$x^2 + 3y^2 + 4yz - 6z + 8y + 8 = 0.$$

Su ecuación en S es

$$\begin{vmatrix} 1-S & 0 & 0 \\ 0 & 3-S & 2 \\ 0 & 2 & -S \end{vmatrix} = (1-S)(-3S + S^2 - 4) = 0$$

que admite las raíces 1, —1 y 4.

Las ecuaciones [28] son en este caso

$$p - Sp = 0 \quad ; \quad (3-S)q + 2r = 0 \quad ; \quad 2q - S = 0$$

que para $S = 1$, $S = -1$, $S = 4$ nos dan los sistemas

$$\begin{array}{lll} p + p = 0 & ; \quad p + p = 0 & ; \quad p - 4p = 0 \\ 2q + r = 0 & ; \quad 4q + 2r = 0 & ; \quad -q + 2r = 0 \\ 2q - r = 0 & ; \quad 2q + r = 0 & ; \quad 2q - 4r = 0 \end{array}$$

luego, las tres direcciones principales que existen son (salvo un factor de proporcionalidad),

$$p_1 = 1, \quad q_1 = 0, \quad r_1 = 0; \quad p_2 = 0, \quad q_2 = 1, \quad r_2 = -2; \\ p_3 = 0, \quad q_3 = 2, \quad r_3 = 1.$$

Si referimos la cuádrica a su centro, que es el punto (3, 0, —2), solución de las ecuaciones

$$x - 3 = 0 \quad ; \quad 3y + 2z + 4 = 0 \quad ; \quad 2y = 0 \quad ,$$

las rectas paralelas a las direcciones principales por el centro serán los *ejes de la cuádrica.* Dichos ejes son en este caso los de ecuaciones

$$1\begin{cases} y = 0 \\ z = -2 \end{cases} \qquad 2\begin{cases} x = 3 \\ y + 2z = -2 \end{cases} \qquad 3\begin{cases} x = 3 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$$

2. Consideremos ahora el elipsoide de revolución

$$x^2 + y^2 + 3z^2 = 1 \quad .$$

su ecuación en S es

$$\begin{vmatrix} 1-S & 0 & 0 \\ 0 & 1-S & 0 \\ 0 & 0 & 3-S \end{vmatrix} = 0$$

que tiene la raíz simple $S = 3$ y la doble $S = 1$. Las ecuaciones [28] son en este caso

$$p(1 - S) = 0 \quad ; \quad q(1 - S) = 0 \quad ; \quad r(3 - S) = 0$$

que para la raíz $S = 3$ nos dan $p = 0$, $q = 0$, es decir, la dirección del eje OZ; la raíz doble sólo impone la condición $r = 0$, pudiendo ser p y q cualesquiera, es decir, obtenemos todas las paralelas al plano XY, es decir, todas las direcciones principales.

3. Considérese una esfera cualquiera y véase que el método de la ecuación en S da una raíz triple que deja completamente indeterminadas las direcciones principales, es decir, que lo son todas.

Los ejemplos 2 y 3 son casos particulares de los dos teoremas siguientes que nos limitaremos a enunciar:

TEOR. 4. *La condición necesaria y suficiente para que una cuádrica sea de revolución es que su ecuación en* S *admita una raíz doble no nula.*

TEOR. 5. *La condición necesaria y suficiente para que una cuádrica* por S la ecuación [30] queda de segundo grado
sea una esfera es que su ecuación en S *admita una raíz triple.*

NOTA. Vamos a demostrar que la ecuación en S admite siempre una raíz real no nula. Si admitiese una raíz nula sería $\Delta = 0$ y dividiendo

$$S^2 - (a + b + c)S - (ab + ac + bc - h^2 - f^2 - g^2) = 0$$

cuyo discriminante es

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac + 4h^2 + 4f^2 + 4g^2.$$

Si los tres coeficientes a, b y c, son del mismo signo, todos los términos son positivos; luego el discriminante es positivo. En caso contrario hay, por lo menos, dos que son de signo contrario, por ejemplo a y b, el discriminante puede escribirse en la forma

$$(c - a - b)^2 - 4ab + 4h^2 + 4f^2 + 4g^2$$

que es también positivo por serlo todos sus sumandos.

Luego, la ecuación admite dos raíces reales. Éstas no pueden ser las dos nulas; pues entonces serían nulos el coeficiente de S y el término independiente y tendríamos

$$a + b + c = 0$$
$$ab + ac + bc - h^2 - f^2 - g^2 = 0$$

elevando al cuadrado la primera, multiplicando la segunda por 2 y restando se tiene

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2h^2 + 2f^2 + 2g^2 = 0$$

luego tienen que ser nulos a, b, c, h, f y g, lo que es imposible por ser la ecuación de la cuádrica de segundo grado.

6. Generatrices rectilíneas de las cuádricas. — La ecuación del hiperboloide de una hoja puede escribirse así:

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{31}$$

O bien:

$$\left\{\frac{x}{a} - 1\right\}\left\{\frac{x}{a} + 1\right\} = \left\{\frac{z}{c} - \frac{y}{b}\right\}\left\{\frac{z}{c} + \frac{y}{b}\right\}$$

Escrita en esa forma aparece como producto de las ecuaciones:

$$[32] \qquad \left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - 1 &= \lambda \left\{ \frac{z}{c} - \frac{y}{b} \right\} \\ \lambda \left\{ \frac{x}{a} + 1 \right\} &= \frac{z}{c} + \frac{y}{b} \end{aligned}\right\}$$

cualquiera que sea el parámetro λ. Al variar λ cada una de estas ecuaciones representa un haz de planos y sus intersecciones son rectas situadas en la superficie, puesto que la ecuación [31] se satisface para las soluciones comunes a éstas, ya que es el producto de ambas.

DEF. 4. Resulta, pues, un sistema de infinitas rectas situadas en la cuádrica y el conjunto de todas se llama *haz alabeado* de segundo orden.

Análogamente, como [31] es el producto de las ecuaciones

$$[33] \qquad \left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - 1 &= \mu \left\{ \frac{z}{c} + \frac{y}{b} \right\} \\ \mu \left\{ \frac{x}{a} + 1 \right\} &= \left\{ \frac{z}{c} - \frac{y}{b} \right\} \end{aligned}\right\}$$

resulta otro haz alabeado sobre la superficie.

Fijado un punto (x_0, y_0, z_0) en la superficie, las ecuaciones [32] determinan un valor de λ:

$$\lambda = \frac{\dfrac{x_0}{a} - 1}{\dfrac{z_0}{c} - \dfrac{y_0}{b}} = \frac{\dfrac{z_0}{c} + \dfrac{y_0}{b}}{\dfrac{x_0}{a} + 1}$$

el cual determina una generatriz del primer sistema que pasa por él y, análogamente, resulta una generatriz del segundo sistema. En consecuencia:

TEOR. 6. *El hiperboloide de una hoja contiene dos haces de generatrices rectilíneas y por cada punto de la superficie pasa una de cada sistema, las cuales determinan el plano tangente en dicho punto.*

Análogamente, la ecuación del paraboloide hiperbólico

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

puede escribirse así:

$$[34] \qquad z = \left\{ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right\} \left\{ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right\}$$

y es por tanto el producto de estas dos:

$$[35] \qquad \left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= \lambda z \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}\right\}$$

que definen un haz alabeado de rectas situadas en la superficie y asimismo es el producto de estas otras dos:

$$[36] \qquad \left.\begin{aligned} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} &= \mu \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= \frac{z}{\mu} \end{aligned}\right\}$$

que definen otro haz alabeado:

Lo mismo que en el caso anterior, por cada punto del paraboloide pasa una generatriz de cada sistema; pero hay una diferencia notable y es que todas las rectas [35] son paralelas al plano

$$[37] \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$$

y todas las rectas [36] son paralelas al plano

$$[38] \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

Parece, pues, natural considerar la recta impropia del plano [37] como formando parte del segundo sistema, puesto que corta a todas las del primero, y a la recta impropia del plano [38] como perteneciente al primer haz, puesto que tiene un punto común con cada una del segundo.

DEF. 5. Se denominan *alabeadas* las cuádricas que contienen generatrices rectilíneas; entre ellas figuran el hiperboloide de una hoja y el paraboloide hiperbólico.

El elipsoide carece de generatrices rectilíneas por ser finito, y también carece de ellas el hiperboloide de dos hojas y el paraboloide elíptico, por existir planos que no contienen puntos de la superficie ni propios ni impropios (por ejemplo, todos los planos $z = k$ siendo $k < 0$ para el paraboloide, o bien $-c < k < c$ para el hiperboloide [1].

PROPIEDADES. — Dando a λ un valor cualquiera, si M es el punto en que el plano del primer haz corta a la segunda recta y N el punto en que el plano del segundo haz corta a la primera, la intersección es MN. Al variar los planos varían los puntos M y N y por tanto resultan dos rectas cruzadas. En

[1] Para el paraboloide hiperbólico damos una demostración analítica en el nº 2 del § 41.

efecto, si MN y M'N' estuvieran en un plano, también lo estarían las dos aristas MM' y NN'.

Por consiguiente: *Dos generatrices de un mismo haz no se cortan.*

En cambio, como las ecuaciones [32] y [33] no son independientes, pues el producto de las dos primeras es idéntico al producto de las dos segundas (o sea la ecuación [31]), una de ellas es consecuencia de las otras dos y por tanto las coordenadas del punto que satisfaga a tres de ellas satisface también a la cuarta. Es decir: *Dos generatrices de distinto haz tienen un punto común.*

Dadas tres generatrices de un sistema, las del otro quedan determinadas por la condición de cortar a estas tres.

Sea un punto de la generatriz c, los planos Pa y Pb determinan una recta que pasa por P y cortan a las a y b en puntos propios o impropios.

Por cada punto de cada una de las rectas a, b, c pasa, pues, una sola generatriz del otro sistema.

Recíprocamente, dadas tres rectas cualesquiera que se cruzan dos a dos se obtiene fácilmente la ecuación de la cuádrica que se determina, como indica el siguiente ejemplo.

EJEMPLO. Sean las generatrices dadas

$$x = 0 \quad ; \quad x = 1 \quad ; \quad x + y = 2$$
$$y = 0 \quad ; \quad y = z \quad , \quad z = 0.$$

Para que la recta

[39] $$\begin{aligned} y &= bz + q \\ x &= ax + p \end{aligned}$$

corte a la primera, es preciso que las ecuaciones $az + p = 0$, $bz + p = 0$ tengan una solución común, o sea:

[40] $$aq = bp.$$

Para que corte a la segunda es preciso que sean compatibles las ecuaciones

$$az + p - 1 = 0 \quad ; \quad (b-1)z + q = 0.$$

O sea $$aq = (b-1)(p-1).$$

Y teniendo en cuenta la [40]:

[41] $$b + p = 1.$$

Para que corte a la tercera es preciso que sean compatibles las ecuaciones:

[42] $$(a+b)z + p + q = 2 \quad ; \quad z = 0 \quad \therefore \quad p + q = 2.$$

Eliminando a, b, p, q entre las cinco ecuaciones [39], [40], [41] resulta una ecuación en x, y, z que se satisface para las coordenadas de todos los puntos de todas las rectas [39] secantes de las tres dadas, y es por tanto la ecuación del lugar geométrico formado por todas esas secantes.

Dicha eliminación se hace cómodamente despejando a, b, p, q de las cuatro ecuaciones lineales y sustituyendo en la [40], que es de segundo grado. Así resulta la ecuación de la cuádrica

$$y^2 + xy + xz - yz - 2y = 0.$$

Otro método más rápido pero que no pone de manifiesto su estructura reglada es el de coeficientes indeterminados, partiendo de la ecuación general e imponiéndole las condiciones de contener a las tres rectas directrices dadas.

7. **Secciones circulares.** — Consideraremos únicamente coordenadas ortogonales.

La sección plana de una cuádrica es una cónica propia o degenerada. En efecto, adoptando ese plano como coordenado, es decir $z = 0$, la ecuación general de la cuádrica

$$[43] \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gxz + \\ + 2lx + 2my + 2nz + d = 0$$

da, como ecuación de la sección por el plano xy, la siguiente:

$$[44] \qquad ax^2 + by^2 + 2hxy + 2lx + 2my + d = 0$$

que representa una cónica.

Se tiene el siguiente teorema:

TEOR. 7. *Las secciones paralelas de una cuádrica por planos secantes paralelos son curvas semejantes.*

En efecto, cortemos la misma cuádrica [43] por otro plano $z = k$ paralelo al plano $z = 0$, resultando una cónica definida por éste y la ecuación:

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2fyk + 2gxk + 2lx + 2my + \\ + 2nk + ck^2 + d = 0$$

que tiene los mismos términos de segundo grado en xy, y por consiguiente es semejante a aquélla.

NOTA. En particular, si el plano paralelo es tangente, la sección se reduce a un solo punto o a dos rectas y la semejanza deja de subsistir.

Un método que se presenta de modo natural para determinar las secciones planas que son circunferencias, es el siguiente:

Si de la ecuación de la cuádrica $f(x, y, z) = 0$, restamos la ecuación de una superficie esférica, elegida de tal manera que la diferencia represente dos planos, la línea de intersección de la cuádrica con la superficie es la misma que la intersección de ésta con los dos planos, es decir, dos circunferencias.

Sea el elipsoide escaleno

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a > b > c$$

y la superficie esférica de radio b

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

La diferencia de ambas ecuaciones:

$$x^2\left\{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right\}=z^2\left\{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right\}$$

y como ambos coeficientes son positivos por ser $1/b^2 > 1/a^2$ y $1/c^2 > 1/b^2$, esta ecuación se descompone en dos ecuaciones de primer grado que representan dos planos: $z = - \pm kx$. Por tanto:

Hay dos secciones circulares cuyos planos pasan por el eje intermedio b.

Si elegimos la superficie esférica de radio a o c resulta un coeficiente positivo y otro negativo, es decir, dos planos imaginarios.

EJEMPLO. Sea el elipsoide

$$4x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 2.$$

Como el coeficiente intermedio es el 4, elegiremos, entonces, la siguiente superficie esférica:

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 2.$$

Y restando resulta:

$$y^2 - 2z^2 = 0$$
$$y = \pm\sqrt{2z}.$$

Las dos secciones circulares que pasan por el eje x están perfectamente determinadas por estos dos planos y la superficie esférica.

MÉTODO GRÁFICO. — Si trazamos planos por el eje mayor a resultan elipses con este semieje a y el otro es el radio vector que el plano determina en la elipse de semiejes b, c, el cual, por estar comprendido entre b y c, es menor que b y en consecuencia menor que a.

Resulta, pues, una elipse de semieje mayor a.

Análogamente, si trazamos un plano por c determina con la elipse de semiejes a, b un radio vector mayor que b y por tanto mayor que c. Resulta, pues, una elipse de semieje mínimo c.

En cambio, si la sección se traza por el eje intermedio b, como el

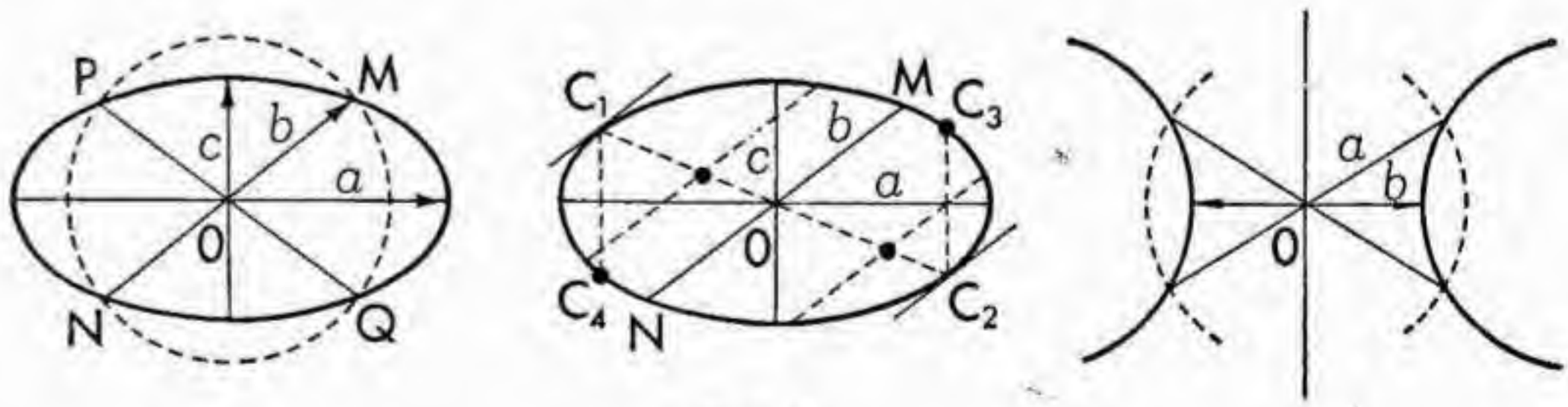

Fig. 154.

radio vector de la elipse de semiejes a, c, está comprendido entre a y c y por continuidad toma todos los valores intermedios, existe un radio igual a b.

Trazando con centro O la circunferencia de radio b, ésta corta a la elipse en cuatro puntos simétricos dos a dos, los cuales determinan los cuatro planos buscados (fig. 154).

Obtenidas las dos secciones circulares por los planos π y π' que pasan por el eje intermedio del elipsoide, determinadas analítica o gráficamente, todas las secciones producidas por planos paralelos son también circunferencias, puesto que las secciones paralelas son semejantes. Resulta, pues, un doble sistema de secciones circulares, dos a dos simétricas, respecto de los planos principales que pasan por el eje intermedio; los centros de las secciones paralelas entre sí forman el diámetro conjugado con el diámetro MN de la elipse.

DEF. 6. Los dos extremos C_1, C_2 de cada diámetro conjugado con un sistema de secciones circulares, o sea los puntos en que corta a la cuádrica, se llaman *umbílicos* o *cíclicos*.

Los puntos cíclicos de la cuádrica están, pues, definidos por la condición de que los planos secantes paralelos al plano tangente en cada uno dan secciones circulares.

En el elipsoide hay, por consiguiente, cuatro puntos cíclicos situados en la sección principal de semiejes máximo y mínimo y simétricos dos a dos respecto de éstos.

Para el hiperboloide de una hoja, el método es igual al seguido en el elipsoide. Si de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad a > b;\ c \text{ es cualquiera,}$$

restamos la ecuación de la superficie esférica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

resulta:

$$y^2 \left\{ \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right\} - z^2 \left\{ \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right\} = 0$$

que representa un par de planos: $z = \pm k$ y que pasan por el eje x y que son simétricos respecto de los dos planos coordenados xy, xz.

NOTA. En cambio, por el eje menor b no pasa ningún plano que dé secciones circulares, pues todas las secciones resultan con el semieje mínimo b; como el diámetro conjugado con un plano secante es exterior, resulta que no hay puntos cíclicos en el hiperboloide de una hoja.

Esta incompatibilidad se comprende también porque el plano tangente corta en dos rectas y sus paralelos cortan en hipérbolas que tienen los mismos puntos impropios que estas rectas; luego no son circunferencias.

Ejemplo:

$$3x^2 + y^2 - 2z^2 = 4.$$

Como el mayor de los dos semiejes transversos es y elegimos la superficie esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

y restando resulta la ecuación

$$2x^2 = 3z^2 \quad \therefore \quad \pm \sqrt{2/3x} = z$$

que representa dos planos; éstos, con la superficie esférica, determinan dos secciones circulares.

8. **Determinación de cuádricas.** — Como su ecuación tiene diez coeficientes, dividiendo por uno de ellos no nulo quedan nueve; son, pues, necesarias nueve condiciones para determinar una cuádrica.

Dar un punto (x_0, y_0, z_0) de la superficie es dar una ecuación:

$$ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 + 2fy_0z_0 + 2gx_0z_0 + 2hx_0y_0 + 2lx_0 + 2my_0 + \\ + 2nz_0 + d = 0$$

entre los coeficientes, luego *son necesarios nueve (9) puntos para determinar una cuádrica.*

Cabe, sin embargo, que por nueve puntos dados pasen dos cuádricas. Basta en efecto, imaginar dos cuádricas secantes y elegir nueve puntos de su intersección.

Pero si por nueve puntos pasan dos cuádricas $f = 0$, $g = 0$ también pasan las infinitas cuádricas del haz $f - \lambda g = 0$, cualquiera que sea el número λ, pues se satisfacen para las soluciones comunes a ambas, luego resulta:

Por nueve puntos pasa una sola cuádrica o bien infinitas.

Otros modos de determinar una cuádrica son los siguientes:

Por un punto y dos cónicas que tienen dos puntos comunes y están en distintos planos. En efecto, los dos puntos comunes, más otros tres elegidos en cada una, son ocho puntos. Sin embargo, el método más rápido para determinar cuádricas, cuando se dan cónicas, es el de la combinación lineal, que llamaremos brevemente "método de las λ".

EJEMPLOS: 1. Consideremos la cuádrica

[45] $$f = x^2 + 2y^2 + z^2 - x + 2y = 0$$

y sus dos secciones por los planos $y = 0$, $z = 0$.

Para determinar una cuádrica que pase por estas dos conicas y además por el punto (1, 1, 2) consideremos la ecuación:

[46] $$f - \lambda yz = 0$$

que representa un haz de cuádricas, cada una de las cuales pasa por los puntos comunes a aquella cuádrica y cada uno de los dos planos. Para determinar la que pasa por el punto (1, 1, 2) basta sustituir estas coordenadas en [2], y de la ecuación λ que así resulta, se despeja el valor numérico de este parámetro que es:

$$\lambda = \frac{f(1, 1, 2)}{1 \,.\, 2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Luego, la ecuación de la cuádrica que cumple la condición impuesta es:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4yz - x + 2y = 0.$$

2. Cuádrica que pasa por el punto (1, —1, 1) y por las secciones determinadas en la misma (ej. 1) por los planos $2y + z = 0$, $x - 2y = 0$.

El valor de λ es ahora:

$$\lambda = \frac{f(1, -1, 1)}{-1.3} = -\frac{1}{3}$$

y la ecuación que resulta es:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 2yz + xz - 3x + 6y = 0.$$

Vamos a dar unas nociones muy someras sobre la intersección de cuádricas.

Se tiene el siguiente teorema:

TEOR. 8. *La curva de intersección de dos cuádricas es cortada por un plano cualquiera en cuatro puntos, reales o imaginarios, propios o impropios, distintos o confundidos.*

En efecto, esos puntos son los cuatro puntos comunes a las dos cónicas secciones de las cuádricas dadas por un mismo plano.

Esta curva intersección no se descompone en general y es una cuártica alabeada. Es claro que la cuártica no puede ser una curva plana, pues toda sección de una cuádrica por un plano es una cónica, y una recta no puede cortar a una cónica en cuatro puntos.

Si las dos cuádricas tiene una generatriz común, la intersección se descompone en una recta y en una curva, cortada por todo plano en tres puntos, por cortar en uno a la generatriz común; luego, *la intersección se compone de una recta y de una cúbica alabeada*, que como en el caso de la cuártica, no puede ser plana.

Cabe, finalmente, que la intersección *se descomponga en dos cónicas distintas o confundidas.*

9. **Cuádricas homofocales.** — Por analogía con el estudio hecho para las cónicas, vamos a considerar las ecuaciones en coordenadas ortogonales:

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1. \tag{47}$$

Suponiendo por ejemplo $a > b > c$, si damos a λ un valor menor que c^2, resulta un elipsoide; si λ supera a c^2 pero es inferior a b^2, resulta un solo término negativo (hiperboloide de una hoja); si λ supera a b^2 pero es menor que a^2, resultan dos términos negativos (hiperboloide de dos hojas).

DEF. 7. Los infinitos elipsoides e hiperboloides definidos por la ecuación [47] se llaman *homofocales.*

Para obtener las cuádricas de la familia que pasen por cada punto (x_0, y_0, z_0) hay que resolver la ecuación:

$$(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)-x^2_0(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)-y^2_0(c^2-\lambda)(a^2-\lambda)- \\ -z^2_0(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)=0.$$

Para λ negativo, suficientemente grande en valor absoluto, el polinomio tiene el signo del término $-\lambda^3$ ó sea positivo, para $\lambda = c^2$ resulta signo *menos*; para $\lambda = b^2$, signo *más*; para $\lambda = a^2$, signo *menos.*

Hay, por consiguiente, una raíz $\lambda_1 < c^2$, la cual da un elipsoide; otra raíz $c^2 < \lambda_2 < b^2$ que da una hiperboloide de una hoja, y otra raíz $b^2 < \lambda^2_3 < a^2$ que da un hiperboloide de dos hojas.

Veamos las relaciones geométricas existentes entre las tres cuádricas que pasan por el punto (x_0, y_0, z_0) dadas por las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2-\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_1}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_1}&=1\\ \frac{x^2}{a^2-\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_2}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_2}&=1\\ \frac{x^2}{a^2-\lambda_3}+\frac{y^2}{b^2-\lambda_3}+\frac{z^2}{c^2-\lambda_3}&=1\end{aligned}\right\}$$

Restando las dos primeras se obtiene, después de simplificar, suprimiendo el factor $\lambda_1 - \lambda_2$, la relación siguiente:

$$\frac{x^2_0}{(a^2-\lambda_1)(a^2-\lambda_2)}+\frac{y^2_0}{(b^2-\lambda_1)(b^2-\lambda_2)}+\frac{z^2_0}{(c^2-\lambda_1)(c^2-\lambda_2)}=0$$

en el punto (x_0, y_0, z_0) común a ambas superficies.

Los coeficientes directores de las normales a las dos superficies en dicho punto son:

$$\frac{x_0}{a^2-\lambda_1}, \quad \frac{y_0}{b^2-\lambda_1}, \quad \frac{z_0}{c^2-\lambda_1}$$

$$\frac{x_0}{a^2-\lambda_2}, \quad \frac{y_0}{b^2-\lambda_2}, \quad \frac{z_0}{c^2-\lambda_2}$$

y como la relación anterior expresa que la suma de los productos es nula, resulta que las dos cuádricas son ortogonales en ese punto común.

TEOR. 9. *Los planos tangentes a las tres cuádricas, en cada punto, forman, por lo tanto, un triedro trirrectángulo.*

10. **Polaridad en las cuádricas.** — Consideremos coordenadas homogéneas. Sean

$$P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0, t_0) \quad \text{y} \quad P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1, t_1)$$

dos puntos de una recta; las coordenadas de cualquier otro punto de ella son:

$$P \equiv (x_0 - \lambda x_1, \; y_0 - \lambda y_1, \; z_0 - \lambda z_1, \; t_0 - \lambda t_1)$$

y expresando que este punto está en una cuádrica, resulta el desarrollo siguiente que puede deducirse de la fórmula de Taylor, para varias variables, o bien por cálculo algebraico elemental *:

[48]
$$f(x_0 - \lambda x_1, y_0 - \lambda y_1, z_0 - \lambda z_1, t_0 - \lambda t_1) =$$
$$= f(x_0, y_0, z_0, t_0) - \lambda(x_1 f'_{x_0} + y_1 f'_{y_0} + z_1 f'_{z_0} + t_1 f'_{t_0}) +$$
$$+ \lambda^2 f(x_1, y_1, z_1, t_1).$$

Fijados los puntos P_0 y P_1, la ecuación determina dos valores de λ, reales o imaginarios; en el primer caso estos valores determinan los dos puntos de intersección; cuando las dos raíces son iguales resulta la recta tangente a la cuádrica.

Si el punto P_0 está en la superficie, cualquiera que sea el punto P_1 resulta una raíz $\lambda = 0$, es decir, uno de los puntos de intersección es el P_0.

La condición para que el segundo punto de intersección coincida con el P_0, es decir, para que la recta sea tangente en P_0, es la anulación del coeficiente de λ, o sea:

$$x_1 f'_{x_0} + y_1 f'_{y_0} + z_1 f'_{z_0} + t_1 f'_{t_0} = 0,$$

es decir, el lugar de los puntos de todas las rectas tangentes a la superficie en P_0 es el plano.

[49]
$$x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} + t f'_{t_0} = 0.$$

DEF. 8. En cambio, si son nulas todas las derivadas en P_0, toda recta que pase por P_0 es tangente. El punto se llama, entonces, *singular*.

Por consiguiente: *Las tangentes a la superficie en un punto ordinario forman un plano tangente, cuya ecuación tiene por coeficientes los valores de la derivada en ese punto.*

Toda recta que pase por un punto singular es tangente a la superficie.

---

* Sin necesidad de recurrir a la fórmula de Taylor, resulta este desarrollo observando que se cumple para cada término del polinomio. En efecto, para Ax^2 es:

$$A(x_0 - \lambda x_1)^2 = Ax_0^2 - \lambda x_1 2Ax_0 + \lambda^2 Ax_1^2$$

y análogamente que para los términos cuadrados, para los rectangulares, por ejemplo, se tiene:

$$2H(x_0 - \lambda x_1)(y_0 - \lambda y_1) = 2Hx_0y_0 - \lambda(x_1 2Hy_0 + y_1 2Hx_0) + \lambda^2 2Hx_1y_1$$

y sumando todas las igualdades análogas resulta la fórmula para cualquier polinomio.

Si P_0 es singular y elegimos P_1 en la superficie, la ecuación [48] se reduce a $0 = 0$; es decir, todo valor de λ la satisface y en consecuencia la recta P_0P_1 está en la superficie. Por tanto, si la cuádrica tiene un punto singular, es una superficie cónica con vértice en ese punto.

Si hay dos puntos singulares, P'_0 y P_0 siendo A un punto de la superficie, pertenecen a ella las rectas AP_0 y AP'_0 y también las rectas que proyectan sobre $P_0P'_0$ los puntos de ella; es decir: La superficie se compone de planos que pasan por la recta $P_0P'_0$. Estos planos pueden ser distintos o uno doble.

Puesto que λ representa la razón simple (P_0, P_1, P) cuando $t_1 = t_0$, y en el caso general sólo difiere de esta razón en el coeficiente t_0/t_1, la condición necesaria y suficiente para que los dos puntos de intersección con la cuádrica estén armónicamente separados por P_0 y P_1, es que los dos valores de λ sean opuestos; es decir:

$$x_1f'_{x_0} + y_1f'_{y_0} + z_1f'_{z_0} + t_1f'_{t_0} = 0.$$

DEF. 9. Dos puntos, P_0 y P_1, que cumplan esta condición se llaman *conjugados* respecto de la superficie. Todos los puntos conjugados del P_0 constituyen el plano:

$$[50] \qquad xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} + tf'_{t_0} = 0$$

se llama *plano polar de* P_0, es decir:

DEF. 10. *Plano polar de un punto* P_0 *respecto de una cuádrica* es el lugar de los puntos conjugados de P_0 respecto de los dos de intersección de las rectas trazadas por él.

En particular, si el punto P_0 está en la superficie, el plano polar [50] es el plano tangente dado en [49]. Éste es el único caso en que el plano polar pasa por el polo P_0, pues si [50] se satisface al sustituir las coordenadas generales por (x_0, y_0, z_0, t_0), el primer miembro, por el teorema de Euler sobre las funciones homogéneas vale $2f_0 = 0$, es decir que el punto está en la superficie.

Por tanto: El plano polar de cada punto de la cuádrica es el tangente en él; si el plano polar contiene al polo, éste es un punto de la superficie y resulta el plano tangente.

Los planos polares de los puntos de la recta determinada por

$$P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0, t_0) \quad \text{y} \quad P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1, t_1)$$

se deducen fácilmente de los planos polares de estos puntos:

$$P_0 = x_0f'_x + y_0f'_y + z_0f'_z + t_0f'_t = 0$$
$$P_1 = x_1f'_x + y_1f'_y + z_1f'_z + t_1f'_t = 0$$

pues si se ponen las coordenadas del punto P:

$$(x_0 - \lambda x_1, \ y_0 - \lambda y_1, \ z_0 - \lambda z_1, \ t_0 - \lambda t_1)$$

resulta como ecuación del plano polar:

$$P_0 - \lambda P_1 = 0$$

es decir, los planos polares de los puntos de una recta r forman un haz de arista r'.

DEF. 11. La recta común a todos los planos polares de los puntos de una recta, se llama *recta polar* de ésta.

Como la conjugación es una relación recíproca, resulta que la polar de r' es r.

Si r y r' se cortan en P el plano polar de P contiene a r y r', es decir, que estas dos rectas son tangentes a la cuádrica.

Recíprocamente, como los planos polares de los puntos de una recta tangente, pasan por el punto de contacto, la recta polar corta en éste a r.

Luego, *la polar de una recta es secante o se cruza con ella según que sea tangente o no a la superficie.*

Si la recta r no es tangente, es decir, es secante o exterior, el haz de planos polares tiene como arista la polar r' conjugada con r. Elegidos dos puntos conjugados en cada una, resulta que el plano polar de cada uno pasa por el conjugado y también por la recta de los otros dos; luego, en el tetraedro, definido por los cuatro puntos, todo vértice tiene como plano polar la cara opuesta.

Estos tetraedros se llaman *autopolares*, y cada par de rectas polares rr' no tangentes suministran infinitos tetraedros autopolares.

PROBLEMAS SOBRE SUPERFICIES DE SEGUNDO ORDEN

En los problemas precedidos de un asterisco los datos se dan en un sistema cartesiano rectangular.

* 1º Encontrar la ecuación de una superficie esférica cuyo centro es el punto (3, 2, —2) y que es tangente al plano de ecuación $x + 3y - 2z + 1 = 0$.

R.: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 4z + 3 = 0$.

* 2º Encontrar la ecuación de la supreficie esférica que tiene su centro en el eje OX y que pasa por los dos puntos (3, —4, 2) y (6, 2, —1).

R.: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 17 = 0$.

* 3º La sección de una superficie esférica por el plano XY es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 3 = 0$. Determinar la superficie esférica sabiendo además que pasa por el punto (3, 4, 2).

R.: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z - 3 = 0$.

* 4º Encontrar la ecuación del plano radical de las superficies esféricas de ecuaciones $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 10 = 0$ y $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 2y + 4z - 12 = 0$.

R.: $5x - 3y + 5z + 1 = 0$.

* 5º Encontrar el eje radical de las superficies esféricas de ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 4y - 6z + 25 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 2y + 6z + 18 = 0.$$

R.: $8x + 2y + 8z + 17 = 0;$
$3x + 2y + 2z - 12 = 0.$

* 6º Encontrar el centro radical de las superficies esféricas de ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 13 = 0:$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 4y - 4z + 11 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 8z + 25 = 0.$$

R.: (—551/32, 235/16, 39/32).

* 7º Encontrar la eceuación de la superficie esférica que pasa por la intersección de las dos esferas de ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 6z + 10 = 0$$

y por el punto (—2, 4, 0).

R.: $x^2 + y^2 + z^2 - 19x - 32y - 21z + 70 = 0$.

* 8º Encontrar la ecuación de la superficie esférica que pasa por la intersección de las dos superficies esféricas de ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 6z + 12 = 0;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z - 12 = 0$$

y que es tangente al plano de ecuación $x + 2y - 2z - 3 = 0$.

R.: Dos soluciones: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 4z + 8 = 0$; $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 24y + 22z + 44 = 0$.

9º Dado el elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{10} = 1$$

determinar la ecuación de los planos tangentes al mismo que son paralelos al plano de ecuación $2x + 3y + 3z = 0$.

R.: $2x + 3y + 3z \pm 13 = 0$.

10º Dado el hiperboloide de ecuación

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} - 2z = 0$$

determinar planos que lo corten: según una elipse, según una hipérbola, según un par de rectas.

11º Dado el paraboloide de ecuación

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} - 2z^2 = 0$$

determinar planos que lo corten: según una hipérbola, según una parábola, según dos rectas, según una recta.

12º Clasificar las cuádricas de ecuaciones

a) $2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0$.
R.: Paraboloide hiperbólico.

b) $11x^2 + 10y^2 + 6z^2 - 12xy - 8yz + 4xz - 12 = 0$.
R.: Elipsoide real.

c) $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 6xy + 4yz + 8xz - 8 = 0$.
R.: Hiperboloide de una hoja.

d) $x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xz - 6 = 0$.
R.: Elipsoide.

e) $x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xz + 2xy + 1 = 0$.
R.: Hiperboloide de dos hojas.

f) $5x^2 + 14y^2 - z^2 - 28xy + 32xz + 4yz + 32x + 4y - 2z - 100 = 0$.
R.: Hiperboloide de una hoja.

13º Clasificar determinando las ecuaciones del centro y cortando por planos las siguientes cuádricas:

a) $5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 8xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y - 6z = 0$.
R.: Paraboloide de revolución.

b) $4x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xz - 8yz - 8x + 16y + 20z + 4 = 0$.
R.: Cilindro elíptico.

c) $4x^2 + y^2 + 4z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 6x - 12y - 12z = 0$.
R.: Cilindro parabólico.

14º Discutir según los valores de λ la naturaleza de la cuádrica de ecuación

$$x^2 + (\lambda + 1)y^2 + \lambda z^2 - 2yz + 2xy + 2x + 2z + 4 = 0.$$

R.: $\lambda < -1$, hiperboloide de una hoja; $\lambda = -1$, paraboloide hiperbólico; $-1 < \lambda < -1/3$, hiperboloide de una hoja; $\lambda = -1/3$, cono real; $-1/3 < \lambda < 1$, hiperboloide de dos hojas; $\lambda = 1$, cilindro elíptico imaginario; $\lambda > 1$, elipsoide imaginario.

15º Discutir según los valores de λ la naturaleza de la cuádrica de ecuación

$$-x^2 + (\lambda + 1)z^2 + 2(\lambda + 1)yz - 2xz + 2xy = 0.$$

R.: $\lambda < -1/\sqrt{2}$, hiperboloide de dos hojas; $\lambda = -1/\sqrt{2}$, cono real; $-1/\sqrt{2} < \lambda < 0$, hiperboloide de una hoja; $\lambda = 0$, paraboloide hiperbólico; $0 < \lambda < 1/\sqrt{2}$, hiperboloide de una hoja; $\lambda = 1/\sqrt{2}$, cono real; $1/\sqrt{2} < \lambda < 1$, hiperboloide de dos hojas; $\lambda = 1$, cilindro hiperbólico; $\lambda > 1$, hiperboloide de una hoja.

16º Dada la cuádrica de ecuación

$$x^2 - 3y^2 - z^2 + xy - xz + 5x - 3y - 1 = 0$$

clasificarla y clasificar la sección producida en esta superficie por el plano que pasa por el punto $(3, 1, -1)$ y es perpendicular a la recta de ecuaciones $x + y - 2 = 0$, $x + 3z - 5 = 0$.

R.: Hiperboloide de dos hojas; parábola.

17º Determinar la familia de cuádricas que pasa por los ejes OX y OY y por la recta que pasa por los puntos $(3, 0, 0)$ y $(0, 0, 3)$ por el punto $(1, 2, -3)$. Determinar también cuáles son las cuádricas de esa familia que son paraboloide.

R.: $2z^2 + (6\lambda - 15)xy + 2xz + 2\lambda yz - 6z = 0$;
$8x^2 + 15xy + 8xz - 30yz - 24z = 0$.

18º Dado el hiperboloide de ecuación

$$xy + xz + yz - 2x - y + 3z + 1 = 0$$

determinar su centro y el plano diametral conjugado de la recta de ecuaciones $x = 5z - 1$, $y = 2z + 3$.

R.: $(-2, -1, 3)$;
$3x + 6y + 7z - 9 = 0$.

19º Encontrar la ecuación de la cuádrica que pasa por el punto $(1, 2, -1)$, que tiene por centro el punto $(0, 3, 0)$ y como cono asintótico de vértice el centro, el que corta al plano $x + y - z$ según una circunferencia de radio 2 y centro en el origen de coordenadas.

R.: $9x^2 + y^2 - 9z^2 + 2xy - 2yz - 6x - 6y + 6z - 16 = 0$.

* 20º Determinar las secciones circulares y los puntos cíclicos del hiperboloide de dos hojas, demostrando que existen dos sistemas de secciones circulares, paralelas al mayor de los dos ejes imaginarios (no transversos) y cuatro puntos cíclicos.

* 21º Determinar las secciones circulares del paraboloide elíptico demostrando que hay dos sistemas paralelos a la tangente a la parábola principal de mayor parámetro y dos puntos cíclicos en la parábola principal de menor tamaño.

* 22º ¿Cuáles son los puntos cíclicos y las secciones circulares en las cuádricas de revolución?

* 23º Enumerar las cuádricas que carecen de secciones circulares y las que carecen de puntos cíclicos pero tienen secciones circulares.

24º ¿Cuál es el lugar geométrico de los centros de las superficies esféricas tangentes a un plano y que pasan por un punto?

R.: Un paraboloide elíptico.

25º Determinar la ecuación del cono de vértice (a, b, c) que es cortado por el plano $z = 0$, según la parábola $y^2 = 2px$.

R.: $(bz - cy)^2 - 2p(az - cx)(z - c) = 0$.

26º ¿Cuál es el lugar geométrico de los vértices de los conos circunscritos a un elipsoide y que son cortados por un plano dado según circunferencias?

R.: Una elipse y una hipérbola.

* 27º ¿Cuál es el lugar de los vértices de los triedros trirrectángulos circunscritos a un elipsoide?

R.: Una esfera de centro del elipsoide y radio $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

* 28º ¿Cuál es el lugar de los vértices de los triedros trirrectángulos circunscritos a un paraboloide?

R.: Un plano perpendicular al eje.

29º Probar que el lugar de los puntos que equidistan de dos rectas fijas no coplanarias es un paraboloide equilátero.

30º Demostrar que el lugar de los puntos cuya razón de distancias a un punto y a un plano fijo es constante es un elipsoide de revolución alargado, un hiperboloide de revolución de dos hojas o un paraboloide de revolución según que la razón sea menor, mayor o igual a la unidad.

CAPÍTULO IX

SUPERFICIES Y CURVAS EN GENERAL

§ 43. DEFINICIONES Y PROPIEDADES GENERALES

1. **Ecuaciones de una superficie.** — DEFINICIÓN 1. Dado un sistema de coordenadas ortogonales x, y, z, se llama *superficie* al conjunto de puntos del espacio cuyas coordenadas satisfacen a una ecuación de la forma

$$[1] \qquad F(x, y, z) = 0.$$

Para que esta definición concuerde con la idea intuitiva de superficie hay que imponer ciertas restricciones a la función $F(x, y, z)$; nosotros supondremos que admite derivadas parciales F_x, F_y, F_z finitas y continuas.

La ecuación [1] se dice que es la *ecuación en forma implícita* de la superficie.

Si es posible despejar z de manera que resulte función unívoca de x, y, ó sea

$$[2] \qquad z = f(x, y) \quad ,$$

se dice entonces que [2] es la ecuación de la superficie en *forma explícita*.

Nos referiremos casi siempre a la forma implícita [1], puesto que ella contiene como caso particular a la [2] con sólo poner $F \equiv z - f(x, y)$.

Una superficie puede también estar dada por sus *ecuaciones paramétricas*, o sea, por tres funciones de dos parámetros:

$$[3] \qquad x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \quad , \quad z = z(u, v).$$

En este caso los puntos de la superficie se obtienen dando valores arbitrarios a los parámetros u, v; los valores resultantes de x, y, z son las coordenadas de los puntos de la superficie.

Si entre las tres ecuaciones [3] se pueden eliminar los dos parámetros u, v, resultará una ecuación de la forma [1]; es decir, se habrá pasado de las ecuaciones paramétricas a la ecuación implícita de la superficie. Sin embargo, muchas veces la eliminación es dificultosa o imposible y conviene estudiar la superficie en la forma paramétrica.

EJEMPLOS: 1. Los planos $ax + by + cz + d = 0$ y las esferas

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 - \delta^2 = 0 \quad ,$$

son ejemplos simples de superficies. Otros ejemplos son:

$$x + y \operatorname{tg} z = 0 \quad , \quad 2(x^2 + y^2) - e^z - e^{-z} = 0 \quad .$$

la primera llamada *helicoide a plano director* y la segunda *catenoide.*

2. Las ecuaciones

$$x = a \operatorname{sen} u \cos v \quad , \quad y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \quad , \quad z = a \cos u \quad ,$$

son las ecuaciones paramétricas de una superficie. En este caso la eliminación de los parámetros es inmediata, pues basta elevar al cuadrado y sumar, dando $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Es decir, son las ecuaciones paramétricas de una esfera de radio a y centro el origen de coordenadas.

Casos particulares. 1. Si la ecuación [1] no contiene la variable z, es decir, es de la forma $F(x, y) = 0$ y x_0, y_0 es un par de valores que la satisfacen, todos los puntos del espacio, de coordenadas (x_0, y_0, z), cualquiera que sea z, también la satisfacen. Como los puntos (x_0, y_0, z), para todo z, constituyen la recta paralela al eje Z por el punto de coordenadas z_0, y_0 del plano X, Y, resulta que esta recta forma parte de la superficie. Ésta es, por tanto, una *superficie cilíndrica,* de generatrices paralelas al eje Z y cuya sección por el plano X, Y, es la curva $F(x, y) = 0$. En otras palabras, la ecuación $F(x, y) = 0$, *considerada en el plano* X, Y, representa una curva plana, pero *considerada en el espacio,* representa el cilindro cuya sección recta es esta curva.

Análogamente, las ecuaciones $F(x, z) = 0$, $F(y, z) = 0$ representan superficies cilíndricas de generatrices paralelas a los ejes Y, Z respectivamente, cuyas secciones rectas son las curvas de ecuaciones $F(x, z) = 0$ del plano $y = 0$ en el primer caso y $F(y, z) = 0$ del plano $x = 0$ en el segundo.

2. Si en la ecuación [1] faltan dos variables, quedando por ejemplo $F(x) = 0$, esta ecuación representa los planos $x = x_1$, $x = x_2$, ..., donde x_1, x_2, ... son las raíces de la ecuación $F(x) = 0$. En efecto, para estos valores de x y valores cualesquiera de y, z la ecuación $F(x) = 0$ se satisface.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 - 4 = 0$ representa en el espacio el par de planos $x = 2$, $x = -2$.

2. **Ecuaciones de una curva en el espacio.** — DEF. 2. Dado un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, se llama *curva* al conjunto de puntos cuyas coordenadas están dadas por los valores de las tres funciones

$$[4] \qquad x = x(u) \quad , \quad y = y(u) \quad , \quad z = z(u)$$

de un solo parámetro u.

Las ecuaciones [4] se llaman *ecuaciones paramétricas* de la curva.

Para que esta definición general responda a la idea intui-

tiva de curva, haremos la hipótesis de que las tres funciones $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ admiten las primeras derivadas y ellas son finitas y continuas *.

Si la curva está contenida en un plano, se llama *curva plana*. En caso contrario se dice que es una *curva alabeada*.

Si de las dos primeras ecuaciones [4] se puede eliminar u y entre la primera y la tercera también, resultarán dos ecuaciones de la forma

$$[5] \qquad f(x, y) = 0 \quad , \quad g(x, z) = 0 .$$

Según vimos en el número anterior, la primera representa un cilindro de generatrices paralelas al eje Z y la segunda un cilindro de generatrices paralelas al eje Y. La curva es la intersección de estos dos cilindros; las ecuaciones [5] son las de los cilindros proyectantes de la curva paralelamente a los ejes Z e Y respectivamente.

Análogamente, eliminando u entre la segunda ecuación y la tercera, se tendrá una ecuación $h(y, z) = 0$, que será la del cilindro que proyecta la curva paralelamente al eje X.

Una curva también puede darse como intersección de dos superficies, o sea, como el conjunto de puntos, soluciones de un sistema de la forma

$$[6] \qquad F_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad F_2(x, y, z) = 0 .$$

Si este sistema se puede resolver respecto de x, y, dando $x = x(z)$, $y = y(z)$, las ecuaciones

$$x = x(z) \quad , \quad y = y(z) \quad , \quad z = z$$

serán las ecuaciones paramétricas de la curva definida por las ecuaciones [6].

EJEMPLOS: 1. La forma más simple de las ecuaciones [4] es

$$x = a_1 u + b_1 \quad , \quad y = a_2 u + b_2 \quad , \quad z = a_3 u + b_3 \quad ,$$

que son las ecuaciones paramétricas de una recta.

2. Las ecuaciones

$$[6] \qquad x = a \cos u \quad , \quad y = a \operatorname{sen} u \quad , \quad z = ku \quad ,$$

donde a, k, son constantes, representan una curva importante, llamada *hélice circular*. Ella está contenida en el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, que se obtiene eliminando u entre las dos primeras ecuaciones. La proyección sobre el plano y, z es la curva $y = a \operatorname{sen}(z/k)$, o sea, una sinusoide.

3. Las ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \quad , \quad x + y + z - a/2 = 0 \quad ,$$

representan una circunferencia, intersección de la esfera representada por la primera ecuación y del plano representado por la segunda.

* Para un estudio más completo (curvatura, torsión, fórmulas de Frenet, ...) que suele hacerse en los cursos de Cálculo Infinitesimal, hay que suponer la existencia y continuidad de las tres primeras derivadas. Ver J. REY PASTOR, PÍ CALLEJA, TREJO: *Análisis Matemático*, vol. 1.

3. Recta tangente a una curva y plano tangente a una superficie. — Consideremos la curva

$$[7] \qquad x = x(u) \quad , \quad y = y(u) \quad , \quad z = z(u)$$

y los puntos

$$P_0 \left(x_0 = x(u_0),\ y_0 = y(u_0), z_0 = z(u_0) \right)$$

$$\text{y} \quad P \left(x(u_0 + \varepsilon), y(u_0 + \varepsilon), z(u_0 + \varepsilon) \right)$$

de la misma. La recta que une P_0 con P es

$$\frac{x - x_0}{x(u_0 + \varepsilon) - x_0} = \frac{y - y_0}{y(u_0 + \varepsilon) - y_0} = \frac{z - z_0}{z(u_0 + \varepsilon) - z_0}$$

Dividiendo los denominadores por ε, lo cual no altera las ecuaciones, y pasando luego al límite para $\varepsilon \to 0$, resultarán las ecuaciones de la recta de posición límite de las secantes P_0P cuando $P \to P_0$, llamada recta *tangente* a la curva en el punto P_0. Podemos, por tanto, tomar la siguiente definición analítica:

DEF. 3. Se llama *recta tangente* a la curva [7] en el punto P_0 de la misma, a la que tiene por ecuaciones

$$[8] \qquad \frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0} = \frac{z - z_0}{z'_0}.$$

donde los denominadores son derivadas en el punto P_0, o sea, para $u = u_0$.

De aquí: *los cosenos directores de la tangente son proporcionales a las derivadas de las funciones que dan las ecuaciones paramétricas.*

EJEMPLO. La tangente a la hélice [6] en el punto $u = u_0$ tiene por ecuaciones

$$\frac{x - a \cos u_0}{-a \operatorname{sen} u_0} = \frac{y - a \operatorname{sen} u_0}{a \cos u_0} = \frac{z - ku_0}{k}.$$

EJERCICIO. Probar que estas tangentes forman ángulo constante con el eje z y hallar este ángulo. Sol.: $\cos \varphi = k / \sqrt{k^2 + a^2}$.

Sea ahora la superficie $F(x, y, z) = 0$. Los puntos para los cuales no son nulos a la vez las tres derivadas parciales F_x, F_y, F_z se llaman *ordinarios*. Si se anulan estas tres derivadas parciales, el punto se llama *singular*.

Consideremos un punto ordinario $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

DEF. 4. Se llama *plano tangente* a la superficie en el punto P_0, al definido por la ecuación

$$[9] \qquad (x - x_0) F_{x_0} + (y - y_0) F_{y_0} + (z - z_0) F_{z_0} = 0$$

cuyos coeficientes son las derivadas parciales de F tomadas en el punto P_0.

De aquí: *los cosenos directores de la normal al plano tangente (llamada normal a la superficie) en el punto* P_0, *son proporcionales a las derivadas parciales de* F *en* P_0.

Por tanto, la condición necesaria y suficiente para que una recta cuyos cosenos directores sean proporcionales a α, β, γ, esté contenida, o sea paralela al plano tangente en el punto P_0, es que se cumpla la ecuación

$$\alpha F_{x_0} + \beta F_{y_0} + \gamma F_{z_0} = 0. \tag{10}$$

Si $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = z(u)$ es una curva contenida en la superficie F, quiere decir que $F(x(u), y(u), z(u)) = 0$ se satisface para todo valor de u, o sea, es una identidad. En consecuencia, derivando respecto de u, será también

$$F_x x' + F_y y' + F_z z' = 0.$$

En particular, si la curva pasa por el punto P_0, esta relación se cumple para $u = u_0$ y por consiguiente la recta [8] está contenida en el plano [9]. Es decir: *el plano tangente a una superficie en un punto ordinario, contiene las tangentes a todas las curvas de la superficie que pasan por él.*

Aprovechando esta propiedad se puede hallar la ecuación del plano tangente en el caso en que la superficie esté dada por sus ecuaciones paramétricas [3]. En efecto, en este caso la tangente a la curva obtenida haciendo variar el parámetro u y manteniendo constante v, tiene, según [8], los cosenos directores proporcionales a las derivadas parciales x_u, y_u, z_u. Análogamente, la tangente a la curva de la superficie obtenida haciendo variar v y manteniendo u constante, tiene los cosenos directores proporcionales a x_v, y_v, z_v. Por tanto, la normal al plano que estas dos tangentes determinan, tendrá los cosenos directores proporcionales a las diferencias

$$z_u y_v - y_u z_v \quad , \quad z_u x_v - x_u z_v \quad , \quad x_u y_v - y_u x_v \quad ,$$

o sea:

La ecuación del plano tangente a la superficie definida por las ecuaciones paramétricas [3] *en el punto* $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_{u_0} & y_{u_0} & z_{u_0} \\ x_{v_0} & y_{v_0} & z_{v_0} \end{vmatrix} = 0.$$

Si una curva está definida por las ecuaciones [6], como intersección de dos superficies, la tangente a la misma en un punto resulta como intersección de los planos tangentes a las superficies en dicho punto.

EJEMPLOS: 1. El plano tangente a la esfera $x^2+y^2+z^2-a^2=0$ en el punto x_0, y_0, z_0, es

$$(x-x_0)x_0+(y-y_0)y_0+(z-z_0)z_0=0 \quad ,$$

puesto que $F_x=2x$, $F_y=2y$, $F_z=2z$. La ecuación anterior puede escribirse $xx_0+yy_0+zz_0-a^2=0$.

2. El plano tangente a la superficie

$$x=uv \quad , \quad y=u+v \quad , \quad z=\operatorname{sen} u+\cos v$$

en el punto x_0, y_0, z_0 correspondiente a los valores $u=u_0$, $v=v_0$ de los parámetros es

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ v_0 & 1 & \cos u_0 \\ u_0 & 1 & -\operatorname{sen} v_0 \end{vmatrix}=0.$$

4. **La hélice circular.** — Una de las curvas alabeadas más importantes es la *hélice circular*.

Consideremos un cilindro de revolución cuyo eje sea el eje z y cuyo radio sea a (fig. 155). Llamaremos u al ángulo de giro sobre el plano X, Y a partir del eje X. La hélice se define por la propiedad de que la altura PM de sus puntos es proporcional al ángulo $u=\text{AOM}$. Es decir, si P es un punto de la hélice y M su proyección sobre el plano de la base, las coordenadas x, y de P serán las mismas de M, o sea $x=a\cos u$, $y=a\operatorname{sen} u$, y la coordenada z debe ser, por definición, $z=ku$. Es decir, las ecuaciones de la hélice son

$$x=a\cos u \quad , \quad y=a\operatorname{sen} u \quad , \quad z=ku.$$

Cuando u aumenta en 2π, según estas ecuaciones, x, y no varían, pero en cambio z aumenta en la magnitud

$$p=k(2\pi+u)-ku=2\pi k$$

que no depende de u y que se llama *paso* de la hélice. En la figura 155 el caso es el segmento PP′.

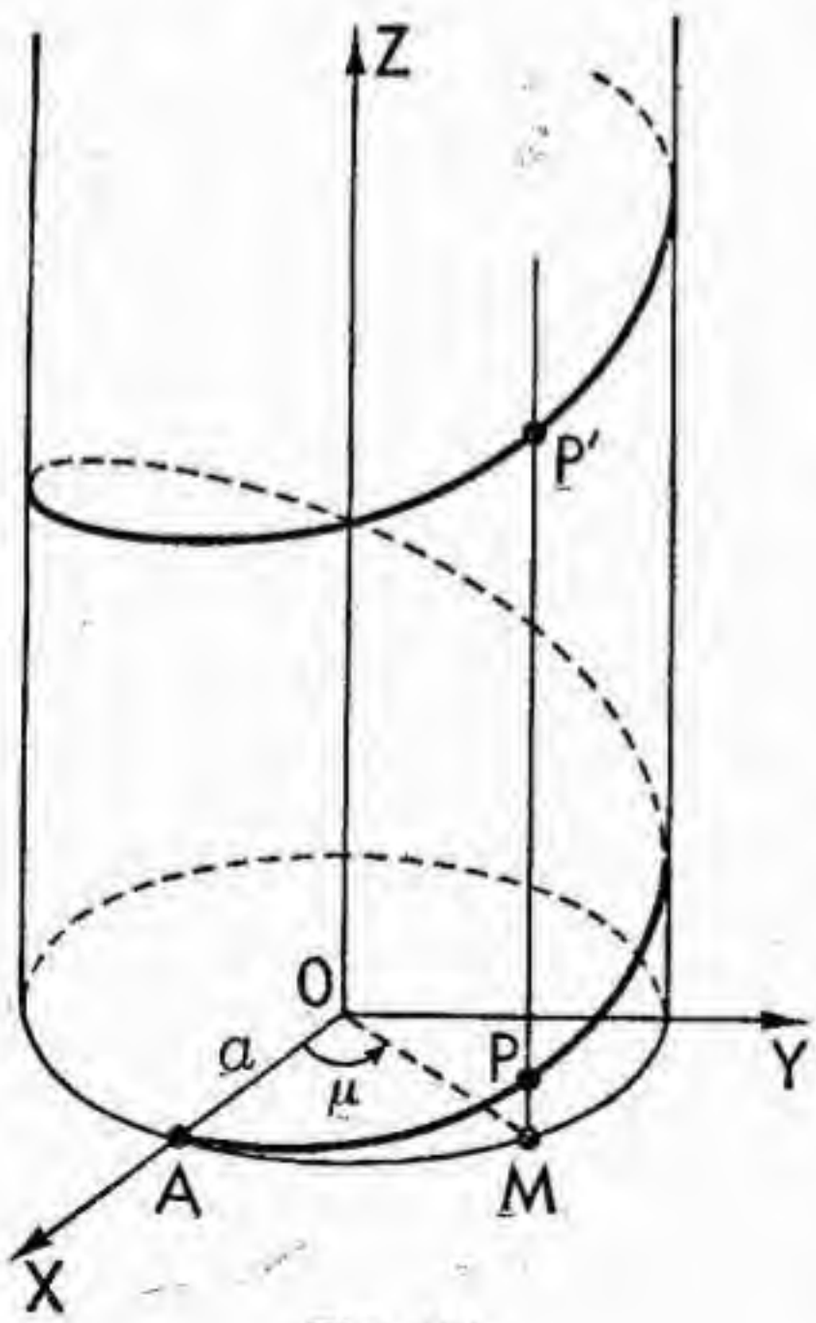

Fig. 155.

Si se supone que el cilindro se corta por la generatriz que pasa por A y se desarrolla sobre un plano, la hélice se transformará en una curva plana cuya ordenada z es proporcional a la abscisa, puesto que ésta, en el desarrollo, es el arco $\text{AM}=au$. Por tanto, se trata de una recta. Como en la operación de desarrollar el cilindro sobre el plano no se modifican las longitudes de las curvas y la recta es la mínima distancia en el plano, resulta: *sobre un cilin-*

dro de revolución, las curvas de longitud mínima entre sus puntos son los arcos de hélice.

Como el desarrollo tampoco modifica los ángulos y la recta en la que se transforma la hélice corta a todas las paralelas al eje z (transformadas de las generatrices del cilindro) bajo el mismo ángulo, resulta también que la hélice corta a las generatrices del cilindro bajo el mismo ángulo. En otras palabras: *en todo punto, la tangente a la hélice forma con el eje del cilindro el mismo ángulo.* Este ángulo es fácil de determinar observando que en el desarrollo, PM es la ordenada y el arco AM la abscisa; por tanto, el ángulo de la tangente a la hélice con el eje del cilindro está dado por $\operatorname{tg}\varphi = a/k$, resultado también fácil de obtener directamente por el cálculo (ver el ejercicio del nº 3).

Es interesante ver las curvas que se obtienen al proyectar la hélice sobre el plano de la base según una dirección oblicua dada. Siempre se puede suponer, girando si es necesario, el sistema de ejes alrededor del eje z, que la dirección de proyección es paralela al plano Y, Z. Los cosenos directores de esta dirección serán entonces de la forma $(0, \operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha)$ siendo α el ángulo de la dirección de proyección con el eje Z. La recta paralela a esta dirección por el punto P de la hélice tendrá por ecuaciones

$$x = a\cos u \quad , \quad \frac{y - a\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{z - ku}{\cos\alpha}$$

y por tanto su intersección con el plano $z = 0$ será la curva

$$x = a\cos u \quad , \quad y = -k\operatorname{tg}\alpha \,.\, u + a\operatorname{sen} u.$$

Para comparar esta curva con los diversos tipos de cicloide considedos en § 25, nº 6, basta hacer el cambio de ejes

$$x = -y' + k\operatorname{tg}\alpha \quad , \quad y = -x'$$

resultando la curva

$$x' = k\operatorname{tg}\alpha \,.\, u - a\operatorname{sen} u \quad , \quad y' = k\operatorname{tg}\alpha - a\cos u.$$

Según § 25, nº 6, esta curva es una *cicloide*, que será *ordinaria* si $k\operatorname{tg}\alpha = a$, *corta* si $k\operatorname{tg}\alpha < a$ y *larga* si $k\operatorname{tg}\alpha > a$. Recordando que si φ representa el ángulo de la tangente a la hélice con el eje Z, hemos visto que era $\operatorname{tg}\varphi = a/k$; estos tres casos equivalen respectivamente a $\varphi = \alpha$, $\varphi > \alpha$, $\varphi < \alpha$.

5. **Superficies algebraicas.** — DEF. 5. Se llama *superficie algebraica* al conjunto de puntos (reales o imaginarios) cuyas coordenadas satisfacen a una ecuación de la forma

$$[11] \qquad F(x, y, z) = 0$$

donde F es un polinomio en las tres variables x, y, z.

El grado de este polinomio se llama *grado* de la superficie. Las superficies de primer grado son los planos; las de segundo grado las cuádricas; las de tercer grado se llaman superficies cúbicas; las de cuarto grado, cuárticas; etc.

Las superficies que no son algebraicas se llaman *trascen-*

dentes. Por ejemplo, la superficie $x - y \operatorname{tg} z = 0$ es trascendente.

Si el polinomio F es irreducible, o sea, no es igual al producto de otros dos de menor grado, la superficie se dice también *irreducible.* En caso contrario, si por ejemplo $F = F_1 . F_2$, la superficie es *reducible,* pues se compone de las dos superficies $F_1 = 0$, $F_2 = 0$.

Para hallar las intersecciones de una superficie algebraica con una recta

$$[12] \qquad x = az + b \quad , \quad y = pz + q$$

basta resolver la ecuación en z,

$$[13] \qquad F(az + b,\ pz + q, z) = 0$$

que se obtiene sustituyendo en [11] los valores [12]. Resolviendo esta ecuación respecto de z, para cada raíz $z = z_i$, las ecuaciones [12] nos darán las restantes coordenadas x_i, y_i, del punto de intersección.

Si F es de grado n, la ecuación [13] o bien es una identidad, en cuyo caso la recta está contenida en la superficie, o bien es de grado igual o menor que n. Si es menor, por ejemplo resulta de grado $r < n$, se dice que la recta y la superficie tienen $n - r$ puntos comunes en el infinito, lo cual se justifica pasando a coordenadas homogéneas. Con este convenio se puede enunciar:

Una superficie de grado n *es cortada por toda recta no contenida en ella en n puntos (distintos o confundidos, reales o imaginarios, propios o impropios).*

Análogamente, se tiene: *al cortar una superficie algebraica por un plano, la curva sección es una curva algebraica del mismo grado que la superficie.*

En efecto, por un cambio de ejes coordenados podemos suponer que el plano es el $z = 0$. Con esto no se cambia el grado de la superficie, puesto que por una sustitución lineal entre las variables no cambia el grado de un polinomio. La intersección es entonces la curva plana $F(x, y, 0) = 0$, que es algebraica y es de grado igual o menor que n. Como siempre, si resulta menor, por ejemplo de grado $r < n$, se conviene en que a la intersección debe añadírsele la recta del infinito contada r veces, convenio que justifica el uso de las coordenadas homogéneas. Con ello, el enunciado anterior es siempre correcto.

EJEMPLOS: 1. Consideremos la intersección de la recta $x = 0$, $y = 0$ con la superficie $x^2 + y^2 - z + 1 = 0$. La ecuación [13] resulta en este caso $z - 1 = 0$ y por tanto se tiene el punto de intersección (0, 0, 1). Como la superficie es de grado dos, debe haber otra intersección impropia. En efecto, usando coordenadas homogéneas, el sistema es

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \qquad x^2 + y^2 - zt + t^2 = 0$$

y como ecuación [13] resulta $t(z-t)=0$, que tiene las soluciones $t=0$, $z-t=0$, resultando los dos puntos de intersección $(0, 0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1, 1)$, el primero impropio y el segundo el mismo encontrado antes.

2. Consideremos la intersección del plano $z=0$ con la superficie $z^2+x-y-1=0$. Resulta la recta $x-y-1=0$, pero como la superficie es de grado dos, debemos añadirle la recta impropia. En coordenadas homogéneas el hecho se justifica, puesto que el sistema se escribe entonces

$$z=0 \quad , \quad z^2+xt-yt-t^2=0 \quad ,$$

y la intersección resulta $(x-y-t)t=0$, que consiste en la recta de antes $x-y-t=0$, más la recta impropia $t=0$.

Número de puntos que determinan una superficie algebraica. Empecemos por calcular el número de términos de un polinomio completo de grado n en tres variables x, y, z.

Para $n=1$, es

$$F_1 \equiv a_0+b_1x+b_2y+b_3z$$

o sea, el polinomio tiene $N_1=4$ términos.

Para $n=2$, es

$$F_2 \equiv a_0+b_1x+b_2y+b_3z+c_1x^2+c_2xy+c_3xz+ \\ +c_4y^2+c_5yz+c_6z^2$$

o sea, el polinomio tiene $N_2=10$ términos.

Vamos a demostrar que, en general, para el grado n es

$$[14] \qquad N_n=\binom{n+3}{n}=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.$$

Procedemos por inducción. La fórmula vale para $n=1$, $n=2$; suponiendo que sea cierta para $n-1$, bastará demostrar que también lo es para n.

Para pasar del polinomio general de grado $n-1$ al de grado n, hay que añadirle un polinomio completo homogéneo de grado n en las tres variables x, y, z; un polinomio homogéneo en tres variables es lo mismo (haciendo $z=1$) que un polinomio no homogéneo en las dos variables x, y del mismo grado y, según vimos para las curvas planas (§ 26, nº 4), un tal polinomio de grado n consta de $(n+1)(n+2)/2$ términos. Por tanto, suponiendo [14] válido para $n-1$), debe ser

$$N_n=\binom{n+2}{n-1}+\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\binom{n+3}{3}$$

lo cual demuestra el enunciado.

Si el polinomio $F(x, y, z)$ de grado n tiene N_n términos y por tanto N_n coeficientes, dividiendo por uno de ellos, resulta que la ecuación general $F(x, y, z)=0$ tiene N_n-1 coeficientes esenciales. Imponer la condición de que la superficie F pase por un punto dado (x_1, y_1, z_1) equivale a escribir $F(x_1, y_1, z_1)=0$, lo cual da una ecuación lineal entre los coeficientes de F.

Para poder determinar todos los coeficientes harán falta $N_n - 1$ ecuaciones de este tipo. Por tanto:

Una superficie algebraica de grado n *queda determinada por*

$$[15] \qquad N_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - 1$$

puntos independientes.

Decir que los puntos deben ser independientes significa que las ecuaciones lineales mencionadas deben ser independientes. Por ejemplo, un plano ($n = 1$) está determinado por 3 puntos, siempre que ellos "no estén en línea recta"; en este caso, esta última es la condición de independencia.

Según [15]: una cuádrica ($n = 2$) está determinada por 9 puntos; una superficie cúbica ($n = 3$) por 19 puntos; una superficie de cuarto grado ($n = 4$) por 34 puntos, etc.

6. Curvas algebraicas. — DEF. 6. Se llaman *curvas algebraicas* aquellas cuyos puntos están dados como intersección completa de un número finito de superficies algebraicas.

Grado de una curva algebraica es el número de puntos en que es cortada por un plano del espacio que no contiene la curva. Contando cada punto con la multiplicidad conveniente y teniendo en cuenta los puntos imaginarios y los impropios, este número es independiente del plano considerado. En efecto, los puntos comunes se obtienen como solución del sistema de ecuaciones algebraicas formado por las ecuaciones de las superficies que definen la curva, más la ecuación del plano, y el número de soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicas no depende de las ecuaciones particulares, sino únicamente del grado de las mismas.

Análogamente, el número de puntos de intersección de una curva algebraica de grado n con una superficie algebraica de grado m tampoco puede depender de la forma particular de la ecuación de esta última. En particular, considerándola formada por el conjunto de m planos (o sea, su ecuación igual al producto de m formas lineales), resulta que *el número de puntos de intersección de una curva algebraica de grado n con una superficie algebraica de grado m es igual a nm.*

Se tiene también la siguiente propiedad:

Si una curva algebraica es la intersección de dos superficies algebraicas, su grado es el producto de los grados de ambas superficies. En efecto, al cortar por un plano, las curvas secciones de las superficies serán curvas planas de grados iguales a los de la superficie respectiva; según el teorema de BEZOUT para curvas planas, éstas se cortarán en un número de puntos igual al producto de los grados, y estos puntos son precisamente los de intersección del plano con la curva.

Por ejemplo, la intersección de dos cuádricas es una curva de cuarto grado; la intersección de una cúbica con una cuádrica es de sexto grado, etcétera.

Es interesante observar que no siempre es posible definir las curvas algebraicas del espacio como intersección de sólo *dos* superficies algebraicas. Por ejemplo, la cúbica alabeada

$$x = t \quad , \quad y = t^2 \quad , \quad z = t^3 \quad ,$$

no puede obtenerse como intersección completa de dos superficies, puesto que si así fuera, debería ser la intersección de una superficie cúbica ($n = 3$) con un plano ($n = 1$), única manera de que el producto de los

grados sea 3, y sería una curva plana, lo cual no es cierto. En este caso la cúbica aparece como *una parte* de la intersección de ciertas cuádricas, la cual se descompone en la cúbica más una recta. Si queremos únicamente la cúbica, se debe considerar una tercera cuádrica que pase por ella y no contenga la recta; entonces, la cúbica aparece como intersección completa de las tres cuádricas.

Se puede demostrar que bastan siempre, a lo más, cuatro superficies para definir, por su intersección completa, cualquier curva algebraica.

Otra propiedad inmediata es que *los conos que proyectan una curva algebraica de grado n, desde un punto no perteneciente a ella, son superficies algebraicas de grado n.* En efecto, que son algebraicas, se deduce inmediatamente de la manera de obtener su ecuación, que no utiliza más que operaciones algebraicas de eliminación (como veremos en el parágrafo siguiente). En cuanto al grado, basta cortar por una recta y considerar el plano determinado por ella y el vértice del cono; resulta que a cada punto de intersección de la recta con el cono corresponde una generatriz y por tanto un punto en que dicho plano corta a la curva. En consecuencia, ambos números son iguales y los grados también.

§ 44. SUPERFICIES CILÍNDRICAS Y CÓNICAS

1. **Superficies cilíndricas.** — DEFINICIÓN 1. Se llama *superficie cilíndrica* a la formada por rectas paralelas a una dirección dada, llamadas *generatrices,* que se apoyan en una curva también dada, llamada *directriz.*

En lugar de "superficie cilíndrica" se usa también la denominación abreviada de *cilindro.*

Para determinar una superficie cilíndrica hay que dar los cosenos directores de la dirección de las generatrices y la curva directriz. Si ésta es, por ejemplo, la curva

$$[1] \qquad x = x(u) \quad , \quad y = y(u) \quad , \quad z = z(u)$$

y los cosenos directores de las generatrices son proporcionales a α, β, γ, las ecuaciones paramétricas de la generatriz que pasa por el punto $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ serán

$$[2] \qquad x = x(u) + \lambda\alpha \quad , \quad y = y(u) + \lambda\beta \quad , \quad z = z(u) + \lambda\gamma$$

donde λ es un parámetro variable. Si también se hace variar u, o sea, el punto sobre la directriz, las ecuaciones [2] dependerán de dos parámetros u, λ y serán *las ecuaciones paramétricas de la superficie cilíndrica buscada.*

La eliminación de λ y u en las tres ecuaciones [2] permite obtener la ecuación $F(x, y, z) = 0$ de la superficie cilíndrica en forma implícita.

Si la directriz está dada por la intersección de dos superficies

$$[3] \qquad F_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad F_2(x, y, z) = 0$$

considerando un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de ella, o sea un punto tal que

[4] $$F_1(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad , \quad F_2(x_0, y_0, z_0) = 0$$

y la recta que pasa por él y tiene la dirección de cosenos directores proporcionales a α, β, γ, o sea,

[5] $$x = x_0 + \lambda\alpha \quad , \quad y = y_0 + \lambda\beta \quad , \quad z = z_0 + \lambda\gamma \quad ,$$

tendremos cinco ecuaciones. Eliminando entre ellas los cuatro parámetros x_0, y_0, z_0 λ resultará una ecuación de la forma $F(x, y, z) = 0$ que será la del cilindro buscado.

Para eliminar λ, u en el sistema [2] se puede empezar por eliminar λ, por ejemplo, despejando este parámetro en la última ecuación y sustituyendo en las dos primeras (suponiendo $\gamma \neq 0$), resulta

[6] $$\begin{aligned} \gamma x - \alpha z &= \gamma x(u) - \alpha z(u) \\ \gamma y - \beta z &= \gamma y(u) - \beta z(u). \end{aligned}$$

Debe ahora eliminarse u entre estas dos ecuaciones. Como las variables x, y, z sólo intervienen en las combinaciones $\gamma x - \alpha z$, $\gamma y - \beta z$, resulta, que el resultado de la eliminación debe ser de la forma

[7] $$F(\gamma x - \alpha z, \ \gamma y - \beta z) = 0.$$

En el caso del sistema [4], [5], sustituyendo en [4] los valores de x_0, y_0, z_0 deducidos de [5], queda

[8] $$\begin{aligned} F_1(x - \lambda\alpha, \ y - \lambda\beta, \ z - \lambda\gamma) &= 0 \quad , \\ F_2(x - \lambda\alpha, \ y - \lambda\beta, \ z - \lambda\gamma) &= 0 \end{aligned}$$

con lo cual, el problema se reduce a eliminar λ entre estas dos ecuaciones.

También se puede eliminar primero λ en el sistema [5] quedando, análogamente a [6] (suponiendo también $\gamma \neq 0$)

$$\gamma x - \alpha z = \gamma x_0 - \alpha z_0 \quad , \quad \gamma y - \beta z = \gamma y_0 - \beta z_0$$

y entonces, al eliminar x_0, y_0, z_0, entre estas ecuaciones y las [4] se observa que x, y, z sólo aparecen en las mismas combinaciones $\gamma x - \alpha z$, $\gamma y - \beta z$ de antes, debiendo por tanto resultar una ecuación del mismo tipo [7]. En ambos casos resulta, por tanto:

La ecuación de una superficie cilíndrica de generatrices no perpendiculares al eje Z *(o sea* $\gamma \neq 0$*), es siempre de la forma*

[9] $$F(\gamma x - \alpha z, \ \gamma y - \beta z) = 0$$

donde α, β, γ *son constantes, proporcionales a los cosenos directores de las generatrices.*

Recíprocamente, toda superficie cuya ecuación sea de la forma [9], es una superficie cilíndrica. En efecto, si x_0, y_0, z_0 es un punto de la superficie, o sea $F(\gamma x_0 - \alpha z_0, \ \gamma y_0 - \beta z_0) = 0$, todo punto de la recta $x = x_0 + \lambda\alpha$, $y = y_0 + \lambda\beta$, $z = z_0 + \lambda\gamma$ paralela a la dirección α, β, γ satisface también a la ecuación [9],

o sea, la recta pertenece a la superficie, lo que prueba que ésta es un cilindro.

Hemos excluído el caso $\gamma = 0$. Si este caso se presenta, basta permutar el papel de los ejes para que resulte una ecuación análoga a la [9] con los papeles de x, y, z cambiados.

EJEMPLOS: 1. Hallar la ecuación del cilindro que proyecta la cúbica $x = u$, $y = u^2$, $z = u^3$ en la dirección de la recta $x = z - 1$, $y = z + 3$.

Los cosenos directores de la recta son proporcionales a 1, 1, 1 y por tanto las ecuaciones paramétricas de la superficie buscada son

$$x = u + \lambda \quad , \quad y = u^2 + \lambda \quad , \quad z = u^3 + \lambda .$$

Si se quiere la ecuación implícita, se tiene

$$[10] \qquad x - y = u - u^2 \quad , \quad y - z = u^2 - u^3 \quad ,$$

de donde $u = (y - z)/(x - y)$. Sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones [10] y quitando denominadores, resulta

$$(x - y)^3 - (y - z)(x - y) - (y - z)^2 = 0 .$$

2. Hallar la ecuación del cilindro que tiene por directriz la circunferencia definida por

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \quad , \quad x + y + z - b = 0$$

y las generatrices son paralelas a la recta $x = 2z + 3$, $y = -z$.

Los cosenos directores de las generatrices son proporcionales a 2, —1, 1. Por tanto, como sistema [4], [5] tenemos

$$x^2_0 + y^2_0 + z^2_0 - a^2 = 0 \quad , \quad x_0 + y_0 + z_0 - b = 0 \quad ,$$
$$x = x_0 + 2\lambda \quad , \quad y = y_0 - \lambda \quad , \quad z = z_0 + \lambda \quad ,$$

o bien, sustituyendo en las dos primeras los valores de x_0, y_0, z_0 deducidos de las demás,

$$(x - 2\lambda)^2 + (y + \lambda)^2 + (z - \lambda)^2 - a^2 = 0 \quad .$$
$$x + y + z - 2\lambda - b = 0 .$$

Despejando λ en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera se obtendrá la ecuación de la superficie buscada, a saber,

$$(y + z - b)^2 + \tfrac{1}{4}(x + 3y + z - b)^2 + \tfrac{1}{4}(z - x - y + b)^2 - a^2 = 0 .$$

Obsérvese que siempre que la directriz sea una curva plana este método permite la eliminación simple de λ y por tanto da fácilmente la ecuación de la superficie en forma implícita. Si la directriz no es plana, la eliminación no es siempre posible, y aún en muchos casos que lo es (cuando la directriz es una curva algebraica, por ejemplo), puede conducir a cálculos engorrosos.

EJERCICIOS: 1. Hallar la ecuación del cilindro cuya directriz es la cónica $2x^2 - y^2 - 1 = 0$ del plano $z = 0$ y cuyas generatrices son paralelas a la recta $x - 1 = y + 2 = z$.

2. Hallar la ecuación del cilindro cuya directriz es la parábola $y - z^2 = 0$ del plano $x = 0$ y cuyas generatrices son perpendiculares al plano $2x - y + 3z - 1 = 0$.

3. Por ser de la forma [9], la ecuación $(2x - z)^2 + (2y + z)^2 - (2x - z) + 3 = 0$ representa un cilindro. Hallar su intersección con el plano $z = 0$ y los cosenos directores de las generatrices.

4. Hallar el lugar geométrico de los puntos equidistantes de la recta $x = z - 1$, $y = 2z + 3$ y del plano $x + 2y + z = 0$.

2. **Cilindro circunscrito a una superficie.** — En lugar de dar la directriz, se puede pedir el cilindro cuyas generatrices tienen una dirección dada y, además, son tangentes a una superficie también dada.

Sea $\Phi(x, y, z) = 0$ la superficie. Queremos el cilindro circunscrito a la misma cuyas generatrices tengan los cosenos directores proporcionales a α, β, γ. Si $P(x, y, z)$ es un punto general de contacto del cilindro con la superficie, la generatriz que pasa por él debe estar contenida en el plano tangente a la superficie y por tanto, según § 43, [10], debe cumplirse

$$[11] \qquad \alpha\Phi_x + \beta\Phi_y + \gamma\Phi_z = 0.$$

Esta ecuación, junto con la de la superficie

$$[12] \qquad \Phi(x, y, z) = 0 \quad ,$$

determina los puntos de la misma cuyo plano tangente es paralelo a la dirección dada, o sea, la curva de contacto del cilindro circunscrito. Conocida esta curva, que será la directriz del cilindro buscado, el problema queda reducido al estudiado en el número anterior. Es decir, debe aplicarse lo que allí se expuso, teniendo en cuenta que las ecuaciones [3] son ahora las [11] y [12].

EJEMPLO. Hallar la ecuación del cilindro circunscrito al elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0$ según la dirección de la recta $x = 2$, $y = 2z + 1$.

Los cosenos directores de la recta son proporcionales a 0, 2, 1. Por tanto, el sistema [11], [12] es, en este caso,

$$8y + 6z = 0 \quad , \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1 = 0 \quad ,$$

quedando el problema reducido a hallar el cilindro que pasa por la curva definida por estas dos ecuaciones y tiene la dirección (0, 2, 1). Procediendo como al final del número anterior, resulta fácilmente

$$121x^2 + 66y^2 + 264z^2 - 264z - 121 = 0.$$

3. **Superficies cónicas.** — DEF. 2. Superficies cónicas son las formadas por las rectas (llamadas *generatrices*) que pasan por un punto fijo (llamado *vértice*) y se apoyan en una curva dada llamada *directriz*.

En vez de superficie cónica, a veces se utiliza la denominación abreviada de *cono*.

Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ el vértice y $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = z(u)$ la curva directriz. La ecuación de una recta que pasa por P_0 y por un punto de la curva será

$$[13] \qquad \frac{x - x_0}{x(u) - x_0} = \frac{y - y_0}{y(u) - y_0} = \frac{z - z_0}{z(u) - z_0}.$$

Cada valor de u individualiza una de estas rectas, o sea, una generatriz del cono. Si queremos la ecuación conjunta de todas ellas, bastará eliminar el parámetro u entre las dos ecua-

ciones contenidas en [13]. Observemos que estas ecuaciones pueden escribirse

$$[14] \qquad \frac{x - x_0}{z - z_0} = \frac{x(u) - x_0}{z(u) - z_0}, \quad \frac{y - y_0}{z - z_0} = \frac{y(u) - y_0}{z(u) - z_0}$$

y puesto que las variables x, y, z sólo aparecen según las combinaciones de los primeros miembros, éstas se conservarán en las operaciones de eliminación, resultando como ecuación del cono una de la forma

$$[15] \qquad F\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0.$$

Si la curva viene dada como intersección de dos superficies, o sea, por las ecuaciones

$$[16] \qquad F_1(x, y, z) = 0 \quad , \quad F_2(x, y, z) = 0$$

tomando un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ de esta intersección, o sea un punto tal que

$$[17] \qquad F_1(x_1, y_1, z_1) = 0 \quad , \quad F_2(x_1, y_1, z_1) = 0$$

la generatriz correspondiente del cono será

$$[18] \qquad \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

que es la recta que une P_1 con el vértice P_0. Al variar x_1, y_1 z_1, cumpliéndose siempre [17], esta recta describirá el cono. Por tanto, para obtener la ecuación del mismo bastará eliminar x_1, y_1, z_1 entre las cuatro ecuaciones [17] y [18].

Observemos que ahora también las ecuaciones [18] pueden escribirse

$$[19] \qquad \frac{x - x_0}{z - z_0} = \frac{x_1 - x_0}{z_1 - z_0}, \quad \frac{y - y_0}{z - z_0} = \frac{y_1 - y_0}{z_1 - z_0}$$

y por tanto, igual que antes, en las operaciones para eliminar x_1, y_1, z_1 los primeros miembros de estas ecuaciones mantienen su expresión, y el resultado será también de la forma [15].

En resumen:

La ecuación de un cono de vértice $P_0(x_0, y_0, z_0)$ *es siempre de la forma* [15].

Recíprocamente, toda ecuación de la forma [15] representa un cono de vértice P_0. En efecto, si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ es un punto de la superficie, será

$$F\left(\frac{x_1 - x_0}{z_1 - z_0}, \frac{y_1 - y_0}{z_1 - z_0}\right) = 0$$

y las coordenadas de cualquier otro punto de la recta P_0P_1, siendo de la forma $x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0)$, $y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0)$,

$z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0)$, también satisfarán a la ecuación [15], o sea, el punto pertenecerá a la superficie. Esto quiere decir que las rectas que unen P_0 con cualquier otro punto de la superficie pertenecen íntegramente a ella; por tanto la superficie es un cono.

En particular, si P_0 es el origen de coordenadas, la ecuación [15] queda $F(x/z, y/z) = 0$. Esta ecuación no cambia al multiplicar x, y, z por un mismo número. Por tanto: *las ecuaciones de los conos de vértice el origen de coordenadas, son ecuaciones homogéneas en las tres variables x, y, z.*

Una manera de llevar a cabo la eliminación de x_1, y_1, z_1 entre las ecuaciones [17], [18], consiste en poner las razones [18] iguales a un parámetro $1/\varrho$ y despejar

$$x_1 = \varrho(x - x_0) + x_0, \quad y_1 = \varrho(y - y_0) + y_0, \quad z_0 = \varrho(z - z_0) + z_0$$

con lo cual, sustituyendo estos valores en [17], resulta que la ecuación de la superficie cónica se obtendrá al eliminar ϱ entre las ecuaciones

$$[20] \quad \begin{aligned} &F_1\big(\varrho(x - x_0) + x_0,\ \varrho(y - y_0) + y_0,\ \varrho(z - z_0) + z_0\big) = 0 \\ &F_2\big(\varrho(x - x_0) + x_0,\ \varrho(y - y_0) + y_0,\ \varrho(z - z_0) + z_0\big) = 0. \end{aligned}$$

EJEMPLOS: 1. Hallar la ecuación del cono de vértice el punto (1, 2, —1) y directriz la curva $x^3 - y + 1 = 0$, del plano $z = 0$.

En este caso, las ecuaciones [17], [19] son

$$x_1^3 - y_1 + 1 = 0 \quad , \quad z_1 = 0 \quad ,$$

$$\frac{x-1}{z+1} = \frac{x_1 - 1}{z_1 + 1} \quad , \quad \frac{y-2}{z+1} = \frac{y_1 - 2}{z_1 + 1} \quad ,$$

entre las cuales se deben eliminar x_1, y_1, z_1. Siendo $z_1 = 0$, las últimas ecuaciones dan $x_1 = (x-1)/(z+1) + 1$, $y_1 = (y-2)/(z+1) + 2$, valores que sustituídos en la primera darán la ecuación buscada:

$$(x + z)^3 - (y + 2z)(z + 1)^2 + (z + 1)^3 = 0.$$

2. Hallar la ecuación del cono de vértice (0, 0, 2) y directriz la circunferencia $x^2 + y^2 - 1 = 0$ del plano $z = 0$.

Procediendo igual que en el caso anterior, resulta

$$4(x^2 + y^2) - (z - 2)^2 = 0.$$

3. Hallar la ecuación del cono de vértice (2, 1, 4) y directriz la curva intersección del plano $x + y - z = 0$ con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$.

En este caso las ecuaciones [20] son:

$$\varrho(x - 2) + 2 + \varrho(y - 1) + 1 - \varrho(z - 4) - 4 = 0$$
$$[\varrho(x - 2) + 2]^2 + [\varrho(y - 1) + 1]^2 + [\varrho(z - 4) + 4]^2 - 4 = 0.$$

Despejando ϱ en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda resulta, después de quitar denominadores

$$(3x + 2y - 2z)^2 + (x + 2y - z)^2 + \\ + (4x + 4y - 3z)^2 - 4(x + y - z + 1)^2 = 0 \quad ,$$

que es la ecuación buscada.

4. **Cono circunscrito a una superficie.** — Supongamos que en vez de dar la curva directriz se da una superficie

$$\Phi(x, y, z) = 0 \tag{21}$$

y se pide la ecuación del cono de vértice P_0 circunscrito a la superficie, o sea, el cono cuyas generatrices son tangentes a la misma.

Si $P(x, y, z)$ es un punto de contacto del cono con la superficie, el plano tangente en él debe contener la recta P_0P, cuyos cosenos directores son proporcionales a $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. Por tanto, según § 43, [10], debe cumplirse

$$(x - x_0)\Phi_x + (y - y_0)\Phi_y + (z - z_0)\Phi_z = 0. \tag{22}$$

Como, además, se cumple [21] por pertenecer P a Φ, resulta que las ecuaciones [21], [22] son las que determinan la curva de contacto del cono buscado.

El problema se resuelve entonces como en el caso del número anterior, donde en lugar de las ecuaciones [16] se tienen ahora las [21], [22].

EJEMPLO. Hallar la ecuación del cono circunscrito al elipsoide $2x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ cuyo vértice es el punto (0, 4, 0).

Las ecuaciones [21] y [22] son, en este caso,

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad , \quad 4x^2 + 2(y - 4)y + 2z^2 = 0 \quad ,$$

y la segunda, teniendo en cuenta la primera, se reduce a $4y - 1 = 0$. Por tanto, el sistema [20] se escribe

$$2[\varrho x]^2 + [\varrho(y - 4) + 4]^2 + [\varrho z]^2 - 1 = 0$$
$$4[\varrho(y - 4) + 4] - 1 = 0.$$

Despejando ϱ de la segunda ecuación y sustituyendo en la primera se obtiene la ecuación buscada:

$$30x^2 + 15z^2 - (y - 4)^2 = 0.$$

5. **Superficies desarrollables.** — DEF. 3. Se llaman superficies desarrollables, el plano, los cilindros, los conos y las superficies formadas por las tangentes a una curva alabeada.

Ya hemos estudiado los cilindros y los conos. Falta estudiar el caso general. En este caso, para definir la superficie, hay que dar la curva, a la cual son tangentes todas las generatrices, llamada *arista de retroceso* de la superficie. Si esta curva es

$$x = x(u) \quad , \quad y = y(u) \quad , \quad z = z(u) \tag{23}$$

la ecuación de una tangente es

$$\frac{x - x(u)}{x'(u)} = \frac{y - y(u)}{y'(u)} = \frac{z - z(u)}{z'(u)}. \tag{24}$$

Para tener la ecuación conjunta de todas las tangentes, o sea, la de la superficie desarrollable que forman, bastará eliminar u entre las dos ecuaciones [24].

A veces no es fácil esta eliminación. Entonces, poniendo las razones [24] iguales a un nuevo parámetro v, tendremos

$$\begin{aligned} x &= x(u) + vx'(u) \ , \\ y &= y(u) + vy'(u) \ , \\ z &= z(u) + vz'(u) \ , \end{aligned} \tag{25}$$

y estas serán las ecuaciones paramétricas (con los parámetros u, v) de la superficie desarrollable buscada.

Un ejemplo importante es el *helicoide desarrollable*, superficie formada por todas las tangentes a una hélice circular. Siendo $x = a \cos u$, $y = a \operatorname{sen} u$, $z = ku$ las ecuaciones de la hélice, las ecuaciones paramétricas del helicoide desarrollable, según [25], serán:

$$x = a \cos u - av \operatorname{sen} u \quad , \quad y = a \operatorname{sen} u + av \cos u \quad , \quad z = k(u + v).$$

Si la arista de retroceso está dada como intersección de dos superficies $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$, para hallar la ecuación de la superficie desarrollable formada por sus tangentes, se procede de la siguiente manera. Un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de la curva satisface a las dos ecuaciones

$$[26] \qquad F_1(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad , \quad F_2(x_0, y_0, z_0) = 0$$

y la tangente en él es la intersección de los planos tangentes a las superficies, o sea, está definida por las ecuaciones

$$[27] \qquad \begin{aligned} (x - x_0) F_{1x_0} + (y - y_0) F_{1y_0} + (z - z_0) F_{1z_0} &= 0 \\ (x - x_0) F_{2x_0} + (y - y_0) F_{2y_0} + (z - z_0) F_{2z_0} &= 0. \end{aligned}$$

Eliminando x_0, y_0, z_0 entre las cuatro ecuaciones [26], [27], se tendrá la ecuación de la superficie buscada.

EJERCICIO. Hallar la ecuación de la superficie desarrollable formada por las tangentes a la cúbica $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

§ 45. SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN. HELICOIDES. OTRAS SUPERFICIES ESPECIALES

1. Superficies de revolución. — DEFINICIÓN 1. Superficies de revolución son las engendradas por una curva que gira alrededor de un eje, llamado *eje de rotación* de la superficie.

La curva que gira se llama *generatriz* de la superficie.

Los puntos de la generatriz describen circunferencias normales al eje, cuyo centro está sobre este último, y se llaman *paralelos* de la superficie. Los planos que pasan por el eje cortan a la superficie según curvas llamadas *meridianos*.

Consideremos primero el caso más importante en que la curva generatriz sea una curva plana situada en un plano que pasa por el eje de rotación. Tomemos los ejes coordenados tales que el eje Z coincida con el eje de rotación y el plano Y, Z con el que contiene a la generatriz. La ecuación de esta generatriz será entonces de la forma

$$[1] \qquad F(y, z) = 0.$$

Si P es un punto de la generatriz (fig. 156), al girar alrededor del eje Z, la distancia OM que es la y que figura en [1], se mantiene igual a la OM′ que vale $\sqrt{x^2 + y^2}$ si ahora x, y indican las dos primeras coordenadas del punto P′, girado del P. La coordenada z no ha variado. Por tanto, la relación que liga las coordenadas x, y, z de un punto P′ de la superficie es la misma [1] pero con el valor $y = \text{OM}$ sustituído por $\sqrt{x^2 + y^2} = \text{OM}'$. Es decir:

La ecuación de la superficie de revolución engendrada por la curva $F(y, z) = 0$ *del plano* $x = 0$ *al girar alrededor del eje* Z *es*

$$[2] \qquad F(\sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ z) = 0.$$

En particular, si la ecución de la generatriz está dada en la forma explícita $z = f(y)$ (que equivale a $F \equiv z - f(y) = 0$), la ecuación de la superficie de revolución es

$$[3] \qquad z = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

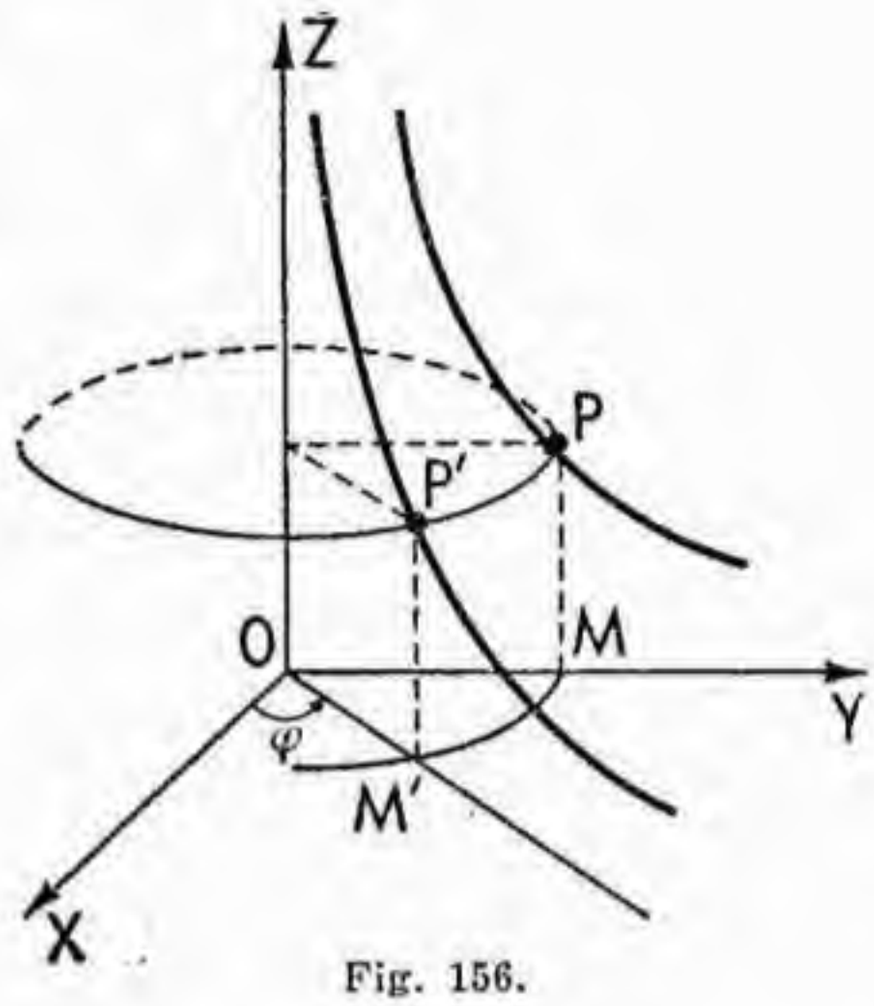

Fig. 156.

Si la generatriz está dada por sus ecuaciones paramétricas $y = y(u)$, $z = z(u)$, se pueden obtener fácilmente las ecuaciones paramétricas de la superficie engendrada. En efecto, de la figura 156 se deduce que las coordenadas de P′ son

$$x = OM' \cos\varphi \quad , \quad y = OM' \operatorname{sen}\varphi \quad , \quad z = M'P',$$

y como $OM' = OM = y(u)$, $M'P' = z(u)$, resulta que las ecuaciones paramétricas de la superficie son

$$[4] \qquad x = x(u)\cos\varphi \quad , \quad y = y(u)\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad z = z(u).$$

EJEMPLOS: 1. Superficie de revolución engendrada por la curva $z = \log y$ al girar alrededor del eje Z.

Según [3] será $z = \log\sqrt{x^2 + y^2}$, o sea, $2z = \log(x^2 + y^2)$.

2. Superficie de revolución engendrada por la circunferencia $y^2 + z^2 = r^2$ al girar alrededor del eje z.

Según [2] será $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, o sea, una esfera.

3. Superficie de revolución engendrada por la recta $z + y = 1$ al girar alrededor del eje z.

Aplicando [2] y racionalizando resulta el cono $x^2 + y^2 - (1 - z)^2 = 0$.

4. Superficie engendrada por la curva $y = u^2$, $z = u^3$ al girar alrededor del eje Z.

Aplicando [4] resulta que las ecuaciones paramétricas de la superficie son $x = u^2\cos\varphi$, $y = u^2\operatorname{sen}\varphi$, $z = u^3$. Si se quiere la ecuación en forma implícita hay que eliminar los parámetros u, φ. Para eliminar φ basta elevar al cuadrado y sumar las dos primeras ecuaciones, resultando $x^2 + y^2 = u^4$. Entre esta ecuación y la $z = u^3$ se elimina inmediatamente u dando la superficie $(x^2 + y^2)^3 - z^4 = 0$.

Consideremos ahora el caso en que la generatriz sea una curva alabeada o una curva contenida en un plano que no contiene el eje de rotación Z. Sean

$$[5] \qquad x = x(u) \quad , \quad y = y(u) \quad , \quad z = z(u)$$

sus ecuaciones paramétricas. Si P es un punto de la curva, las coordenadas de otro punto P′ obtenido por rotación de P serán (fig. 157)

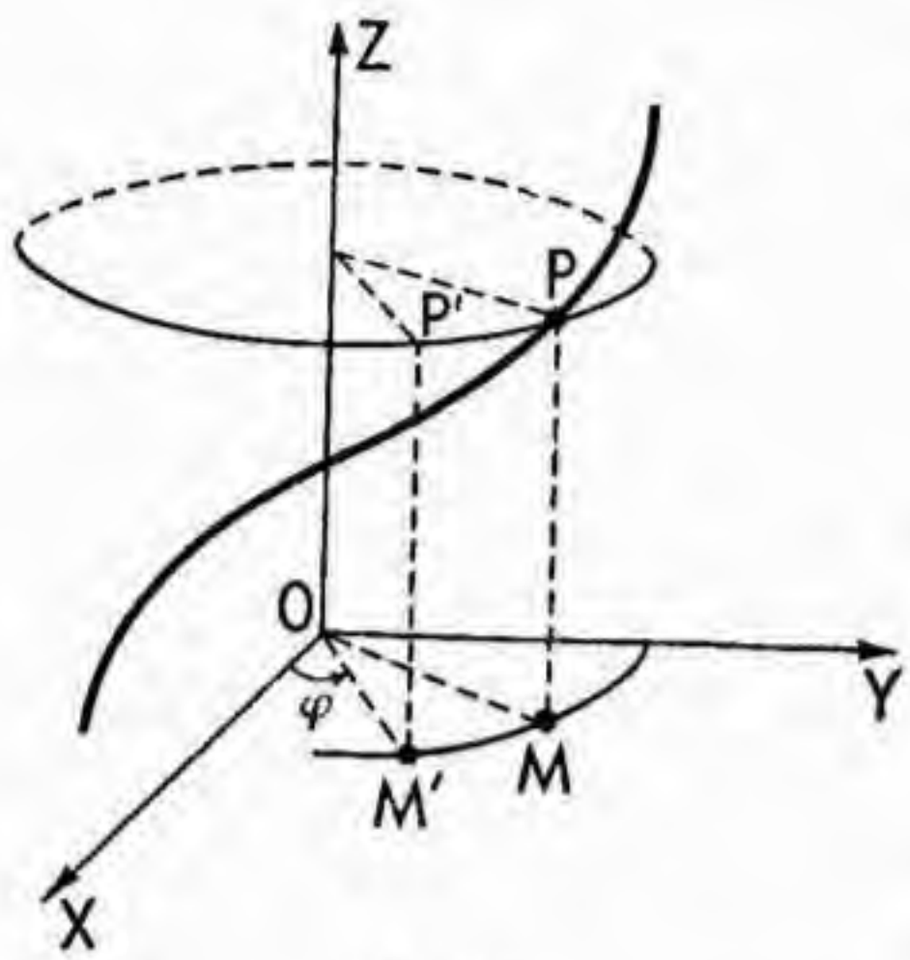

Fig. 157.

$$x = OM' \cos \varphi \quad ,$$
$$y = OM' \operatorname{sen} \varphi \quad ,$$
$$z = M'P' = MP$$

y como $OM' = OM = \sqrt{(x(u)^2 + (y(u))^2}$, resulta que *las ecuaciones paramétricas de la superficie engendrada por la curva* [5] *al girar alrededor del eje* Z *son*

$$[6] \qquad \begin{aligned} x &= \sqrt{[x(u)]^2 + [y(u)]^2} \cos \varphi \quad ; \\ y &= \sqrt{[x(u)]^2 + [y(u)]^2} \operatorname{sen} \varphi \quad ; \\ z &= z(u). \end{aligned}$$

EJEMPLO. Consideremos la superficie de revolución engendrada por una recta no contenida en un plano que pase por el eje de rotación. Las ecuaciones de esta recta serán

$$[7] \qquad x = az + b \quad , \quad y = pz + q \quad ,$$

que son de la forma [5] con sólo tomar z como parámetro y añadir como tercera ecuación la identidad $z = z$. Por tanto, la ecuación de la superficie es

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{(az+b)^2 + (pz+q)^2} \cos \varphi \quad , \\ y &= \sqrt{(az+b)^2 + (pz+q)^2} \operatorname{sen} \varphi \quad , \\ z &= z \end{aligned}$$

con los parámetros z, φ. Para obtener la ecuación en forma implícita hay que eliminar φ entre las dos primeras ecuaciones, para lo cual basta elevar al cuadrado y sumar, resultando

$$x^2 + y^2 = (az+b)^2 + (pz+q)^2 \quad ,$$

que es la ecuación de una cuádrica. Por ser de revolución y reglada no puede ser más que un *hiperboloide de una hoja* (los casos de cono o cilindro están excluídos por suponer que la recta generatriz no corta al eje). Por tanto:

La superficie engendrada por una recta que gira alrededor de otra no contenida en un plano con ella, es un hiperboloide de una hoja.

2. El toro. — DEF. 2. Es la superficie de revolución engendrada por una circunferencia que gira alrededor de una recta de su plano a la cual no corta.

Tomemos como siempre el eje Z coincidente con el eje de giro y por eje Y la normal al mismo por el centro A de la cir-

cunferencia, con lo cual ésta queda contenida en el plano Y, Z; si r es su radio y a la distancia del centro al eje de giro, su ecuación será

$$y^2 + z^2 - 2ay + a^2 - r^2 = 0.$$

Aplicando [2] resulta que la ecuación del toro es

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2a\sqrt{x^2 + y^2} + a^2 - r^2 = 0$$

o bien, racionalizando

$$[7] \qquad (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0$$

que nos dice que el *toro es una superficie algebraica de grado 4.*

A veces es útil tener las ecuaciones del toro en forma paramétrica. Para ello observemos que las ecuaciones paramétricas de la circunferencia generatriz son $y = a + r\cos y$, $z = r \operatorname{sen} u$, siendo u el ángulo que forma el radio variable de la circunferencia con el eje y (fig. 158). Aplicando [4] resulta que *las ecuaciones paramétricas del toro* son

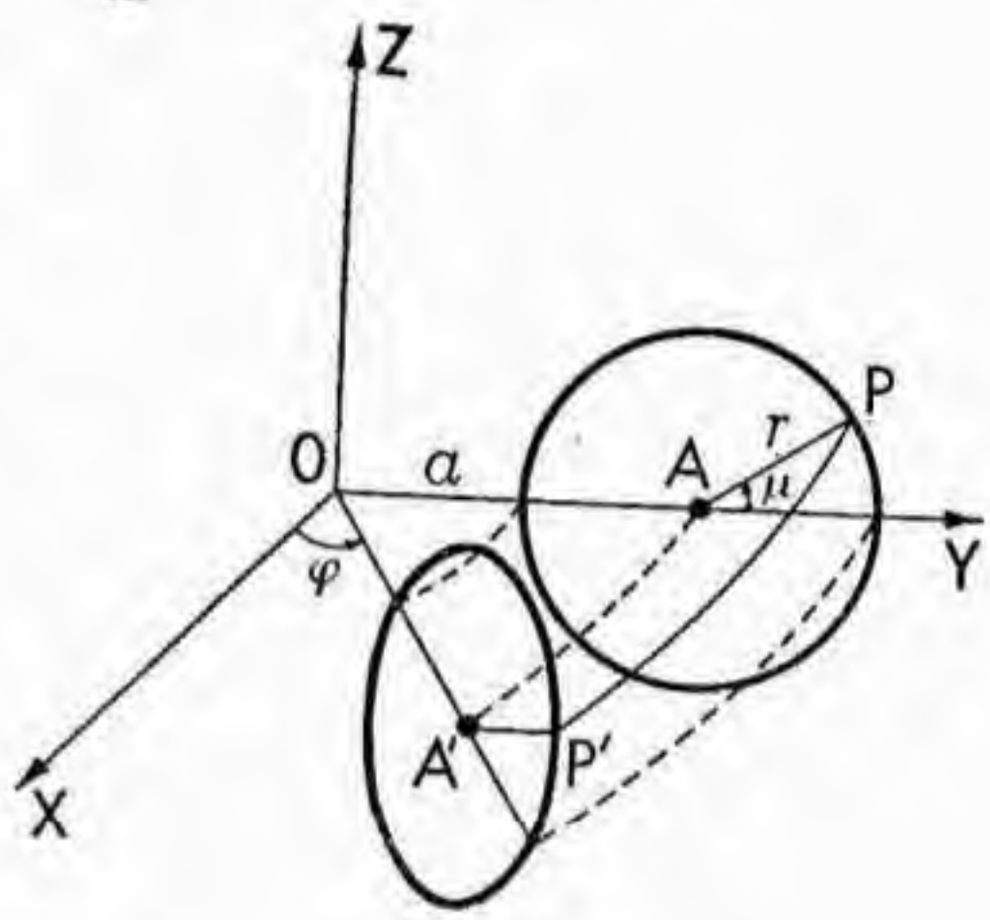

Fig. 158.

$$[8] \qquad x = (a + r\cos u)\cos\varphi \quad , \quad y = (a + r\cos u)\operatorname{sen}\varphi \quad , \quad z = r \operatorname{sen} u.$$

NOTA. Observemos que si [1] es una curva algebraica, también [4] es una superficie algebraica. Es decir, el caso del toro no es excepcional, sino que: *por rotación de una curva algebraica plana alrededor de una recta de su plano, se obtiene siempre una superficie algebraica.*

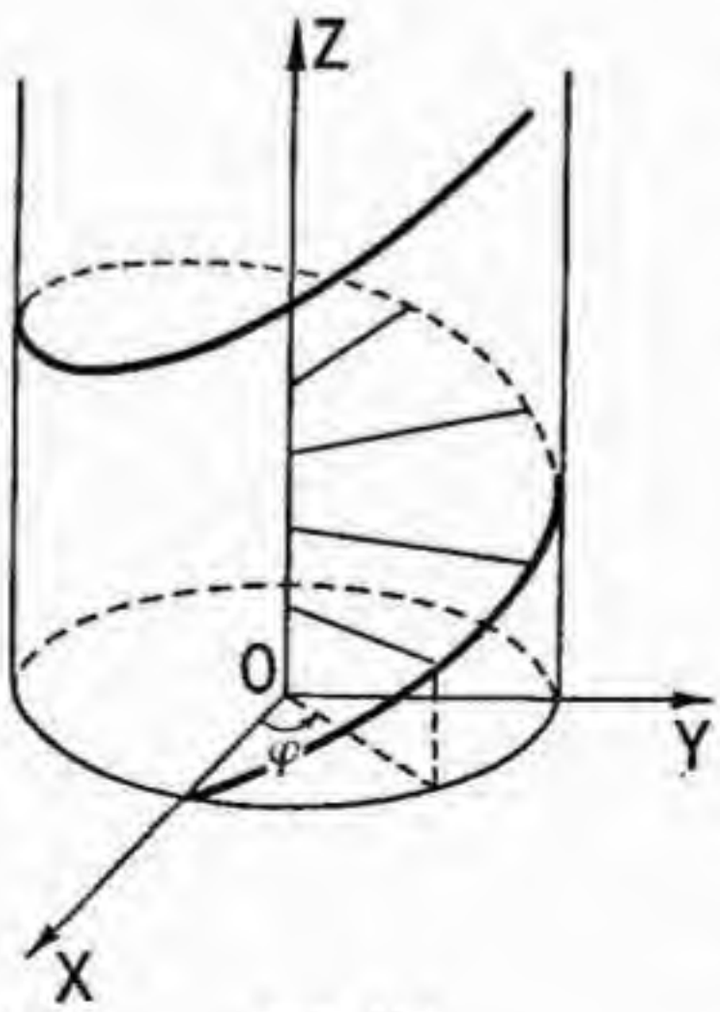

Fig. 159.

3. **Helicoide de plano o cono director.** — DEF. 3. Se llama helicoide de plano director, a la superficie engendrada por las rectas que se apoyan en una hélice circular, en el eje de la hélice y son paralelas al plano de la base (fig. 159).

Tomando como eje Z el de la hélice, las ecuaciones paramétricas de la misma serán

[9] $$x = a\cos\varphi \quad , \quad y = a\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad , \quad z = k\varphi$$

siendo a el radio del cilindro que contiene la hélice y k una constante.

La ecuación de una recta paralela al plano X, Y y que corte al eje Z puede siempre ponerse en la forma

[10] $$y = px \quad , \quad z = q.$$

Para que esta recta corte a la hélice se debe verificar $a\,\mathrm{sen}\,\varphi = pa\cos\varphi$, $k\varphi = q$, o sea, debe ser $p = \mathrm{tg}\,\varphi$, $q = k\varphi$. Por tanto, sustituyendo en [10], las generatrices del helicoide resultan las rectas

$$y = \mathrm{tg}\,\varphi\,.\,x \quad , \quad z = k\varphi.$$

Eliminando φ tendremos la ecuación conjunta de todas las generatrices, o sea, *la ecuación del helicoide de plano director,*

[11] $$y = x\,.\,\mathrm{tg}\,\frac{z}{k}$$

que puede también escribirse

[12] $$z = k\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}.$$

DEF. 4. Se llama helicoide de cono director a la superficie engendrada por las rectas que se apoyan en una hélice circular y cortan al eje de la hélice bajo un ángulo constante.

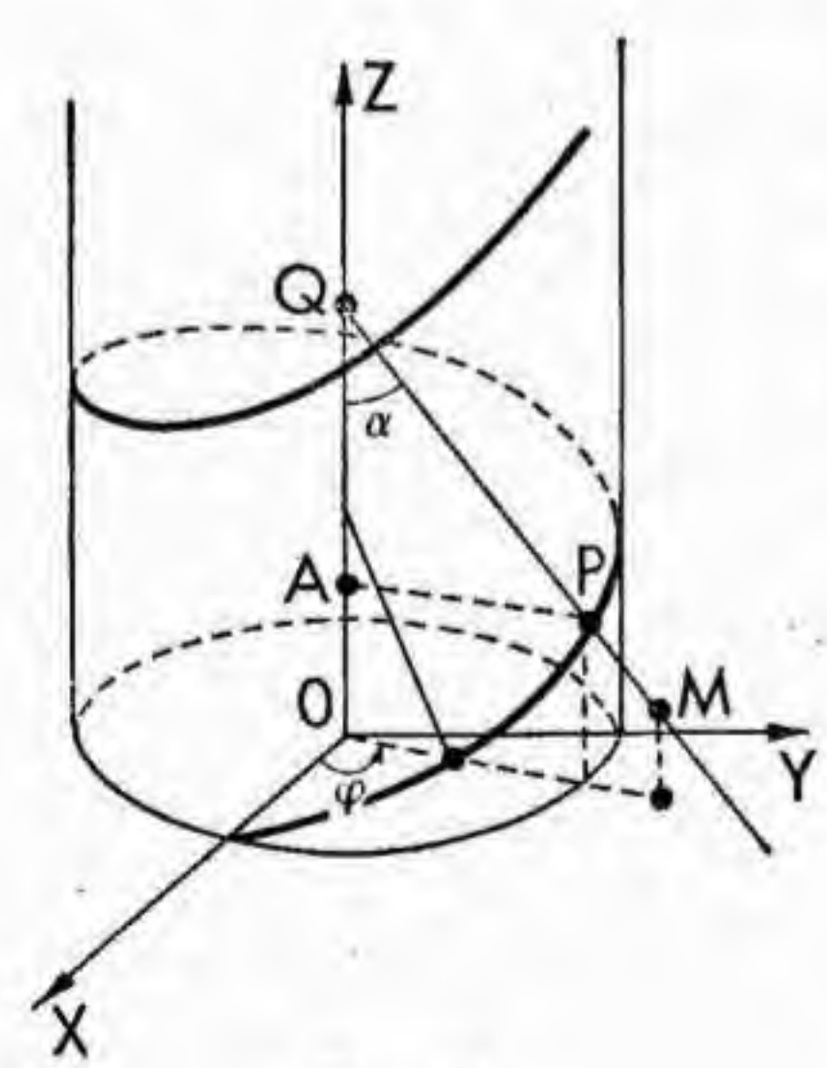

Fig. 160.

Se llaman helicoides de cono director, porque trazando por un punto del espacio paralelas a las generatrices, todas ellas forman un cono de revolución cuyo eje es paralelo al eje de la hélice.

Sea [9] la hélice dada y α el ángulo constante que deben formar las generatrices con el eje Z.

Sea $P(a\cos\varphi,\ a\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ k\varphi)$ un punto de la hélice. La recta que pasa por él y corta al eje Z bajo un ángulo α, lo hará en el punto $Q(0, 0, z_0)$ tal que (fig. 160)

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{AP/AQ} = a/(z_0 - k\varphi),$$

de donde

[13] $$z_0 = a\cot\alpha + k\varphi.$$

Para cualquier punto $M(x, y, z)$ de la generatriz OP es $y/x = \operatorname{tg} \varphi$, $z_0 - z = \sqrt{x^2 + y^2} \cot \alpha$, de donde, según [13],

$$[14] \qquad z = a \cot \alpha + k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - \sqrt{x^2 + y^2} \cot \alpha .$$

Ésta es, por tanto, la ecuación que satisface las coordenadas de todo punto de la superficie, o sea, *la ecuación del helicoide de cono director.*

Obsérvese que para $\alpha = \pi/2$ la ecuación coincide con la [12], como debe ser.

EJERCICIO. Probar que la intersección del helicoide de cono director con un plano $z =$ cte. es una espiral de Arquímedes.

4. Lugar geométrico de las rectas que se apoyan en tres no coplanares. — Sean dadas tres rectas r_1, r_2, r_3 no paralelas y sin punto común. Queremos hallar el lugar geométrico de las rectas que cortan a las tres.

Por cada punto P_1 de r_1 pasará una de tales rectas. En efecto, ella será la intersección del plano determinado por P_1 y r_2 con el determinado por P_1 y r_3. Variando P_1 sobre r_1 tendremos el lugar buscado que será, por tanto, una superficie.

Para hallar su ecuación el método general es el siguiente: Se toma el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ sobre r_1 y se escriben las ecuaciones de los planos determinados por P_1 y cada una de las rectas r_2, r_3. Como hemos dicho, estos dos planos determinan una recta del lugar. Escribiendo que P_1 pertenece a r_1 tendremos dos ecuaciones entre x_1, y_1, z_1, que junto con las de los planos dichos, forman cuatro ecuaciones. Eliminando entre ellas las variables x_1, y_1, z_1, que individualizan una recta particular, para tener la ecuación conjunta de todas ellas, se tendrá la ecuación del lugar buscado.

Para que el cálculo resulte simple, sin restringir en nada la generalidad, podemos tomar unos ejes coordenados convenientes. Tomemos el eje X coincidente con r_1 y el plano X, Y paralelo a r_2. Todavía, por traslación del plano Y, Z, podemos hacer que r_3 corte al eje Z. Las ecuaciones de las tres rectas serán entonces de la forma

$$\begin{array}{llll} \text{recta } r_1 & : \; y = 0 \;, & & z = 0 \\ \text{recta } r_2 & : \; x = ay \;, & & z = c \\ \text{recta } r_3 & : \; x = py + q \;, & & z = my + n . \end{array}$$

La hipótesis de que r_2, r_3 no tienen punto común, se escribe expresando que las cuatro ecuaciones de estas rectas son incompatibles, lo que da la condición

$$[15] \qquad ac + np - cp - qm - an \neq 0 .$$

Sea $P_1(x_1, 0, 0)$ un punto de r_1. El plano (P_1, r_2) será

$$c(x - ay) + (z - c)x_1 = 0$$

puesto que, en efecto, esta ecuación se satisface para los puntos de r_2 y para las coordenadas de P_1.

Análogamente, el plano (P_1, r_2) es

$$(x - py - q)n + (z - my - n)(n_1 - q) = 0.$$

Para cada valor x_1, estos dos planos determinan una generatriz de la superficie buscada. Eliminando x_1 entre las dos ecuaciones tendremos la ecuación conjunta de toda la superficie. Para ello, siendo ambas ecuaciones de primer grado, la eliminación es inmediata; basta despejar x_1 en una de ellas y sustituir en la otra, o bien, en forma de determinante

$$\begin{vmatrix} c(x - ay) & z - c \\ n(x - py) - q(z - my) & z - my - n \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando, resulta:

$$\begin{gathered} camy^2 + qz^2 + (c - n)xz - cmxy + \\ + (np - ca - qm)yz + c(an - np + qm)y - qcz = 0. \end{gathered}$$

que es la ecuación de una cuádrica, evidentemente reglada, dada su generación.

Para ver si se trata de un hiperboloide o de un paraboloide bastará ver si es o no nulo el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -cm & c - n \\ -cm & 2acm & np - ca - qm \\ c - n & np - ca - qm & 2q \end{vmatrix} =$$

$$= 2cmn(ac + np - cp - qm - an).$$

La expresión entre paréntesis sabemos por [15] que no es nula. Si fuera $c = 0$ la recta r_2 estaría en el plano $z = 0$ y por tanto cortaría a r_1; si fuera $n = 0$, r_3 cortaría al eje X que es r_1. Cabe sólo la posibilidad $m = 0$. En este caso r_3 está en el plano $z = n$, paralelo al X, Y, y por tanto las tres rectas son paralelas a un mismo plano. Quitado este caso, el determinante es siempre distinto de cero y la cuádrica es un hiperboloide. En resumen:

El lugar geométrico de las rectas que se apoyan en otras tres no coplanares es un hiperboloide de una hoja si las tres rectas no son paralelas a un mismo plano, y un paraboloide hiperbólico en este último caso.

CONSECUENCIA. Una cuarta recta r_4 que tampoco sea coplanar con ninguna de las tres anteriores cortará al hiperboloide o paraboloide anterior en dos puntos; por cada uno de ellos pasará una generatriz que cortará a las cuatro rectas. Luego: *dadas cuatro rectas en el espacio, n*

contenidas en un plano ningún par de ellas, existen dos únicas rectas (reales o imaginarias o una doble) que cortan a las cuatro.

5. **Otras superficies regladas.** — Una generalización importante del problema anterior consiste en considerar la superficie engendrada por las rectas que se apoyan en tres curvas fijas C_1, C_2, C_3 llamadas *directrices*. El caso considerado corresponde al caso más simple en que estas curvas son tres rectas.

El problema general se resuelve de la misma manera. Se toma un punto P_1 sobre C_1 y se consideran los conos de vértice P_1 y directrices C_2 y C_3; estos conos tendrán un cierto número de generatrices comunes que pertenecerán a la superficie buscada. Variando luego P_1 sobre C_1 estas generatrices darán toda la superficie. Analíticamente, una vez escritas las ecuaciones de los dos conos, bastará eliminar las tres coordenadas de P_1 entre ellas y las ecuaciones que definen C_1 para tener la ecuación de la superficie. Esta eliminación puede ser difícil o engorrosa, pero si se trata de curvas algebraicas ella es siempre posible y la superficie resultante será siempre algebraica.

En este caso de ser C_1, C_2, C_3 *curvas algebraicas*, supongamos de grados n_1, n_2, n_3 respectivamente, es interesante calcular el grado de la superficie que resulta. Llamemos s_{12} al número de puntos comunes, si los hay, entre C_1 y C_2; análogamente, sean s_{13}, s_{23} los puntos comunes entre C_1, C_3 y C_2, C_3. Para hallar el grado de la superficie, cortemos por una recta r_1 y veamos el número de puntos de intersección, lo cual dará el grado. El número de puntos de intersección de r_1 con la superficie es igual al número de rectas que se apoyan en C_1, C_2, C_3, r_1, o sea el número de puntos en que C_1 corta a la superficie de directrices C_2, C_3, r_1, que es igual al grado de esta superficie por n_1. Por otra parte, el grado de la última superficie, cortando por otra recta r_2, resulta igual al número de puntos en que C_2 corta a la superficie de generatrices C_3, r_1, r_2. Análogamente, cortando por otra recta r_3, esta última tiene por grado el número de puntos en que C_3 corta a la superficie de directrices r_1, r_2, r_3 que por el número anterior sabemos que es igual a 2. Por tanto, retrocediendo el razonamiento, vemos que el grado buscado es $2n_1n_2n_3$. De esta manera se han contado como integrantes de la superficie los conos que desde los puntos comunes a dos de las curvas directrices proyectan la tercera, cuyo grado es igual al de la directriz correspondiente. Prescindiendo de estos conos, resulta que: *el grado de la superficie engendrada por las rectas que se apoyan en las tres directrices* C_1, C_2, C_3 *sin pasar por los puntos comunes a dos de ellas, es*

$$N = 2n_1n_2n_3 - n_1s_{23} - n_2s_{13} - n_3s_{12}. \tag{16}$$

Esta fórmula se acostumbra a llamar *fórmula de Salmon.*

6. **Las 27 rectas de una superficie cúbica.** — Vamos a dar una aplicación interesante de la última fórmula de Salmon. Sea S una superficie cúbica. Cortémosla por cuatro planos y sean C_1, C_2, C_3, C_4 las cúbicas planas sección. Cada dos de estas cúbicas tiene 3 puntos comunes, que son los puntos en que la recta de intersección de sus planos corta a S

Consideremos la superficie reglada determinada por las directrices C_1, C_2, C_3. Según la fórmula de Salmon su grado será $2.3.3.3 - 3.3 - 3.3 - 3.3 = 27$. Por tanto ella será cortada por C_4 en $27.3 = 81$ puntos, por cada uno de los cuales pasará una recta que se apoya en las cuatro C_1, C_2, C_3, C_4.

De estas rectas, aquellas que se apoyen en cuatro puntos distintos, deberán pertenecer íntegramente a S, puesto que una superficie cúbica sólo puede tener 3 puntos comunes con una recta no contenida en ella. Al aplicar la fórmula de Salmon ya se han descontado las rectas que pasan por los puntos comunes a dos de las C_1, C_2, C_3. Falta sólo descontar las que pasan por los puntos comunes a C_4 y alguna C_i $(i = 1, 2, 3)$.

Para ello observemos que C_4 tiene 3 puntos comunes con cada una de las C_1, C_2, C_3, o sea, en total 9 puntos. Por cada uno de ellos pasan 9 rectas que se apoyan en las dos cúbicas restantes (generatrices comunes a los dos conos de grado 3 que proyectan estas cúbicas), de las cuales hay que prescindir de las que pasan por las intersecciones de estas últimas, que son 3. En consecuencia, quedan 6 rectas por cada uno de los 9 puntos mencionados. En total son $6.9 = 54$ rectas que, aún cortando a las cuatro C_1, C_2, C_3, C_4, sólo tienen 3 puntos comunes en S. Las restantes $81 - 54 = 27$ rectas, por tener 4 puntos distintos comunes con S, deben pertenecer íntegramente a esta superficie. Llegamos así al notable resultado:

Toda superficie cúbica contiene siempre 27 rectas.

Naturalmente que, como en toda cuestión algebraica, estas rectas pueden ser imaginarias o múltiples.

Ejercicio

Sea un segmento AB cuyo punto medio sea M. Supongamos que AB gira alrededor de un eje z coplanar con el segmento, de manera que M describa una circunferencia cuyo plano sea perpendicular a z. Se supone que la distancia de M a z es mayor que MA = MB. Supongamos, además, que al mismo tiempo que M gira alrededor de z, el segmento gira alrededor de M, describiendo un ángulo igual a $k\pi$ (k = entero) cuando M haya dado la vuelta entera. Se pide: *a*) Ecuación de la superficie descrita por el segmento AB; *b*) Ecuación de la curva descrita por el punto A. Para $k = 1$, la superficie descrita por el segmento AB, se llama *banda de Möbius*.

Solución. Tomando los ejes x, y en el plano por M perpendicular a z y llamando φ al ángulo de giro del punto M (a partir del eje x) y α el de giro del segmento AB, será $\alpha = (h/2)\varphi$. Las coordenadas del punto P del segmento AB que dista λ de M serán

$$x = \lambda \cos \frac{k\varphi}{2} \cos \varphi \quad , \quad y = \lambda \cos \frac{k\varphi}{2} \operatorname{sen} \varphi \quad , \quad z = \lambda \operatorname{sen} \frac{k\varphi}{2} \quad .$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de la superficie (λ, φ son los parámetros que varían entre $-a \leqslant \lambda \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, siendo a = MA = = MB). Para $\lambda = a$ se tienen las ecuaciones paramétricas de la curva.

Capítulo X

GEOMETRÍA REGLADA. GEOMETRÍA DE CÍRCULOS

§ 46. Geometría reglada

1. **Coordenadas de recta.** — Ya vimos cómo una recta del espacio se determina comúnmente como intersección de dos planos, por lo cual suele venir dada por dos ecuaciones lineales entre las variables x, y, z. En la llamada *forma reducida*, por ejemplo, estas ecuaciones son del tipo

$$[1] \qquad y = ax + b \quad , \quad z = cx + d.$$

Puestas las ecuaciones en esta forma, observemos que para dar una recta hay que dar los cuatro coeficientes a, b, c, d. Por tanto se pueden tomar estos cuatro coeficientes como coordenadas de la recta y decir, por ejemplo, que la recta $(3, 0, -1, 2)$ es la de ecuaciones

$$y = 3x \quad , \quad z = -x + 2$$

y, recíprocamente, que la recta

$$y = -x + 1 \quad , \quad z = 2x - 3$$

tiene por coordenadas $(-1, 1, 2, -3)$.

De esta manera, dos rectas de coordenadas distintas serán también distintas. En efecto, la recta (a, b, c, d) cuyas ecuaciones son las [1], pasa por los puntos $(x = 0,\ y = b,\ z = d)$, $(x = 1,\ y = a + b,\ z = c + d)$. Si la recta (a', b', c', d') pasase por los mismos puntos, debería ser $b = b'$, $d = d'$, $a + b = a' + b'$, $c + d = c' + d'$, y por tanto $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, $d = d'$.

Esto nos dice que las rectas del espacio no pueden determinarse por menos de cuatro coordenadas, puesto que si así fuese, al tomar cuatro coordenadas tendría que haber rectas a las que correspondiesen distintos grupos de coordenadas. Este hecho, de que las rectas del espacio dependan de cuatro coordenadas y no de un número menor, se enuncia diciendo que *el conjunto de las rectas del espacio forma una variedad de 4 dimensiones*, o bien que, brevemente: *el espacio reglado es de cuatro dimensiones.*

Es decir, así como el espacio, considerado como conjunto de puntos es de tres dimensiones, puesto que cada punto queda determinado por tres coordenadas, el espacio considerado como conjunto de rectas es de cuatro dimensiones, puesto que para dar una recta hacen falta cuatro coordenadas.

Las coordenadas a, b, c, d tienen el inconveniente de que con ellas hay ciertas rectas que no pueden representarse. Tales son las rectas paralelas al eje y ($x = \text{cte.}$, $z = \text{cte.}$) o las paralelas al eje z ($x = \text{cte.}$, $y = \text{cte.}$) cuyas ecuaciones no pueden obtenerse de [1] dando valores a los coeficientes a, b, c, d. Lo mismo ocurre con las rectas del infinito o rectas impropias, que tampoco pueden representarse en la forma [1]. Naturalmente que, como estas rectas excepcionales dependen de dos parámetros, ellas no son obstáculo para la validez del enunciado anterior respecto de las dimensiones del espacio reglado.

Sin embargo, se comprende que va a ser más conveniente si se pueden encontrar otras coordenadas, tales que, entre ellas y las rectas del espacio haya una correspondencia biunívoca sin excepción. Esto se consigue con las llamadas *coordenadas plückerianas*, que vamos a definir.

2. **Coordenadas plückerianas de recta.** — En todo lo que sigue de este capítulo vamos a representar las coordenadas cartesianas de un punto del espacio por x_1, x_2, x_3 en vez de las ordinarias x, y, z. Como casi siempre usaremos coordenadas homogéneas, llamaremos x_0 a la variable de homogeneidad; es decir, las coordenadas homogéneas de un punto serán de la forma (x_0, x_1, x_2, x_3), con el convenio de que las no homogéneas del mismo punto serán entonces $(x_1/x_0,\ x_2/x_0,\ x_3/x_0)$.

Sean x_0, x_1, x_2, x_3 las coordenadas homogéneas de un punto X é y_0, y_1, y_2, y_3 las de otro punto Y. Consideremos la matriz

$$[2] \qquad \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

y sus menores de segundo orden

$$[3] \qquad \begin{array}{l} p_{01} = x_0y_1 - x_1y_0 \ , \ p_{02} = x_0y_2 - x_2y_0 \ , \ p_{03} = x_0y_3 - x_3y_0 \\ p_{12} = x_1y_2 - x_2y_1 \ , \ p_{13} = x_1y_3 - x_3y_1 \ , \ p_{23} = x_2y_3 - x_3y_2 \end{array}$$

o bien, abreviadamente,

$$[4] \qquad p_{ij} = x_iy_j - x_jy_i .$$

Los seis números p_{ij} se llaman *coordenadas plückerianas* de la recta determinada por los puntos X, Y.

Si en vez de definir la recta por los puntos X, Y se definiera por otro par X′, Y′ de la misma, siendo entonces

$$x'_i = \lambda x_i + \mu y_i \quad , \quad y'_i = \lambda_1 x_i + \mu_1 y_i \quad , \quad (\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu \neq 0)$$

resulta

$$p'_{ij} = (\lambda\mu_1 - \lambda_1\mu)\, p_{ij} \quad .$$

es decir: *dada una recta, las p_{ij} quedan definidas salvo un factor de proporcionalidad.* Además, siendo X, Y puntos distintos, las coordenadas x_i, y_i no son proporcionales y por tanto, según la definición [3], las p_{ij} no pueden ser todas nulas.

Ambos resultados nos dicen que: *las coordenadas plückerianas son coordenadas homogéneas.*

Las p_{ij} no son independientes. En efecto, basta observar la identidad

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 2(p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12}) ,$$

que se obtiene inmediatamente desarrollando el determinante por menores complementarios de las dos primeras filas (regla de Laplace). Por otra parte, el determinante anterior es igual a cero, por tener filas iguales, por tanto, poniendo por simetría $p_{31} = -p_{13}$, se tiene:

Las coordenadas p_{ij} *están ligadas por la ecuación*

$$[5] \qquad p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0 .$$

Para justificar el nombre de coordenadas de recta, dado a las p_{ij}, falta todavía demostrar que, recíprocamente, dados seis números p_{ij} no todos nulos y satisfaciendo a la relación [5] queda determinada una sola recta.

En primer lugar, observemos que por lo menos una recta queda determinada. En efecto, como las p_{ij} no son todas nulas, sea por ejemplo $p_{01} \neq 0$. Consideremos la recta que une los dos puntos

$$(x_0 = 0 \ , \ x_1 = p_{01} \ , \ x_2 = p_{02} \ , \ x_3 = p_{03}) ,$$
$$(y_0 = -p_{01} \ , \ y_1 = 0 \ , \ y_2 = p_{12} \ , \ y_3 = p_{13}) .$$

Hallando, según [3], las coordenadas de esta recta y teniendo en cuenta [5], se obtiene que ellas son, salvo el factor p_{01}, las p_{ij} dadas.

Por otra parte, una recta que tenga las coordenadas p_{ij}, según [3], cortará al plano $x_1 = 0$ en el punto

$$[6] \qquad \frac{x_0}{p_{01}} = \frac{x_2}{p_{21}} = \frac{x_3}{p_{31}} \ , \text{ o sea, } \frac{x_2}{x_0} = \frac{p_{21}}{p_{01}} \ , \ \frac{x_3}{x_0} = \frac{p_{31}}{p_{01}}$$

y al plano $x_2 = 0$ en el punto

$$[7] \qquad \frac{x_0}{p_{02}} = \frac{x_1}{p_{12}} = \frac{x_3}{p_{32}} \ , \text{ o sea, } \frac{x_1}{x_0} = \frac{p_{12}}{p_{02}} \ , \ \frac{x_3}{x_0} = \frac{p_{32}}{p_{02}}$$

y de la misma manera, a los planos $x_0 = 0$, $x_3 = 0$ en puntos perfectamente determinados. Por tanto, no puede haber más de una recta con las mismas coordenadas p_{ij}, ya que por dos puntos pasa una sola recta. En resumen:

Hay correspondencia biunívoca entre las rectas del espacio y las seis coordenadas homogéneas p_{ij}, *no todas nulas y ligadas por la relación* [5].

Observemos que siendo las p_{ij} coordenadas homogéneas, equivalen a cinco no homogéneas y como, además, están ligadas por la ecuación [5], en realidad hay cuatro de ellas independientes. Es decir, obtenemos de nuevo que las rectas del espacio dependen de cuatro parámetros.

Si consideramos las p_{ij} como coordenadas cartesianas homogéneas de un espacio de cinco dimensiones, entonces [5], por ser una ecuación de segundo grado en las variables, representa lo que se llama una "hipercuádrica", generalización natural de las cónicas del plano y las cuádricas del espacio. Esta hipercuádrica se llama *hipercuádrica de Klein*.

Resulta así que a cada recta del espacio corresponde un punto de la hipercuádrica de Klein y, recíprocamente, a cada punto de esta última corresponde una recta del espacio. Resumiendo:

Las rectas del espacio ordinario se representan biunívocamente por los puntos de una hipercuádrica (hipercuádrica de Klein) del espacio de cinco dimensiones.

EJEMPLOS: 1. Hallar las coordenadas plückerianas de la recta determinada por los puntos cuyas coordenadas no homogéneas son (0, —1, 3), (2, 1, —1). Introduciendo la variable de homogeneidad x_0, las coordenadas homogéneas de estos puntos serán (1, 0, —1, 3), (1, 2, 1, —1) y por tanto, según [3], las coordenadas buscadas son:

$$p_{01} = 2, \quad p_{02} = 2, \quad p_{03} = -4, \quad p_{12} = 2, \quad p_{13} = -6, \quad p_{23} = -2.$$

2. Hallar las coordenadas plückerianas de la recta definida por las ecuaciones

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad , \quad x_1 + 2x_2 - 3 = 0.$$

Hay que hallar dos puntos de estas rectas. Ellos pueden ser, por ejemplo, las intersecciones con los planos $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, que son $X(1, 0, 3/2, 3/2)$, $Y(1, 3, 0, -9)$. Como el primero equivale a $X(2, 0, 3, 3)$, aplicando [3] resulta

$$p_{01} = 6 \ , \ p_{02} = -3 \ , \ p_{03} = -21 \ , \ p_{12} = -9 \ .$$
$$p_{13} = -9 \ , \ p_{23} = -27.$$

3. Dadas las coordenadas plückerianas

$$p_{01} = 1, \quad p_{02} = -3, \quad p_{03} = 0, \quad p_{12} = 4, \quad p_{13} = 0, \quad p_{23} = 2$$

de una recta, hallar sus ecuaciones ordinarias.

Según [6], esta recta corta al plano $x_1 = 0$ en el punto cuyas coordenadas no homogéneas son

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2/x_0 = -4 \quad , \quad x_3/x_0 = 0$$

y al plano $x_2 = 0$ en el punto

$$x_1/x_0 = -4/3 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3/x_0 = 2/3.$$

Por tanto, la recta dada pasa por estos dos puntos y sus ecuaciones ordinarias, en coordenadas no homogéneas pueden ponerse en la forma

$$\frac{3x_1}{4} = \frac{x_2 + 4}{-4} = \frac{3x_3}{-2} \ .$$

3. **Condición para que dos rectas se corten.** — Sean p_{iu}, p'_{iu} las coordenadas plückerianas de dos rectas. Si ellas se cortan, quiere decir que los puntos $X(x_0, x_1, x_2, x_3)$, $Y(y_0, y_1, y_2, y_3)$ que determinan la primera, y los $X'(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$, $Y'(y'_0, y'_1, y'_2, y'_3)$ que determinan la segunda, están en un plano. Por tanto,

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x'_0 & x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_0 & y'_1 & y'_2 & y'_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando este determinante por menores complementarios de las dos primeras filas, resulta

[8] $p_{01}p'_{23} + p_{02}p'_{31} + p_{03}p'_{12} + p_{12}p'_{03} + p_{31}p'_{02} + p_{23}p'_{01} = 0.$

Recíprocamente, si esta condición se cumple, tomando sobre cada una de las rectas dos puntos cualesquiera, el determinante anterior es nulo; luego los cuatro puntos están en un plano y, en consecuencia, las rectas que los unen se cortan. Por tanto,

La condición [8] *es la necesaria y suficiente para que dos rectas se corten.*

4. **Complejos de rectas.** — Si entre los cuatro parámetros de que dependen las rectas del espacio se da una relación, quedarán independientes tres parámetros. Una familia de rectas dependientes de tres parámetros se llama *complejo de rectas.*

Si se dan dos relaciones, quedarán sólo dos parámetros independientes. Entonces, una familia de rectas dependientes de dos parámetros se llama *congruencia de rectas.*

Si se dan tres relaciones, quedará una familia de rectas dependientes de un solo parámetro. Es una *superficie reglada.*

Si se dan cuatro relaciones, se pueden calcular los valores de los parámetros que las satisfacen, y por tanto quedan determinadas un número finito de rectas.

Vemos, pues, que así como con puntos del espacio sólo se pueden formar curvas (familias de puntos dependientes de un parámetro) y superficies (familias de puntos dependientes de dos parámetros), con rectas cabe una posibilidad más, debido a que las rectas dependen de cuatro parámetros, mientras que los puntos sólo de tres (sus coordenadas). Vamos a estudiar aquí los complejos y congruencias de rectas. Las superficies regladas ya han sido estudiadas en otro lugar.

Es conveniente seguir utilizando las coordenadas plückerianas. Tenemos entonces que el conjunto de rectas cuyas coordenadas p_{ik}, además de la condición [5], satisfacen a una ecuación homogénea

[9] $$F(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23}) = 0$$

se llama *complejo de rectas.* Generalmente se estudian únicamente los complejos algebraicos, o sea, aquellos en que la función F es una función algebraica. Entonces, el grado de la ecuación [9] se llama *grado* del complejo.

Todo punto $X(x_0, x_1, x_2, x_3)$ del espacio es vértice de un

cono de rectas pertenecientes al complejo. En efecto, sustituyendo en [9], $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$, queda

[10] $F(x_0y_1 - x_1y_0,\ x_0y_2 - x_2y_0,\ \ldots,\ x_2y_3 - x_3y_2) = 0.$

Esta ecuación, considerando las y_i como variables, representa un cono de vértice el punto X; basta observar, en efecto, que si y_i son las coordenadas de un punto que satisfaga [10], otro punto cualquiera de la recta que une este punto con X tendrá por coordenadas $y'_i = \lambda x_i + \mu y_i$ y por tanto satisface también a la ecuación [10]. Se tiene, además: *el grado del cono* [10] *es igual al grado del complejo.*

Todas las rectas de un complejo contenidas en un plano dado envuelven una curva llamada *curva plana del complejo.* Las tangentes a una curva plana del complejo por un punto P de su plano, serán las rectas de la sección por el plano del cono del complejo de vértice P. Llamando *clase* de una curva al número de tangentes que se le pueden trazar por un punto exterior (número que es independiente del punto cuando la curva es algebraica y se consideran las tangentes reales e imaginarias), se tiene, por tanto: *la clase de las curvas planas del complejo es igual al grado del complejo.*

EJEMPLO. El conjunto de todas las rectas tangentes a una cuádrica es un complejo de grado 2. En efecto, todo punto del espacio es vértice de un cono de segundo orden cuyas generatrices pertenecen al complejo: es el cono circunscrito a la cuádrica. Todo plano corta a la cuádrica según una cónica, curva de clase dos, cuyas tangentes son las rectas del complejo contenidas en el plano, o sea, es la curva plana del complejo.

5. **Complejos lineales.** — El caso más simple, pero también el más importante, es aquel en que [10] es una ecuación lineal:

[11] $a_{01}p_{01} + a_{02}p_{02} + a_{03}p_{03} + a_{12}p_{12} + a_{13}p_{13} + a_{23}p_{23} = 0.$

En este caso el complejo se llama lineal, o de grado uno.

Como la ecuación [11] es homogénea y contiene seis coeficientes a_{ij}, para determinarlos harán falta cinco ecuaciones lineales. Puesto que al escribir que una recta dada pertenece al complejo, [11] resulta una ecuación lineal entre los coeficientes a_{ij}, se tiene:

Un complejo lineal queda determinado dando cinco rectas independientes.

Si los seis coeficientes a_{ij} cumplen la condición

[12] $$a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12} = 0\ ,$$

pueden tomarse como coordenadas plückerianas de una recta y entonces, según [8], el complejo se compone de todas las rectas del espacio que cortan a una recta fija. En este caso el complejo se llama *especial* o *singular.* En caso contrario, si no se cumple [12], el complejo se llama *general* u *ordinario.*

Para un complejo lineal, el cono [9] resulta de primer grado, o sea, es un plano. Es decir, las rectas del complejo que pasan por un punto del espacio forman un haz cuyo vértice es el punto. Sea por ejemplo el punto $X^0(x^0_0, x^0_1, x^0_2, x^0_3)$, poniendo en [11] $p_{ik} = x^0_i x_k - x^0_k x_i$, resulta

$$[13] \qquad \Pi_1 \equiv \sum_{i<k} a_{ik}(x^0_i x_k - x^0_k x_i) = 0 \ .$$

que es la de ecuación del plano Π_1 que contiene al haz de rectas del complejo que pasan por X_0. Este plano se llama *plano focal* o *polar* del punto X^0, el cual se llama, a su vez, *foco* o *polo* del plano.

Dada una recta r determinada por los puntos X^0, Y^0 cuyos planos focales son el [13] y el

$$[14] \qquad \Pi_2 \equiv \sum_{i<k} a_{ik}(y^0_i x_k - y^0_k x_i) = 0 \ ,$$

todo otro punto de la recta tiene sus coordenadas de la forma $\lambda x^0_i + \mu y^0_i$ y por tanto su plano polar es

$$\Pi \equiv \sum_{i<k} a_{ik}[(\lambda x^0_i + \mu y^0_i)x_k - (\lambda x^0_k + \mu y^0_k)x_i] =$$
$$= \lambda \Pi_1 + \mu \Pi_2 = 0 \ ,$$

lo cual nos dice que Π pertenece al haz de planos determinado por Π_1 y Π_2. O sea: *los planos focales de los puntos de una recta r pasan todos por otra r' que se llama conjugada de la primera.*

Si la recta r pertenece al complejo, está contenida en los planos focales de todos sus puntos y por tanto coincide con su conjugada.

Toda recta del complejo que corta a una recta r está contenida en el plano focal del punto de intersección y por tanto corta también a la conjugada r'.

Sean tres puntos A, B, C. Supongamos que sus planos focales se corten en un punto O. Por pertenecer O al plano focal de A, la recta OA pertenece al complejo; lo mismo las rectas OB, OC. Por tanto, estas tres rectas deben estar en el plano focal del punto O, lo cual significa que O debe estar en el plano ABC. Tomando otro punto del mismo plano, también su plano focal debe cortar a los anteriores en el mismo punto O, de manera que resulta: *los planos focales de los puntos de un plano, se cortan en un punto que pertenece al mismo plano.*

Dualmente: *los focos de los planos que pasan por un punto, están en un plano que pasa por el mismo punto.*

6. **Congruencias lineales.** — Un conjunto de rectas del espacio, cuyas coordenadas p_{ik}, además de la condición [5], satisfacen a dos ecuaciones homogéneas

[15] $F_1(p_{01}, p_{02}, \ldots, p_{23}) = 0 \quad , \quad F_2(p_{01}, p_{02}, \ldots, p_{23}) = 0$

se llama *congruencia de rectas.*

Una congruencia puede definirse como el conjunto de las rectas comunes a los dos complejos $F_1 = 0$, $F_2 = 0$. Si F_1 es de grado m y F_2 de grado n, las rectas de la congruencia que pasan por un punto del espacio serán las rectas comunes a un cono de grado m y otro de grado n cuyo vértice es el mismo punto; su número será por tanto igual a mn.

El caso más importante es aquel en que F_1, F_2 son lineales. Se tienen entonces las congruencias lineales. Es decir:

Una congruencia lineal es el conjunto de rectas cuyas coordenadas satisfacen a dos ecuaciones lineales

$$[16] \qquad \begin{aligned} \sum_{i<k} a_{ik}p_{ik} &\equiv a_{01}p_{01} + a_{02}p_{02} + a_{03}p_{03} + a_{12}p_{12} + \\ &+ a_{13}p_{13} + a_{23}p_{23} = 0 \\ \sum_{i<k} b_{ik}p_{ik} &\equiv b_{01}p_{01} + b_{02}p_{02} + b_{03}p_{03} + b_{12}p_{12} + \\ &+ b_{13}p_{13} + b_{23}p_{23} = 0. \end{aligned}$$

Cada una de estas ecuaciones representa un complejo lineal. Cualquier otro complejo lineal de la forma

$$\sum_{i<k} (\lambda a_{ik} + \mu b_{ik}) p_{ik} = 0$$

comprende también a las rectas de la congruencia dada. Entre estos complejos veamos si hay alguno que sea especial o singular.

Para ello deberá ser

$$(\lambda a_{01} + \mu b_{01})(\lambda a_{23} + \mu b_{23}) + (\lambda a_{02} + \mu b_{02})(\lambda a_{31} + \mu b_{31}) + \\ + (\lambda a_{03} + \mu b_{03})(\lambda a_{12} + \mu b_{12}) = 0 \ ;$$

o sea:

$$[17] \qquad (a)\lambda^2 + 2(ab)\lambda\mu + (b)\mu^2 = 0 \ :$$

habiendo puesto, por brevedad,

$$\begin{aligned} (a) &\equiv a_{01}a_{23} + a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12} \\ (b) &\equiv b_{01}b_{23} + b_{02}b_{31} + b_{03}b_{12} \\ (ab) &\equiv a_{01}b_{23} + a_{02}b_{31} + a_{03}b_{12} + a_{23}b_{01} + a_{31}b_{02} + a_{12}b_{03}. \end{aligned}$$

Se distinguen tres casos según el carácter de las raíces de la ecuación [17].

1º) La ecuación [17] no es una identidad y tiene dos raíces λ, μ distintas. Significa que hay dos complejos singulares distintos que contienen a la congruencia. Tomando estos dos complejos como los [16] que definen la congruencia, sera $(a) = 0$, $(b) = 0$, y como la ecuación [16] no es una identidad por hipótesis, debe ser $(ab) \neq 0$.

Estos complejos singulares se componen de las rectas que cortan, respectivamente, a la recta a de coordenadas a_{ik} y a la

recta b de coordenadas b_{ik}; la condición $(ab) \neq 0$ significa que a y b no se cortan. Por tanto: *si las raíces de la ecuación* [17] *son distintas, la congruencia se compone de todas las rectas que cortan a otras dos que se cruzan. Estas dos rectas se llaman rectas focales de la congruencia.*

2º) La ecuación [17] tiene las dos raíces confundidas. En este caso habrá un solo complejo singular que contiene a la congruencia. Supongamos que sea el primero de los [16] que definen la congruencia. Entonces la ecuación [17] debe tener dos raíces $\mu = 0$ y por tanto debe ser $(a) = 0$, $(ab) = 0$. Tomemos el sistema de coordenadas de manera que el complejo singular $\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0$ esté compuesto por todas las rectas que cortan al eje $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. La ecuación del complejo se reduce entonces a

$$p_{23} = 0 ,$$

o sea, es $a_{23} \neq 0$ y todas las demás $a_{ik} = 0$. La segunda condición [16] nos dice entonces que $b_{01} = 0$. Por tanto, las rectas de la congruencia que pasan por un punto $(x^0{}_0, x^0{}_1, 0, 0)$ estarán en el plano

$$b_{02} x^0{}_0 x_1 + b_{03} x^0{}_0 x_3 + b_{12} x^0{}_1 x_2 + b_{13} x^0{}_1 x_3 = 0$$

de donde

$$\frac{x_2}{x_3} = -\frac{b_{03} x^0{}_0 + b_{13} x^0{}_1}{b_{02} x^0{}_0 + b_{12} x^0{}_1} .$$

Esto prueba que la puntual de los puntos del eje $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ y el haz de los planos, que contienen a las rectas de la congruencia que pasan por ellos, son proyectivos.

Recordando que en toda cuádrica alabeada el haz de los planos tangentes a la superficie en los puntos de una misma generatriz es proyectivo con la puntual de los puntos de contacto, el resultado anterior se puede enunciar: *si las raíces de* [17] *son iguales, la congruencia está formada por todas las rectas que son tangentes a una cuádrica en los puntos de una misma generatriz.*

3º) La ecuación [17] es una identidad. En este caso debe ser $(a) = 0$, $(b) = 0$, $(ab) = 0$. *La congruencia estará formada por todas las rectas que cortan a otras dos que a su vez se cortan, o sea, por todas las rectas del plano, que estas rectas determinan, más todas las rectas del espacio que pasan por el punto de intersección de las mismas.*

7. **Interpretación cinemática.** — El concepto de coordenadas plückerianas y el de complejo lineal de rectas tiene ciertas aplicaciones en cinemática que vamos a mencionar.

Empecemos por ver el significado geométrico de las coordenadas de recta p_{ik} cuando se utilicen coordenadas de puntos

ortogonales, no homogéneas. Si las coordenadas no homogéneas del punto X son x_1, x_2, x_3 y las del punto Y son y_1, y_2, y_3, haciendo en [3] $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, se tiene

$$[18] \quad \begin{aligned} p_{01} &= y_1 - x_1 \ , \quad p_{02} = y_2 - x_2 \ , \quad p_{03} = y_3 - x_3 \ , \\ p_{12} &= x_1y_2 - x_2y_1 \ , \quad p_{13} = x_1y_3 - x_3y_1 \ , \\ p_{23} &= x_2y_3 - x_3y_2 . \end{aligned}$$

Considerando el vector XY de origen X, y extremo Y, vemos que p_{01}, p_{02}, p_{03} son las proyecciones del mismo sobre los tres ejes coordenados, o sea, son las *componentes* del vector, mientras que p_{12}, p_{13}, p_{23} son las componentes del *momento* del mismo respecto del origen.

Si se dan las p_{ik}, salvo un factor de proporcionalidad, hemos visto que determinan una sola recta. Si, en cambio, se dan por su valor exacto, de [18] se deduce que $p^2_{01} + p^2_{02} + p^2_{03}$, es el cuadrado del módulo de un vector situado sobre dicha recta. Por tanto, así como las p_{ik} son coordenadas homogéneas de una recta, ellas son también las coordenadas no homogéneas de un vector, contenido en la recta anterior. Hay que entender que el vector se considera determinado por su longitud y por la recta sobre la cual está, pudiendo desplazarse sobre la misma. Entenderemos, en lo que sigue, que siempre se trata de este tipo de vectores, llamados a veces *vectores deslizantes*. Tal es, por ejemplo, el caso de vectores representativos de fuerzas, cuyo efecto cinemático no cambia al desplazarlos sobre la recta que los contiene.

Para una mejor adaptación a las notaciones usuales en cinemática, pongamos

$$[19] \quad \begin{aligned} p_{01} &= x \ , \quad p_{02} = y \ , \quad p_{03} = z \ , \\ p_{12} &= \mathrm{N} \ , \quad p_{31} = \mathrm{M} \ , \quad p_{23} = \mathrm{L} \ . \end{aligned}$$

La relación [5] se escribe entonces

$$[20] \qquad x\mathrm{L} + y\mathrm{M} + z\mathrm{N} = 0 .$$

Como las componentes x, y, z son proporcionales a los cosenos directores de la recta que contiene el vector, y L, M, N a los cosenos directores de la recta que contiene al momento, esta ecuación expresa que un vector y su momento, respecto de un punto, son perpendiculares.

Además, observemos que, según [18], las componentes del momento son iguales respectivamente al doble de las áreas de las proyecciones sobre los planos coordenados del triángulo formado por el origen y los dos puntos X, Y. Por tanto, el módulo del momento del vector XY respecto del origen, vale

$$[21] \qquad \mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2 = 2 \text{ área } (\mathrm{OXY}),$$

indicando con (OXY) el triángulo de vértices O, X, Y.

Sistemas de vectores. Supongamos un sistema de vectores de componentes x_i, y_i, z_i, L_i, M_i, N_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Formemos las sumas

$$[22] \qquad \begin{gathered} x = \sum_1^n x_i \quad , \quad y = \sum_1^n y_i \quad , \quad z = \sum_1^n z_i \quad , \\ M = \sum_1^n M_i \quad , \quad L = \sum_1^n L_i \quad , \quad N = \sum_1^n N_i \quad . \end{gathered}$$

Las seis cantidades x, y, z, L, M, N se llaman *coordenadas del sistema de vectores* considerado. Dos sistemas de vectores con las mismas coordenadas se llaman equivalentes. Un sistema de vectores no es, en general, equivalente a un vector único, pues en tal caso sus componentes deberían cumplir la relación [20], que en general no se cumplirá.

A las coordenadas x, y, z, L, M, N de un sistema de vectores se les llama también *coordenadas de un bivector.* Cuando ellas satisfacen a la relación [20], sin ser $x = y = z = 0$, el bivector equivale a un vector único. Cuando la condición [20] se cumple por el hecho de ser $x = y = z = 0$, el sistema de vectores o bivector se llama un *par.* En este caso, la dirección definida por las componentes L, M, N, o sea, la dirección cuyos cosenos directores son proporcionales a estas componentes, se llama *eje del par,* el cual está, por tanto, sólo definido por su dirección, pero puede ser cualquier recta que tenga esta dirección.

Con estas definiciones vamos a demostrar que:

Todo sistema de vectores se descompone, de manera única, en un vector y un par cuyo eje tiene la dirección del vector.

Sea, en efecto, el sistema [22] y llamemos x^*, y^*, z^*, L^*, M^*, N^* al vector y 0, 0, 0, $\overline{L}$, $\overline{M}$, $\overline{N}$ al par en que queremos descomponerlo. Deberá ser

$$[23] \qquad \begin{gathered} x = x^* \quad , \quad y = y^* \quad , \quad z = z^* \\ L = L^* + \overline{L} \quad , \quad M = M^* + \overline{M} \quad , \quad N = N^* + \overline{N} \end{gathered}$$

y además, si el eje del par debe tener la dirección del vector,

$$\overline{L} = \lambda x^* = \lambda x \quad , \quad \overline{M} = \lambda y^* = \lambda y \quad , \quad \overline{N} = \lambda z^* = \lambda z .$$

Escribiendo que el vector cumple la condición [20] se tiene

$$\begin{gathered} x^*L^* + y^*M^* + z^*N^* = \\ = x(L - \lambda x) + y(M - \lambda y) + z(N - \lambda z) = 0 \end{gathered}$$

de donde

$$[24] \qquad \lambda = \frac{xL + yM + zN}{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Quedan así determinados de manera única, el *vector*,

$$x, y, z, \quad , \quad L - \lambda x \quad , \quad M - \lambda y \quad , \quad N - \lambda z$$

y el par

$$0 \quad , \quad 0 \quad , \quad 0 \quad , \quad \lambda x \quad , \quad \lambda y \quad , \quad \lambda z \quad ,$$

con λ dado por [24], cuya suma es el bivector o sistema de vectores dado [22]. El valor [24] de λ se llama *parámetro del bivector.*

Momento de un bivector con relación a un eje. Sea un vector XY de origen el punto X y extremo el punto Y, y consideremos una recta o eje e del espacio. Se llama *momento* del vector respecto del eje, a la proyección sobre el eje del momento del vector respecto de cualquier punto del eje.

Para ver que este momento no depende del punto elegido sobre el eje, vamos a buscar una expresión del mismo que también es útil para otros fines.

Sea X′ un punto del eje. Llamando θ al ángulo que forma la normal al plano determinado por los puntos X, X′, Y con el eje e, el momento del vector XY respecto de e, según [21], es

$$[25] \qquad \mathbf{M} = 2 \text{ área } (XX'Y) \cos\theta .$$

Si Y′ es otro punto del eje y consideramos el tetraedro de vértices X, X′, Y, Y′, su volumen es

$$V(X, X', Y, Y') = \frac{1}{3} \text{ área } (XX'Y)\,|X'Y'|.\cos\theta = \frac{1}{6}\mathbf{M}\,|X'Y'$$

de donde

$$[26] \qquad \mathbf{M} = 6\,\frac{V(X, X', Y, Y')}{|X'Y'|} .$$

Por otra parte, si x_i, y_i, x'_i, y'_i $(i = 1, 2, 3)$ son las coordenadas de los puntos X, Y, X′, Y′, respectivamente, es

$$V(X, X', Y, Y') = \frac{1}{} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 1 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & 1 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & 1 \end{vmatrix} .$$

Desarrollando este determinante por menores complementarios de las dos primeras filas y con las notaciones [18] y [19] para las coordenadas de los vectores XY, X′Y′, resulta, sustituyendo en [26],

$$[27] \qquad \mathbf{M} = \frac{Lx' + My' + Nz' + xL' + yM' + zN'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} .$$

Ésta es la expresión del momento de un vector XY respecto de un eje sobre el cual está el vector X′Y′. De esta expresión se deduce que **M** depende del vector X′Y′, pero no varía

si el mismo se desplaza sobre la recta que lo contiene; es decir, **M** depende de la recta e pero no del punto X′ elegido sobre la misma.

Si en lugar de un vector único se trata de un sistema de vectores o bivector, el momento del mismo respecto de un eje está dado por la misma expresión [27], donde x, y, z, L, M, N son ahora las coordenadas del bivector.

Sistemas nulos. Supongamos fijo el sistema de vectores o bivector x, y, z, L, N, M. El conjunto de las rectas e respecto de las cuales el momento del bivector es nulo, estará caracterizado por la ecuación

$$[28] \qquad x'\mathrm{L} + y'\mathrm{M} + z'\mathrm{N} + \mathrm{L}'x + \mathrm{M}'y + \mathrm{N}'z = 0.$$

Recordando que x', y', z', L′, M′, N′ son las coordenadas plückerianas de la recta e, esta expresión nos dice que: *el conjunto de las rectas respecto de las cuales un bivector dado tiene momento nulo, forman un complejo lineal.*

De aquí que a los complejos lineales de rectas se les llame también, a veces, *sistemas nulos*, para indicar que son sistemas de rectas de momento nulo respecto de un bivector fijo.

§ 47. Geometría de círculos

1. **Representación de Möbius de los círculos del plano.** — Para dar un círculo del plano hace falta dar tres números: las dos coordenadas de su centro, más el radio. Esto significa que todos los círculos del plano forman un conjunto o un espacio de tres dimensiones.

Se comprende con ello que ha de ser posible, y aún de muchas maneras diferentes, establecer una correspondencia biunívoca entre los círculos del plano y los puntos del espacio o, por lo menos, los puntos de una parte o región del espacio.

Una manera de hacerlo, que ha resultado muy útil por las consecuencias que permite deducir, es la siguiente, debida a Möbius.

Supongamos un sistema de ejes cartesianos ortogonales x_1, x_2, x_3 y la esfera

$$[1] \qquad x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 - 1 = 0$$

de centro el origen de coordenadas y radio 1, que llamaremos *esfera fundamental.*

Consideremos el punto P(0, 0, 1). Cada punto A del plano $x_3 = 0$, proyectado desde P nos da un punto A′ sobre la esfera fundamental. Esta representación de los puntos A del plano $x_3 = 0$ por los A′ de la esfera [1] se llama *proyección estereográfica* del plano sobre la esfera. Todo círculo c del plano $x_3 = 0$ es proyectado según un círculo c' sobre la esfera (como

demostraremos a continuación). Consideremos el cono circunscrito a la esfera a lo largo del círculo c' y sea X su vértice, el cual se puede definir también como el polo del plano que contiene c' respecto de la esfera fundamental. De esta manera a todo círculo c del plano $x_3 = 0$ corresponde un punto X del espacio (fig. 161).

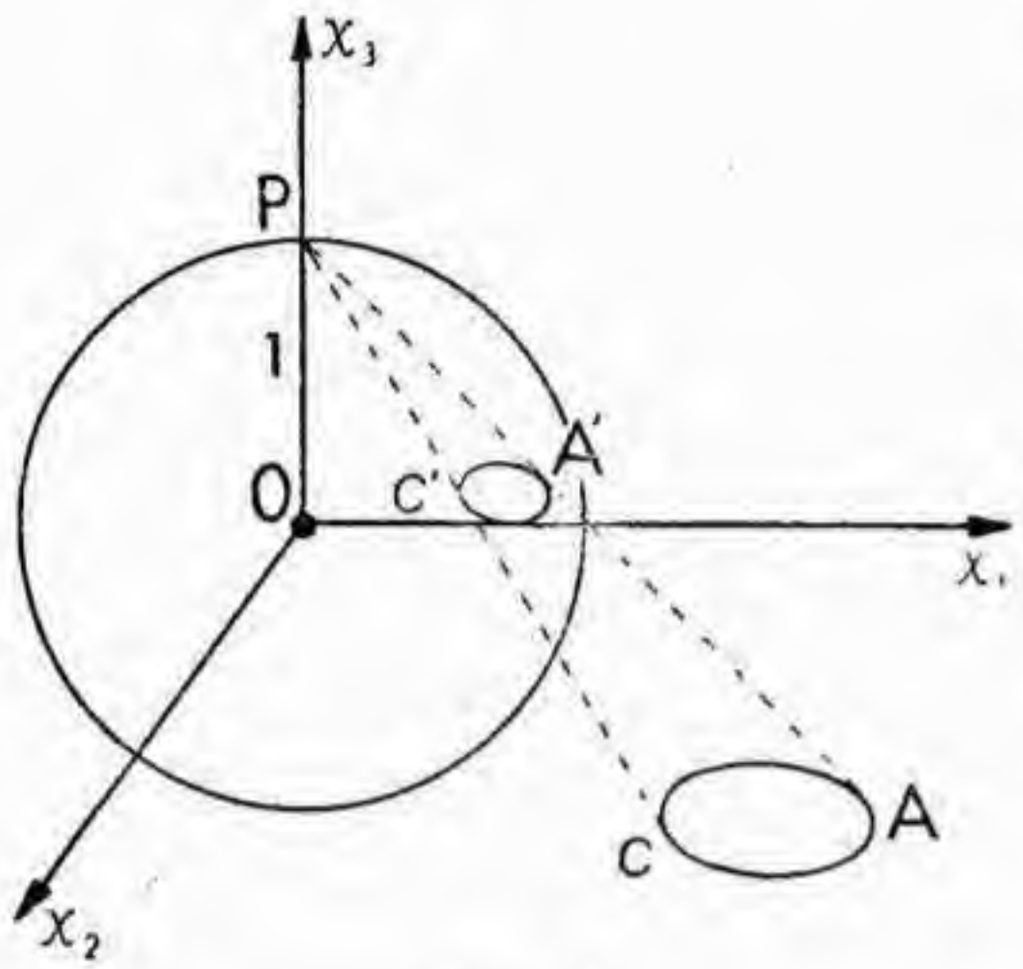

Fig. 161.

Recíprocamente, a cada punto X del espacio, exterior a la esfera fundamental, corresponde sobre la esfera el círculo c' de contacto del cono circunscrito de vértice X, el cual, al proyectarlo desde P, nos da un círculo c sobre el plano $x_3 = 0$.

La representación de MÖBIUS consiste en hacer corresponder al círculo c del plano $x_3 = 0$, el punto X del espacio.

Veamos las expresiones analíticas que ligan las coordenadas de X con las del centro y el radio de c.

Llamemos ξ, η a las coordenadas de los puntos del plano $x_3 = 0$. Un círculo de centro (α, β) y radio R, tiene por ecuación

$$[2] \qquad \xi^2 + \eta^2 - 2\alpha\xi - 2\beta\eta + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0.$$

Para hallar la ecuación del cono que proyecta este círculo desde el punto P(0, 0, 1), basta observar que las ecuaciones de la recta que une P(0, 0, 1) con el punto variable (ξ, η) son

$$[3] \qquad \frac{x_1}{\xi} = \frac{x_2}{\eta} = \frac{1 - x_3}{1}.$$

Eliminando ξ, η entre estas ecuaciones y la [2] queda

$$[4] \qquad x^2_1 + x^2_2 - 2\alpha(1 - x_3)x_1 - 2\beta(1 - x_3)x_2 + \\ + (\alpha^2 + \beta^2 - R^2)(1 - x^2_3) = 0$$

que es la ecuación del cono buscado.

La intersección de la esfera fundamental [1] con este cono equivale a la intersección de la misma con el plano

$$[5] \qquad 2\alpha x_1 + 2\beta x_2 - [1 - (\alpha^2 + \beta^2 - R^2)]x_3 - \\ - [1 + \alpha^2 + \beta^2 - R^2] = 0$$

como se deduce sustituyendo en [4] la expresión $x^2_1 + x^2_2 = 1 - x^2_3$ deducida de [1] y sacando factor común $1 - x_3$.

Como un plano corta a la esfera según un círculo, esto nos demuestra la propiedad enunciada de que la proyección desde P de un círculo del plano $x_3 = 0$ sobre la esfera [1] es también un círculo.

Queremos hallar, finalmente, el polo del plano [5] respecto de la esfera fundamental. Para ello recordemos que el plano polar de un punto $x^0{}_1$, $x^0{}_2$, $x^0{}_3$, respecto de dicha esfera, es

$$x^0{}_1 x_1 + x^0{}_2 x_2 + x^0{}_3 x_3 - 1 = 0 .$$

Por tanto, comparando esta ecuación con la [5], se deduce que las coordenadas x_1, x_2, x_3 del punto X, polo del plano [5], satisfacen a las ecuaciones

$$\frac{x_1}{2\alpha} = \frac{x_2}{2\beta} = \frac{-x_3}{1-(\alpha^2+\beta^2-R^2)} = \frac{1}{1+(\alpha^2+\beta^2-R^2)}$$

de donde

$$[6] \quad x_1 = \frac{2\alpha}{1+(\alpha^2+\beta^2-R^2)} , \quad x_2 = \frac{2\beta}{1+(\alpha^2+\beta^2-R^2)}$$

$$x_3 = \frac{(\alpha^2+\beta^2-R^2)-1}{1+(\alpha^2+\beta^2-R^2)} .$$

Por tanto:

La representación de MÖBIUS *consiste en hacer corresponder a cada círculo del plano* $x_3 = 0$, *de centro* (α, β) *y radio* R, *el punto* X *del espacio de coordenadas* x_1, x_2, x_3 *dadas por* [6].

Recíprocamente, observando que es

$$1 - x_3 = \frac{2}{1+(\alpha^2+\beta^2-R^2)}$$

y por tanto

$$x_1 = \alpha(1-x_3) \quad , \quad x_2 = \beta(1-x_3)$$

y también

$$1 + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = \frac{2}{1-x_3}$$

de donde

$$R^2 = 1 + \alpha^2 + \beta^2 - \frac{2}{1-x_3} ,$$

se deduce

$$[7] \quad \alpha = \frac{{}^{\varepsilon}x - {}^{\iota}x}{{}^{\iota}x} , \quad \beta = \frac{1-x_3}{x_2} ,$$

$$R^2 = \frac{x^2{}_1 + x^2{}_2 + x^2{}_3 - 1}{(1-x_3)^2} ,$$

fórmulas que nos dan las coordenadas del centro y el radio del círculo c en función de las coordenadas del punto representativo.

OBSERVACIONES: 1. Los *puntos* del plano $x_3 = 0$ se consideran como círculos de radio nulo. Sus puntos representativos son entonces los puntos de la esfera fundamental, cuyas coordenadas en función de las del punto original se pueden obtener de [6] haciendo R = 0.

2. Haciendo la misma construcción geométrica con las rectas del plano $x_3 = 0$, a cada una de ellas corresponde un círculo sobre la esfera que pasa por P y por tanto su punto representativo está sobre el plano $x_3 = 1$. Veamos las relaciones entre las restantes coordenadas de este punto y los coeficientes de la recta.

Sea la recta

$$a\xi + b\eta + c = 0$$

del plano $x_3 = 0$. El plano que pasa por ella y por P(0, 0, 1) es

$$ax_1 + bx_2 + c(1 - x_3) = 0$$

y por tanto las coordenadas x_1, x_2, 1 de su polo respecto de la esfera fundamental satisfacen a las ecuaciones

$$[8] \qquad \frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{b} = \frac{1}{-c}$$

que serán *las relaciones que ligan los coeficientes a, b, c de una recta del plano $x_3 = 0$ y las coordenadas x_1, x_2 de su punto representativo.*

2. **Coordenadas tetracíclicas.** — Para tener en cuenta que el punto representativo X de un círculo o de una recta del plano $x_3 = 0$ puede ser un punto del infinito del espacio, muchas veces es conveniente utilizar coordenadas homogéneas.

Introduciendo una nueva coordenada x_0 en [6] se puede poner

$$[9] \qquad \begin{aligned} x_1 &= \varrho\alpha \quad , \quad x_2 = \varrho\beta \quad , \quad x_3 = \frac{\varrho}{2}(\alpha^2 + \beta^2 - R^2 - 1) \quad , \\ x_0 &= \frac{\varrho}{2}(1 + \alpha^2 + \beta^2 - R^2) \quad . \end{aligned}$$

siendo ϱ un factor de proporcionalidad. Estas coordenadas homogéneas para los círculos del plano, se llaman *coordenadas tetracíclicas.*

Para las rectas del plano $x_3 = 0$, según [8], las coordenadas tetracíclicas serán

$$[10] \qquad x_1 = \varrho a \quad , \quad x_2 = \varrho b \quad , \quad x_3 = 0 \quad , \quad x_0 = -\varrho c .$$

3. **Fórmulas útiles en la representación de Möbius.** — Sean X, Y los puntos representativos de dos círculos del plano $x_3 = 0$. Para abreviar hablaremos de los círculos X, Y, enten-

diendo que nos referimos a los círculos cuyos puntos representativos son estos puntos.

Siendo (x_0, x_1, x_2, x_3) las coordenadas tetracíclicas de X e (y_0, y_1, y_2, y_3) las de Y, introduzcamos las notaciones abreviadas

$$[11] \qquad \begin{aligned} (XX) &\equiv x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 - x^2_0 \\ (XY) &\equiv x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_0y_0 . \end{aligned}$$

Para interpretar geométricamente estas expresiones, observemos que sustituyendo los valores [9] y los análogos para Y, se tiene

$$[12] \qquad \begin{aligned} (XY) = \varrho_1\varrho_2[\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \\ + \tfrac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2 - R^2 - 1)(\alpha^2_1 + \beta^2_1 - R^2_1 - 1) - \\ - \tfrac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2 - R^2 + 1)(\alpha^2_1 + \beta^2_1 - R^2_1 + 1)] = \\ = \tfrac{1}{2}\varrho\varrho_1[-(\alpha - \alpha_1)^2 - (\beta - \beta_1)^2 + R^2 + R^2_1] \quad , \end{aligned}$$

siendo (α_1, β_1) las coordenadas del centro del círculo Y, y R_1 su radio.

En particular, si $X \equiv Y$, será $(XX) = \varrho^2R^2$ y por tanto

$$[13] \qquad \varrho = \frac{\sqrt{(XX)}}{R}$$

Otra expresión para ϱ que se deduce inmediatamente de [9] es

$$[14] \qquad \varrho = x_0 - x_3 \quad ,$$

la cual se utilizará cuando sea $R = 0$, es decir, cuando X se reduzca a un punto.

Si Y es una recta (es decir, es el punto representativo de una recta), según [10] será

$$[15] \qquad \begin{aligned} (XY) = \varrho\varrho_1[a\alpha + b\beta - \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 - R^2 - 1)c + \\ + \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 - R^2 + 1)c] = \varrho\varrho_1(a\alpha + b\beta + c). \end{aligned}$$

Además,

$$[16] \qquad (YY) = \varrho^2_1(a^2 + b^2) \quad , \quad \varrho_1 = \frac{\sqrt{(YY)}}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$

Por tanto, llamando d_{XY} a la distancia del centro del círculo X a la recta Y, por ser

$$[17] \qquad d_{XY} = \frac{a\alpha + b\beta + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

se tendrá, según [15], [13] y [16],

$$[18] \qquad (XY) = \frac{\sqrt{(XX)(YY)}}{R}\, d_{XY} \quad ,$$

o bien, utilizando [14],

[19] $$(XY) = (x_0 - x_3)\sqrt{(YY)}\,d_{XY}.$$

De las fórmulas anteriores se deduce:

1º) *Condición para que un punto pertenezca a un círculo.* Si Y es un punto (o sea el punto representativo de un punto, círculo de radio nulo), será $R_1 = 0$ y entonces [12] nos dice que: *la condición necesaria y suficiente para que un círculo* X *pase por el punto* Y *es que sea* $(XY) = 0$.

2º) *Ángulo de dos círculos.* Si los círculos X, Y se cortan según el ángulo θ, por ser

$$(\alpha - \alpha_1)^2 + (\beta - \beta_1)^2 = R^2 + R^2_1 - 2RR_1 \cos\theta$$

de [12] y [13] se deduce

[20] $$\cos\theta = \frac{(XY)}{\sqrt{(XX)(YY)}}.$$

De aquí: *la condición necesaria y suficiente para que dos círculos sean ortogonales es que sea* $(XY) = 0$.

Teniendo en cuenta [18], esta fórmula vale también para una recta y un círculo.

3º) *Potencia de un punto respecto de un círculo.* Si Y se reduce a un punto, llamando p_{YX} a la potencia de Y respecto del círculo X, es

$$p_{YX} = (\alpha - \alpha_1)^2 + (\beta - \beta_1)^2 - R^2$$

y por tanto, según [12] y [14],

[21] $$p_{YX} = \frac{-2(XY)}{(x_0 - x_3)(y_0 - y_3)}.$$

4º) *Distancia entre dos puntos.* En particular, si X se reduce también a un punto, la potencia pasa a ser el cuadrado de la distancia d_{XY} entre los puntos X, Y (es decir, entre los puntos del plano $x_3 = 0$ cuyos puntos representativos son X, Y). Por tanto,

[22] $$d^2_{XY} = \frac{-2(XY)}{(x_0 - x_3)(y_0 - y_3)}.$$

5º) *Distancia de un punto a una recta.* Si X es un punto e Y una recta, de [19] se deduce que la distancia de X a Y vale

[23] $$d_{XY} = \frac{(XY)}{(x_0 - x_3)\sqrt{(YY)}}.$$

4. Identidad de Darboux-Frobenius. — Sean diez círculos

[24] $$X, Y, Z, S, T \quad ; \quad X', Y', Z', S', T'.$$

Consideremos el determinante siguiente formado con las coordenadas tetracíclicas de los mismos:

[25] $$D(X, Y, Z, S, T) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & ix_0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & iy_0 & 0 \\ z_1 & z_2 & z_3 & iz_0 & 0 \\ s_1 & s_2 & s_3 & is_0 & 0 \\ t_1 & t_2 & t_3 & it_0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

y el análogo $D(X', Y', Z', S', T') = 0$. Multiplicando por filas ambos determinantes, se tiene la identidad

[26] $$\begin{vmatrix} (XX') & (XY') & (XZ') & (XS') & (XT') \\ (YX') & (YY') & (TZ') & (YS') & (YT') \\ (ZX') & (ZY') & (YZ') & (ZS') & (ZT') \\ (SX') & (SY') & (ZZ') & (SS') & (ST') \\ (TX') & (TY') & (SZ') & (TS') & (TT') \end{vmatrix} = 0$$

que es la llamada identidad de DARBOUX-FROBENIUS.

Veamos algunos teoremas deducidos como casos particulares de esta identidad general.

1º) Sean X', Y', Z', S' cuatro puntos (círculos del plano $x_3 = 0$ de radio nulo) tales que no sean concíclicos ni haya tres en línea recta. Sea X el círculo dterminado por Y', Z', S'; Y el círculo determinado por X', Z', S' y análogamente Z, S los círculos determinados por los puntos de distinto nombre con acento.

Según nº 3 de este mismo §, será

$$\begin{aligned} (XY') &= (XZ') = (XS') = 0 \\ (YX') &= (YZ') = (YS') = 0 \\ (ZX') &= (ZY') = (ZS') = 0 \\ (SX') &= (SY') = (SZ') = 0. \end{aligned}$$

Supongamos, además, que T y T' coinciden con la recta del infinito del plano (o sea, son los puntos representativos de la recta del infinito del plano $x_3 = 0$). Según [8] será

$$\begin{aligned} t_1 = t_2 = 0 \quad &, \quad t_3 = t_0 = 1 \\ t'_1 = t'_2 = 0 \quad &, \quad t'_3 = t'_0 = 1 \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} (XT') &= x_3 - x_0 \quad , \quad (YT') = y_3 - y_0 \quad , \quad \ldots, \\ (TX') &= x'_3 - x'_0 \quad , \quad (TY') = y'_3 - y'_0 \quad , \quad \ldots \end{aligned}$$

y por tanto la identidad fundamental se escribe

$$[27] \quad \begin{vmatrix} (XX') & 0 & 0 & 0 & x_3 - x_0 \\ 0 & (YY') & 0 & 0 & y_3 - y_0 \\ 0 & 0 & (ZZ') & 0 & z_3 - z_0 \\ 0 & y'_3 - y'_0 & z'_3 - z'_0 & (SS') & s_3 - s_0 \\ x'_3 - x'_0 & 0 & 0 & s'_3 - s'_0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Recordando ahora la expresión [21] de la potencia de un punto X′ (y análogamente Y′, Z′, S′) respecto de un círculo X (y análogamente Y, Z, S), resulta que el determinante anterior se puede escribir

$$\begin{vmatrix} p_{X'X} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & p_{Y'Y} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p_{Z'Z} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p_{S'S} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

o sea

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/p_{X'X} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/p_{Y'Y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/p_{Z'Z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/p_{S'S} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/p_{X'X} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/p_{Y'Y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/p_{Z'Z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/p_{S'S} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{1}{p_{X'X}} + \frac{1}{p_{Y'Y}} + \frac{1}{p_{Z'Z}} + \frac{1}{p_{S'S}}\right) \end{vmatrix} = 0$$

y por tanto

$$[28] \qquad \frac{1}{p_{X'X}} + \frac{1}{p_{Y'Y}} + \frac{1}{p_{Z'Z}} + \frac{1}{p_{S'S}} = 0 \ ,$$

o sea, *dados cuatro puntos* X′, Y′, Z′, S′ *en un plano, la suma de las inversas de las potencias de cada uno respecto del círculo determinado por los otros tres, es igual a cero.*

Se supone que los cuatro puntos no son concíclicos ni hay tres en línea recta. Además, la potencia hay que tomarla con el signo que le corresponde, positiva si el punto es exterior al círculo y negativa si es interior.

2º) Si los diez círculos [24] se reducen a puntos, dividiendo la primera fila del determinante [26] por $x_0 - x_3$, la segunda fila por $y_0 - y_3$, etc., y la primera columna por $x'_0 - x'_3$, la segunda columna por $y'_0 - y'_3$, etc., teniendo en cuenta [22] resulta:

Entre todo par de grupos de cinco puntos del plano existe la relación

$$[29] \qquad \begin{vmatrix} d^2_{XX'} & d^2_{XY'} & d^2_{XZ'} & d^2_{XS'} & d^2_{XT'} \\ d^2_{YX'} & d^2_{YY'} & d^2_{YZ'} & d^2_{YS'} & d^2_{YT'} \\ d^2_{ZX'} & d^2_{ZY'} & d^2_{ZZ'} & d^2_{ZS'} & d^2_{ZT'} \\ d^2_{SX'} & d^2_{SY'} & d^2_{SZ'} & d^2_{SS'} & d^2_{ST'} \\ d^2_{TX'} & d^2_{TY'} & d^2_{TZ'} & d^2_{TS'} & d^2_{TT'} \end{vmatrix} = 0$$

donde los diversos términos son las distancias entre los puntos respectivos

En particular, tomando $X \equiv X'$, $Y \equiv Y'$, ..., resulta:

Entre las distancias entre sí de cinco puntos cualesquiera del plano existe la relación

$$[30] \qquad \begin{vmatrix} 0 & d^2_{XY} & d^2_{XZ} & d^2_{XS} & d^2_{XT} \\ d^2_{YX} & 0 & d^2_{YZ} & d^2_{YS} & d^2_{YT} \\ d^2_{ZX} & d^2_{ZY} & 0 & d^2_{ZS} & d^2_{ZT} \\ d^2_{SX} & d^2_{SY} & d^2_{SZ} & 0 & d^2_{ST} \\ d^2_{TX} & d^2_{TY} & d^2_{TZ} & d^2_{TS} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

3º) Supongamos que los puntos X, Y, Z, S se mantienen fijos y que el punto T se aleja hacia el infinito. Dividiendo la última fila del determinante anterior y la última columna por d^2_{XT} y observando que en el límite es

$$\frac{d_{YT}}{d_{XT}} = \frac{d_{ZT}}{d_{XT}} = \frac{d_{ST}}{d_{XT}} = 1$$

resulta que *entre las distancias de cuatro puntos cualesquiera del plano existe siempre la relación*

$$[31] \qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{XY} & d_{XZ} & d_{XS} & 1 \\ d_{YX} & 0 & d_{YZ} & d_{YS} & 1 \\ d_{ZX} & d_{ZY} & 0 & d_{ZS} & 1 \\ d_{SX} & d_{SY} & d_{SZ} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

5. **Coordenadas tetracíclicas normalizadas. Combinaciones lineales de círculos.** — Recordemos que las coordenadas tetracíclicas son coordenadas homogéneas. Por tanto, siempre que se trate de un círculo propiamente dicho, de radio $R \neq 0$, o bien de una recta, distinta de la recta impropia, en [13] y [16] se podrá elegir el factor de proporcionalidad ϱ ó ϱ_1 de manera que siempre sea

$$[32] \qquad (XX) \equiv x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 - x^2_0 = 1.$$

Las coordenadas x_0, x_1, x_2, x_3 que satisfacen a esta condición las llamaremos *coordenadas tetracíclicas normalizadas*. En este número usaremos exclusivamente estas coordenadas, para

los círculos y las rectas. Los puntos Z, o círculos de radio nulo, no se pueden normalizar; ellos están caracterizados por tener, según [12],

$$[33] \qquad (ZZ) \equiv z^2_1 + z^2_2 + z^2_3 - z^2_0 = 0 .$$

Sean A, B dos círculos de coordenadas respectivas a_i, b_i $(i = 0, 1, 2, 3)$, ya normalizadas, de manera que es $(AA) = (BB) = 1$. Representaremos por $\lambda A + \mu B$ al círculo cuyas coordenadas son

$$[34] \qquad \frac{\lambda a_i + \mu b_i}{\sqrt{(\lambda A + \mu B,\ \lambda A + \mu B)}} = \frac{\lambda a_i + \mu b_i}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu (AB)}}$$
$$(i = 0, 1, 2, 3)$$

donde el denominador es necesario para que se satisfaga la condición [32].

El conjunto de círculos $\lambda A + \mu B$, al variar λ, μ, constituye un *haz de círculos*. Todos ellos pasan por los puntos comunes a A y B; en efecto, si P es uno de estos puntos, según nº 3-1º, es $(AP) = (BP) = 0$ y por tanto es también $(\lambda A + \mu B, P) = \lambda (AP) + \mu (BP) = 0$ cualesquiera que sean λ, μ.

Esto prueba que un haz de círculos es el conjunto de círculos que pasan por dos puntos fijos (reales o imaginarios); por tanto ellos tienen su centro sobre una misma recta.

Todo haz de círculos contiene dos puntos (círculos de radio nulo) llamados *puntos límites del haz*. Para obtenerlos, según [33], bastará resolver la siguiente ecuación en λ, μ,

$$[35] \qquad (\lambda A + \mu B,\ \lambda A + \mu B) = \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu (AB) = 0 .$$

Estos puntos límites estarán sobre la recta de los centros de los círculos del haz, puesto que en realidad son círculos del mismo, si bien de radio nulo.

Según [20] y la condición [32], el ángulo θ entre dos círculos A, X ó entre un círculo A y una recta Y, estará dado por

$$[36] \qquad (AX) = \cos\theta \quad , \quad (AY) = \cos\theta .$$

Los círculos ortogonales al haz $\lambda A + \mu B$ estarán caracterizados por ser

$$(\lambda A + \mu B, X) = \lambda (AX) + \mu (BX) = 0 \quad ,$$

condición que debe verificarse para todo par λ, μ, en particular para las soluciones de [35] y, por tanto, *los círculos ortogonales a un haz, pasan por los puntos límites del mismo.*

Sean dos círculos A, B. Una recta Y que sea tangente a los dos, por ser $\theta = 0$, estará determinada por las ecuaciones

$$[37] \qquad (AY) = 1 \quad , \quad (BY) = 1 \quad , \quad (YY) = 1 .$$

Las dos primeras son lineales y la segunda cuadrática en

las incógnitas a, b, c, coeficientes de la recta Y. Resolviendo las dos primeras respecto de dos de las incógnitas y sustituyendo en la tercera, resultará una ecuación de segundo grado que tendrá, por tanto, dos soluciones. Es decir, el sistema [37] nos da dos tangentes comunes a los círculos A, B. El punto de intersección de estas tangentes es el *centro de semejanza directa* de A, B.

Otras dos tangentes se obtienen considerando el sistema

$$[38] \qquad (AY) = -1 \quad , \quad (BY) = 1 \quad , \quad (YY) = 1$$

puesto que para $\theta = \pi$, también la recta es tangente. Igual que antes, este sistema tiene dos soluciones y su punto de intersección es el llamado *centro de semejanza inversa* de los dos círculos.

Puesto que, según [19], el signo de (AY) es el de la distancia del centro del círculo A a la recta Y, en el caso [37] las dos tangentes dejan a los dos círculos A, B de un mismo lado, mientras que en el caso [38], ambas tangentes dejan un círculo a distinto lado del otro. Los centros de semejanza definidos coinciden, por tanto, con los definidos en la geometría elemental.

Observemos, además, que no hay más tangentes comunes, puesto que si se sustituyen el sistema [37] o el [38] por los otros casos posibles $(AY) = -1$, $(BY) = -1$ ó bien $(AY) = 1$, $(BY) = -1$, las rectas resultantes son las mismas anteriores, puesto que sólo se han sustituído los coeficientes a, b, c por $-a$, $-b$, $-c$ (o sea, la recta Y por la $-Y$).

Dentro del haz $\lambda A + \mu B$, consideremos los círculos $A - B$ y $A + B$. El primero corta ortogonalmente a las dos tangentes definidas por el sistema [37], puesto que

$$[39] \qquad (A - B, Y) = (AY) - (BY) = 0 \quad ,$$

por tanto, tiene su centro en su punto de intersección, o sea, en el centro de semejanza directa.

El segundo círculo $A + B$ corta ortogonalmente a las dos tangentes definidas por [38], puesto que

$$[40] \qquad ((A + B), Y) = (AY) + (BY) = 0 \quad ,$$

y por tanto tiene su centro en el centro de semejanza inversa de los dos círculos A, B.

Este hecho lo vamos a utilizar en el número siguiente.

6. **El problema de Apolonio: círculo tangente a otros tres.** — El famoso problema de APOLONIO (250 a 200 antes de J. C.) consiste en *trazar un círculo que sea tangente a otros tres dados.*

Ya vimos una solución de este problema utilizando la inversión (§ 22, nº 2), pero la representación de los círculos por

sus coordenadas tetracíclicas permite dar una solución analítica del problema, de la cual se deduce también otra construcción gráfica.

Sean los tres círculos A, B, C. Según [36], el círculo buscado X estará determinado por las ecuaciones

$$[41]\quad (AX)=1\ ,\quad (BX)=1\ ,\quad (CX)=1\ ,\quad (XX)=1.$$

Analíticamente, el problema consiste en resolver este sistema de ecuaciones en las insógnitas x_0, x_1, x_2, x_3. Las tres primeras ecuaciones son lineales; ellas permiten resolver el sistema respecto, por ejemplo, de x_1, x_2, x_3, y entonces la última ecuación dará una ecuación de segundo grado para x_0. Resultan, por consiguiente, dos soluciones.

Como el sistema [41] puede sustituirse por cualquiera de los

$$[42]\quad \begin{array}{llll} (AX)=-1 & (BX)=1 & (CX)=1 & (XX)=1 \\ (AX)=1 & (BX)=-1 & (CX)=1 & (XX)=1 \\ (AX)=1 & (BX)=1 & (CX)=-1 & (XX)=1 \end{array}$$

y en cada caso se tienen dos soluciones, resulta que *el problema tiene ocho soluciones (reales o imaginarias)*.

Las otras combinaciones con los signos de los segundos miembros de [41] no dan círculos diferentes, puesto que al sustituir X por —X, según [9], equivale a sustituir ϱ por $-\varrho$, o bien, según la ecuación [13], a sustituir R por —R, lo cual no cambia el círculo.

Queda así resuelto el problema analíticamente.

Para resolverlo geométricamente, observemos lo siguiente.

Del sistema [41] se deduce que el círculo X es ortogonal al haz de círculos $\lambda(A-B)+\mu(A-C)$, puesto que

$$(\lambda(A-B)+\mu(A-C), X) = 0.$$

Por tanto, según vimos en el número anterior, X pasará por los puntos límites de dicho haz, los cuales se encuentran sobre la recta que contiene los centros de los círculos del haz. Esta recta es conocida, pues debe contener el centro del círculo A — B, correspondiente a $\mu = 0$, y el del círculo A — C, correspondiente a $\lambda = 0$. Como estos centros, vimos que eran los centros de semejanza directa de los círculos A, B y A, C respectivamente, bastará trazar la recta que los une.

Por otra parte, un círculo ortogonal al haz $\lambda(A-B)+$ $+\mu(A-C)$ fácil de trazar es el H ortogonal a los tres círculos A, B, C. En efecto, este círculo tiene el centro en el centro radical de los tres círculos y tiene por radio la longitud de cualquier tangente trazada por este punto a uno de los círculos A, B, C.

Por tanto, los puntos límites del haz $\lambda(A-B)+\mu(A-C)$

son los de intersección de la recta que une los dos centros de semejanza directa de A, B y A, C con el círculo H.

El círculo buscado será el que pase por estos puntos y sea tangente a uno cualquiera de los círculos A, B, C. Queda así el problema reducido a trazar un círculo que pase por dos puntos, sean P, Q, y sea tangente a un círculo dado, sea el A. Para ello basta trazar un círculo cualquiera que pase por P, Q y corte a A en dos puntos P_1, Q_1. Sea L el punto de intersección de la recta PQ con la P_1Q_1. Por L se trazan las tangentes a A, sean R_1 y R_2 los puntos de contacto. Los círculos determinados por los puntos P, Q, R_1 y P, Q, R_2 satisfacen las condiciones del problema, pues son tangentes a A por ser $LR^2_1 = LP_1 . LQ_1 = LP . LQ$ y análogamente $LR^2_2 = LP_1 . LQ_1 = LP . LQ$.

Resultan así dos soluciones del problema de Apolonio.

Si en vez del sistema [41] hubiéramos partido de otro de los [42], en vez de la recta que une los centros de semejanza directa de A, B y A, C habríamos tenido que tomar las rectas análogas con los centros de semejanza inversa o uno directo y otro inverso, obteniendo cada vez dos soluciones. En total resultan las ocho soluciones del problema de Apolonio predichas analíticamente. Naturalmente que algunas de estas soluciones pueden resultar imaginarias.

7. Nota bibliográfica. — De manera completamente análoga a como hemos estudiado la geometría de los círculos se puede estudiar la llamada "geometría de las esferas", representando de manera conveniente cada esfera del espacio ordinario por un punto del espacio de cuatro dimensiones. Se obtienen resultados análogos a los anteriores tan sólo con el cuidado de añadir, cada vez, una variable más.

Sobre estas cuestiones se puede ver el libro

J. L. COOLIDGE, *A treatise on the circle and the sphere*, Oxford, 1916. que aún siendo de carácter elemental contiene muchos e interesantes resultados dispersos sobre esta teoría.

Desde un punto de vista más superior está el importante volumen

W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, vol. III, Berlín, 1927.

Las nociones fundamentales de las geometrías de los espacios de rectas y círculos se encuentran tratadas muy clara y elegantemente en el librito

L. BIEBERBACH, *Einleitung in die Höhere Geometrie*, Leipzig und Berlín, 1933.

Desde otro punto de vista, con más ejemplos y aplicaciones y de carácter más elemental, existe el libro

W. GRAUSTEIN, *Introduction to higher Geometry*, New York, 1944.

Sobre las mismas cuestiones, pero con un simbolismo y método de cálculo especial que no hace fácil la lectura sin un estudio previo del mismo, se tiene

H. G. FORDER, *The Calculus of Extension*, Cambridge, 1941.

Históricamente, una de las memorias más importantes y hermosas sobre el particular es la siguiente:

G. DARBOUX, *Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de spheres dans le plan et dans l'espace*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Superieur, Segunda Serie, vol. I, 1872.

CAPÍTULO XI

NOMOGRAFÍA

§ 48. NOMOGRAMAS DE LÍNEAS CONCURRENTES

1. **Generalidades.** — La Nomografía (de *nomos* = ley) es la rama del cálculo gráfico cuyo objeto es la construcción de tablas gráficas o nomogramas que, construídos de una vez por todas, permiten mediante simples lecturas la determinación de los valores numéricos que satisfacen a una determinada fórmula o ecuación.

La nomografía constituye, pues, un capítulo de la matemática de aproximación. De ahí que, además de los conocimientos matemáticos indispensables, la construcción de los nomogramas exige tener en cuenta los factores que intervienen en todo problema de matemática aproximada: conveniencia práctica de la construcción del nomograma; elección adecuada entre eventuales tipos diferentes de nomogramas para una misma fórmula; grado de aproximación de los resultados, etc.

2. **Escalas y módulos.** — Se denomina *escala* todo sistema de puntos acotados, construído de acuerdo con una cierta ley sobre una línea cualquiera. Como las escalas con soporte curvilíneo pueden obtenerse, por proyección, a partir de escalas con soporte rectilíneo, sólo nos referiremos a estas últimas.

Sea entonces una función $f(z)$ uniforme en el intervalo (a, b), y una recta r sobre la cual, a partir de un origen O tomamos segmentos x proporcionales a los valores de $f(z)$ en ese intervalo:

$$x = mf(z).$$

Si se marca con un pequeño trazo normal a r los extremos de los segmentos x, escribiendo sobre ellos el correspondiente valor numérico de z (*cota*), se obtiene, en general, una *escala funcional* y, en este caso, la escala de la función $f(z)$. El factor m de proporcionalidad es el *módulo* de la escala.

En general se marcan con trazos únicamente los puntos de la escala que corresponden a valores de z en progresión aritmética (*escala normal*), acotándose los trazos de trecho en trecho y facilitando la lectura de los demás puntos mediante trazos de longitud diferente.

El incremento constante h de z se denomina *escalón*, e *intervalo* la distancia i entre dos trazos consecutivos. Con excepción de la escala de la función lineal, todas las demás escalas normales tienen intervalos desiguales que varían con continuidad, excepto en los puntos donde, por hacerse i demasiado pequeño, es necesario modificar h.

El escalón h mide la aproximación que se obtiene con la escala. Esta aproximación puede afinarse mediante la *interpolación visual* que generalmente permite apreciar $h/5$ siempre que $i \geqslant 1$ mm.

De las definiciones anteriores se deduce que, si L es la longitud total de la escala de $f(z)$ entre las cotas a y b de la variable,

[1] $$L = m(f(b) - f(a))$$

é $$i = m(f(z+h) - f(z))$$

o, aproximadamente, aplicando el teorema del valor medio,

[2] $$i = mhf'(z).$$

Los errores: absoluto α y relativo ε que se cometen al efectuar las lecturas con interpolación visual serán, respectivamente:

[3] $$\alpha = h/5 \quad , \quad \varepsilon = \alpha/z.$$

Las expresiones [1] a [3] permiten calcular todos los elementos necesarios para la construcción de escalas funcionales. Los valores de x, L, m é i se miden con la misma unidad de medida, que, en general, se adopta el milímetro. Para que pueda efectuarse la interpolación visual, el valor de i en el nomograma a utilizarse no ha de ser inferior al milímetro.

De las escalas de funciones simples: potencias, logaritmos, exponenciales, funciones circulares, etc., las más frecuentes son: la *escala métrica*

$$f(z) = z \quad ;$$

la *escala logarítmica*

$$f(z) = \log z \quad ;$$

mientras que de las escalas de combinación de funciones se presentan con frecuencia la *escala homográfica*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad ; \quad (ad \neq bc),$$

y, más general, la *escala proyectiva*

$$F(z) = \frac{af(z)+b}{cf(z)+d} \quad ; \quad (ad \neq bc),$$

así llamada por cuanto las escalas de $f(z)$ y de $F(z)$ constitu-

yen dos series rectilíneas proyectivas en las que se corresponden los puntos de igual cota.

En cuanto a la construcción de las escalas funcionales, basta llevar sobre el soporte los valores dados por las tablas numéricas de esas funciones, eventualmente multiplicados por el módulo que en general se trata de que sea un número sencillo, preferentemente una potencia de 10.

Para la construcción de las escalas proyectivas se puede utilizar un método gráfico: construída la escala de $f(z)$, la escala de $F(z)$ se obtiene por una simple perspectividad si se ubican los soportes respectivos de manera que su punto de intersección tenga igual cota; por tener un elemento unido, las series rectilíneas son entonces perspectivas, obteniéndose como centro de perspectividad la intersección de las alineaciones que unen dos pares de puntos, uno de cada escala, de igual cota.

Para la construcción de escalas de funciones de la forma $\varphi(z) = f(F(z))$ se calcula, numérica o gráficamente, la función $u = F(z)$, y se construye la escala de la $f(u)$, escribiendo en lugar de la cota u la cota z respectiva. Así, si se desea construir la escala de la función $\log \operatorname{sen} z$ se dibuja una escala logarítmica donde, por ejemplo, en lugar de las cotas 0,256; 0,5; 0,707; 0,866; 0,966; 1, se escribe 15°; 30°; 45°; 60°; 75°; 90°, etc.

En Nomografía se acostumbra representar las variables, cuyos valores numéricos se determinan mediante los nomogramas, con las letras z_1, z_2, z_3, . . ., y las funciones de esas variables mediante una letra con uno o más subíndices que indican las variables que contiene. Así f_1 es una ecuación de z_1; g_{12} es una función de z_1 y de z_2; F_{123} es una función de z_1, z_2 y de z_3, etc.

3. **Funciones con dos variables. Ábacos de escalas superpuestas.** — Dada la amplia acepción del concepto de nomografía, la gráfica de una función de dos variables de la forma $F_{12} = 0$, o de la forma $f_1 = f_2$, en un sistema cualquiera de coordenadas planas, da lugar a un nomograma de esa función, pues el agregado de un par de escalas permitirá, por simple lectura, obtener los pares de valores numéricos que la satisfacen. Pero en verdad, tales diagramas no ofrecen mayor interés, dado que esos valores pueden también obtenerse con más facilidad e iguales ventajas mediante tablas numéricas.

Sólo mencionaremos, como tablas gráficas de funciones con dos variables, a los *ábacos de escalas superpuestas*, dispositivos que por lo demás encuentran también aplicación en la representación nomográfica de funciones con más de dos variables. Para construir un ábaco de escalas superpuestas de una función con dos variables, se supondrá ésta escrita en la forma $f_1 = f_2$ y se dibujará sobre un soporte, a ambos lados del mismo, las dos escalas funcionales

$$x_1 = mf_1 \quad ; \quad x_2 = mf_2 \ ,$$

y las cotas de los puntos en coincidencia constituyen pares de valores numéricos que satisfacen a la función. Por ejemplo, si se consideran dibujadas en el mismo segmento de longitud m la escala de los números y la escala de los cuadrados de la regla de cálculo común, se tendrá el ábaco de escalas superpuestas de la función $z_2 = z_1^2$ que, escrita en la forma logarítmica:

$$\log z_2 = 2 \log z_1 \quad ,$$

se representará mediante las escalas logarítmicas

$$x_1 = m \log z_1 \quad ; \quad x_2 = \tfrac{1}{2} m \log z_2 \quad ,$$

que son precisamente las escalas de la regla de cálculo.

Otro ejemplo se tendría si se adosara a la escala funcional de $f(z)$ una escala métrica con igual módulo; en ese caso se habría construído el ábaco de escalas superpuestas de la función $z_2 = f(z_1)$.

También se utilizan los ábacos de escalas superpuestas cuando hay interés en conocer los valores de una variable a través de dos expresiones numéricas distintas; por ejemplo: los ángulos en grados sexagesimales y en radiantes o mediante los valores de una de sus funciones circulares; las medidas de una misma magnitud física en dos sistemas distintos de unidades, etcétera.

4. Funciones con tres variables. Ábacos cartesianos. — La cosa es distinta cuando se pasa a funciones con tres variables $F_{123} = 0$, para las cuales las tablas gráficas ya muestran superioridad sobre las tablas numéricas, que en general, para estas funciones, son de cálculo laborioso y de lectura incómoda.

Los nomogramas más simples e inmediatos, y también los más antiguos de estas funciones, son los llamados *ábacos cartesianos*. Sea un sistema de coordenadas cartesianas x, y y la función con tres variables dada en la forma

$$F(z_1, z_2, z_3) = 0 .$$

Sustituyamos esta ecuación por el sistema equivalente:

$$x = m_1 z_1$$
$$y = m_2 z_2$$
$$F\left(\frac{x}{m_1}, \frac{y}{m_2}, z_3\right) = 0 \quad ,$$

que en el plano x, y representará tres familias de curvas de parámetros z_1, z_2, z_3, respectivamente. En este caso las dos primeras familias están representadas por sistemas de rectas paralelas a los ejes, mientras que la tercera familia será en general una familia de curvas.

Si consideramos acotadas todas las líneas con el parámetro

respectivo e imaginamos las tres líneas, una de cada familia, que concurren en un punto x, y del plano, tendremos la propiedad siguiente:

Tres líneas, una de cada familia, concurrentes en un punto tienen como cotas una terna de valores numéricos que satisface a la función dada. Esta propiedad justifica el nombre de *nomogramas de líneas concurrentes* que se ha dado a los ábacos cartesianos.

Para construir prácticamente tales nomogramas habrá, pues, que dibujar la cuadrícula de las familias de rectas de parámetros z_1 y z_2 (que puede evitarse utilizando papel milimétrico) y un número suficiente de curvas de la familia, de parámetro z_3; la lectura, directa o por interpolación visual, de las cotas de las tres líneas, una de cada familia, que concurren en un punto, proporciona las ternas de valores que satisfacen a la función.

Estos ábacos cartesianos constituyen el tipo más antiguo, y por tanto el más primitivo, de nomogramas para la representación de funciones con tres variables, y dados los múltiples inconvenientes que suelen presentar, hoy ya no se aplican, excepto en los casos, relativamente raros, en que la función a representar no admita un tipo de nomograma más cómodo y sencillo.

Los inconvenientes que suelen presentar estos ábacos son:

a) la dificultad que significa el trazado de numerosas curvas;

b) la dificultad en la lectura, cuando las líneas del ábaco están muy próximas;

c) la escasa precisión que ofrece la interpolación visual en los casos en que los valores numéricos no corresponden a líneas efectivamente trazadas;

d) la imposibilidad de fraccionar el ábaco o de superponer otros ábacos en la misma hoja.

Ha sido precisamente la necesidad de eliminar tales inconvenientes, lo que ha llevado a la construcción de nuevos tipos de nomogramas y, en definitiva, a la creación de un cuerpo de doctrina especial para el tratamiento de estas cuestiones. Algunos de esos inconvenientes pueden obviarse sin salir todavía de los ábacos cartesianos; por ejemplo, el trazado de las curvas deja de ser una dificultad si las curvas son rectas o circunferencias; de ahí el interés que ofrecen las funciones con tres variables susceptibles de representarse mediante ábacos cartesianos constituídos por haces de rectas o de circunferencias.

5. **Ábacos lineales.** — Consideremos, como antes, la función con tres variables

$$F_{123} = 0$$

y sean dos funciones f_1 y f_2 tales que la eliminación de z_1 y z_2 entre la ecuación anterior y las

$$x = m_1 f_1$$
$$y = m_2 f_2$$

dé como resultado una ecuación lineal en x é y de la forma

$$xg_3 + yh_3 + f_3 = 0 \ ,$$

en cuyo caso el ábaco cartesiano de $F_{123} = 0$ estará constituído por tres haces de rectas: dos de ellos de paralelas a los ejes y el tercero un haz cualquiera.

Esta posibilidad implica para F_{123} la forma

$$f_1g_3 + f_2h_3 + f_3 = 0 \ ,$$

forma bastante general, y por tanto frecuente, a la cual por otra parte, pueden llevarse muchas funciones mediante transformaciones algebraicas.

Un caso particular frecuente es el de las funciones de la forma

$$[4] \qquad f_1 + f_2 + f_3 = 0$$

que se representará mediante un ábaco cartesiano compuesto por tres haces paralelos de rectas. Por transformación logarítmica pueden llevarse a la forma anterior las ecuaciones de la forma $f_1f_2f_3 = 1$, también muy frecuente.

En otros casos la transformación no es tan evidente, como por ejemplo en la ecuación de la forma:

$$f_1f_2 - \sqrt{1 - f^2_1}\sqrt{1 - f^2_2} = f_3$$

que puede escribirse en la forma [4]

$$\text{arc cos } f_3 = \text{arc cos } f_1 + \text{arc cos } f_2 .$$

A veces, la solución reside en una adecuada elección de los parámetros z_1 y z_2 para los haces de rectas paralelas. Así, en las ecuaciones de la forma $f_1f_2 = f_3$, que por transformación logarítmica pueden llevarse a la forma [4], pueden representarse mediante tres haces lineales mediante la sustitución

$$\begin{aligned} x &= m_1f_1 \\ y &= m_3f_3 \\ m_1y &= m_3xf_2 \end{aligned}$$

mientras que si se hubiera elegido la sustitución

$$\begin{aligned} x &= m_1f_1 \\ y &= m_2f_2 \end{aligned}$$

la familia de curvas de parámetro z_3 hubiera sido la familia de hipérbolas equiláteras

$$xy = m_1m_2f_3 .$$

Un ejemplo muy conocido de este tipo de ábacos cartesianos formados por haces lineales, está dado por la ecuación trinomia

$$z^{m+n} - pz^m + q = 0$$

con z, p y q variables, y n y m constantes.

Adoptando para p y q escalas métricas

$$x = m_1 p$$
$$y = m_2 q$$

se tiene para z una familia de rectas de ecuacion

$$m_1 m_2 z^{m+n} - m_2 z^m x + m_1 y = 0 \ ,$$

cuya envolvente es la curva de ecuación

$$m_1^{m+n} (m+n)^{m+n} y^n = m^n{}_2 m^m n^n x^{m+n} .$$

En el caso de la ecuación cuadrática ($m = n = 1$) esta envolvente es una parábola ordinaria; en el caso de la ecuación de tercer grado sin segundo coeficiente ($m = 1$, $n = 2$) la envolvente es una cúbica con un punto de retroceso, etc.

Este ábaco permite un par de consideraciones de carácter general. Así, cabe observar que en este caso, como ocurre en muchos otros, la forma de la ecuación permite una superposición de cotas en las líneas del ábaco, de manera que al mismo punto del plano corresponden muchas ternas de valores que satisfacen a la ecuación. Por ejemplo, dada la forma de la ecuación trinomia, es fácil comprobar que el punto que proporciona la terna de valores z, p, q que las satisface, también proporciona las ternas λz, $\lambda^n p$, $\lambda^{m+n} q$, que también la satisfacen, siendo λ un parámetro arbitrario, que en general se toma igual a una potencia de 10. Este hecho permite reducir los intervalos de variabilidad y de ahí aumentar la precisión del ábaco. En cambio, es fácil también comprobar el inconveniente *d*). Si se dibuja la cuadrícula correspondiente a p y a q, y el haz lineal correspondiente a z para un determinado par de valores de m y de n, es muy difícil, por no decir imposible, imaginar que pueda superponerse a ese ábaco otro haz lineal, para otro par de valores de m y de n, de manera que para cada tipo de ecuación trinomia se hace necesario construir otro ábaco.

Hasta ahora se han considerado ábacos lineales en los cuales dos haces son de rectas paralelas a los ejes. Si de este caso particular se pasa al caso general, se tendrá que un ábaco lineal estará constituído por tres haces de rectas de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1 x + g_1 y + h_1 &= 0 \\ f_2 x + g_2 y + h_2 &= 0 \\ f_3 x + g_3 y + h_3 &= 0 \ , \end{aligned}$$

y por tanto la forma general de las funciones con tres variables susceptibles de representarse mediante un ábaco cartesiano constituído por haces de rectas, será de la forma

$$[5] \qquad \Delta = F_{123} = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

obtenida mediante la eliminación de x é y de las tres ecuaciones anteriores. La expresión [5] es una de las más importantes de la Nomografía, pues, como veremos oportunamente, proporciona la forma general de las funciones con tres variables susceptibles de representarse mediante nomogramas de puntos alineados, más cómodos y simples que los ábacos cartesianos. No obstante su gran generalidad, se explica que no todas las funciones que se presenten sean de esa forma o puedan llevarse a ella, de manera que se justifica la observación, ya aludida, de que en algunos casos haya aún que recurrir a los incómodos ábacos de líneas concurrentes.

6. **Ábacos circulares.** — Las consideraciones del parágrafo anterior pueden extenderse fácilmente al caso de la función cuyo ábaco está constituído por haces de circunferencias o de circunferencias y de rectas. Bastará partir de las ecuaciones de los haces de circunferencias

$$\begin{aligned} t_1(x^2+y^2) + f_1x + g_1y + h_1 &= 0 \\ t_2(x^2+y^2) + f_2x + g_2y + h_2 &= 0 \\ t_3(x^2+y^2) + f_3x + g_3y + h_3 &= 0 \end{aligned}$$

para obtener, eliminando x é y de esas tres ecuaciones, esa función en la forma (suponiendo no nulas simultáneamente todas las t_i) $\Delta\Delta_h + \Delta^2_f + \Delta^2_g = 0$, donde Δ es el determinante [5] y Δ_f, Δ_g, Δ_h ese mismo determinante sustituyendo la columna de las f_i, g_i, h_i, respectivamente, por la de las t_i.

Aunque de un interés más teórico que práctico, puede el lector comprobar este par de ejemplos: las funciones de la forma

$$\frac{1}{f^2_1} + \frac{1}{f^2_2} = \frac{1}{f^2_3}$$

pueden representarse por un ábaco formado por los tres haces de circunferencias de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= f_1x \\ x^2 + y^2 &= f_2y \\ x^2 + y^2 &= f^2_3 \quad ; \end{aligned}$$

mientras que las funciones de la forma

$$h_3\begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} g_1 & h_1 \\ g_2 & h_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} h_1 & f_1 \\ h_2 & f_2 \end{vmatrix}^2 = 0$$

se representan por un ábaco constituído por un haz de circunferencias concéntricas y dos haces lineales.

A este último tipo pertenece la fórmula del volumen V de un tronco de cono de altura unitaria y cuyas bases tienen como diámetros D y d:

$$12\,V = \pi(D^2 + d^2 + Dd),$$

siendo las ecuaciones de los tres haces

$$\begin{aligned} \pi(x^2+y^2) &= 4\,V \\ x + y\sqrt{3} &= D \\ x - y\sqrt{3} &= d. \end{aligned}$$

La fig. 162 reproduce el ábaco respectivo.

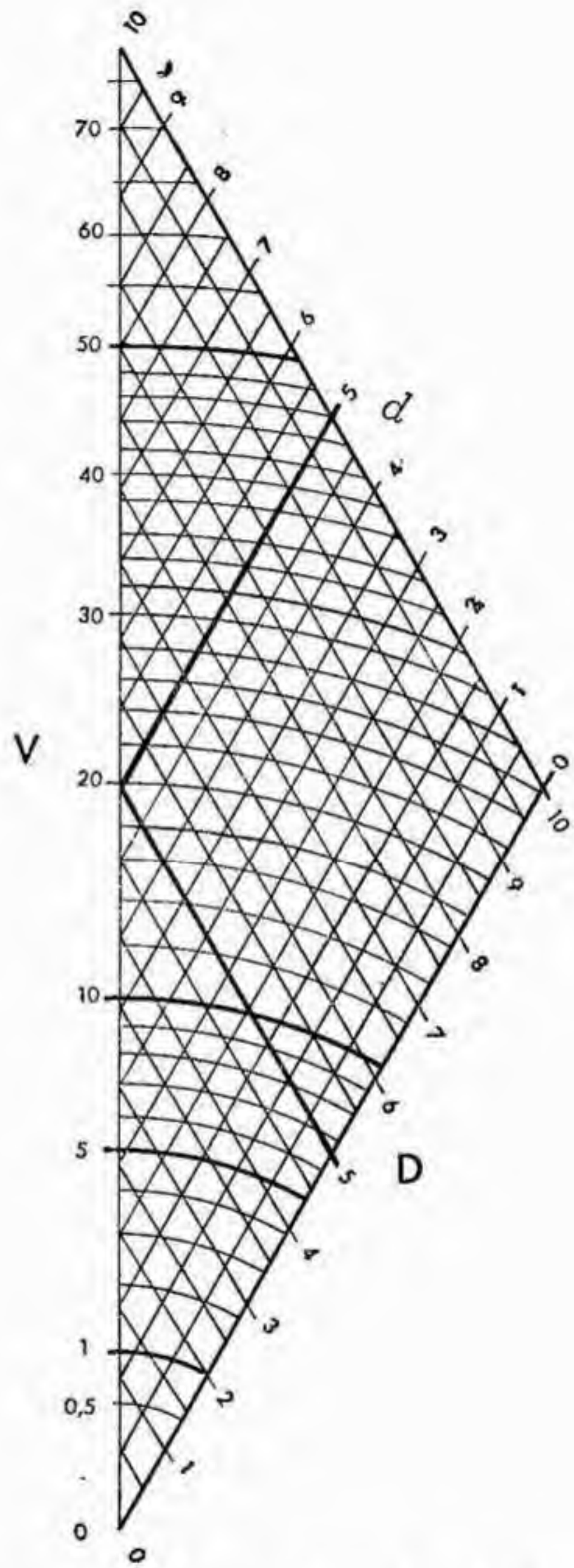

Fig. 162. — Ábaco circular de la fórmula $12\,V = \pi(D^2 + d^2 + Dd)$.

7. **Ábacos polares y exagonales.** — En lugar de coordenadas cartesianas pueden utilizarse coordenadas polares o triangulares, construyéndose *ábacos polares* y *ábacos triangulares*, para los cuales valen las consideraciones expuestas con respecto a los ábacos cartesianos, con la única diferencia de que la cuadrícula cartesiana es sustituída en los ábacos polares y triangulares por haces de círculos concéntricos y de sus rectas ortogonales, o por tres haces de rectas paralelas a los lados del triángulo fundamental, respectivamente. En ambos casos el dibujo de estos haces puede evitarse empleando el papel coordenado respectivo.

Por lo demás, en el caso de los ábacos polares, si la tercera familia de curvas está constituída por un haz de rectas o de circunferencias, se tienen nuevamente los ábacos circulares del parágrafo anterior.

Por ejemplo, la función $v \operatorname{sen} \varepsilon = \operatorname{sen}(\varphi - \varepsilon)$ que se presenta en balística, puede representarse mediante coordenadas polares ϱ, ω por las tres familias

$$\varrho = \frac{m}{v}$$

$$\omega = \varphi$$

$$m \operatorname{sen} \varepsilon = \varrho \operatorname{sen}(\omega - \varepsilon),$$

es decir: dos familias de rectas (parámetros φ y ε) y una familia de circunferencias (parámetro v).

Es fácil comprobar que esta función está incluída en el segundo ejemplo del parágrafo anterior, sin más que tomar

$$\begin{array}{lll} f_1 = \operatorname{sen} \varphi & f_2 = \operatorname{sen} \varepsilon & h_3 = -\dfrac{m^2}{v^2}. \\ g_1 = \cos \varphi \;; & g_2 = \cos \varepsilon \;; & \\ h_1 = 0 & h_2 = \operatorname{sen} \varepsilon & \end{array}$$

Los ábacos polares y triangulares adolecen de los mismos inconvenientes apuntados para los ábacos cartesianos; sin embargo, cuando la función a representar es de la forma [4], la aplicación de las coordenadas triangulares ha permitido la construcción de un determinado tipo de ábacos denominados *ábacos exagonales*, en los cuales todos esos inconvenientes han desaparecido.

En efecto, si se quisiera representar la función con tres variables

$$f_1 + f_2 + f_3 = h$$

mediante un sistema de coordenadas triangulares x, y, z referidas a un triángulo equilátero de altura h, bastaría hacer

$$\begin{aligned} x &= m f_1 \\ y &= m f_2 \\ z &= m f_3 \;, \end{aligned}$$

y el ábaco triangular de la función anterior estaría constituído por tres haces de rectas paralelas; pero es fácil ver que puede prescindirse del trazado de esos haces sin más que dibujar las tres escalas funcionales anteriores sobre soportes normales a los lados del triángulo de referencia, obteniéndose ternas de valores z_1, z_2, z_3 que satisfacen a la función en los puntos de esas escalas, intersecciones con las normales a las mismas trazadas desde un punto cualquiera del plano. También se ve que con esta disposición las escalas pueden desplazarse paralelamente a sí mismas sin modificar los resultados, y que no sólo puede prescindirse del triángulo de referencia, sino que puede adoptarse un triángulo de altura cualquiera, incluyendo el caso degenerado de triángulo de altura nula.

En este último caso, la función a representar adopta la forma [4]:

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0 \ ,$$

y las tres escalas funcionales x, y, z dibujadas sobre tres soportes paralelos a los lados del triángulo equilátero y dispuestas de tal manera que las normales a las mismas en tres puntos, cuyas cotas satisfacen a la función, concurran en un mismo punto, constituyen un *ábaco exagonal,* con el cual un haz cualquiera de tres rectas concurrentes normales a las escalas, determina sobre éstas, valores que satisfacen a la función.

La lectura en estos ábacos se facilita utilizando un transparente que lleva grabadas tres semirrectas concurrentes según esas normales, cuya dirección se mantiene, ya dibujando las escalas en papel de coordenadas triangulares, o ya dibujando sobre el fondo del ábaco una serie de paralelas a una de esas direcciones que sirvan de guía.

Se comprueba que estos ábacos eliminan los inconvenientes apuntados para los ábacos cartesianos; en efecto, no implican el trazado de curva alguna; con el transparente la lectura de las cotas es cómoda, permitiéndose fácilmente la interpolación visual; además, pueden superponerse las escalas de varios ábacos en la misma hoja de papel, así como puede fraccionarse una escala en varias para aumentar su precisión sin aumentar sus dimensiones. La única limitación de estos ábacos reside en la forma particular de la función que puede representarse con ellos:

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0.$$

§ 49. Nomogramas de puntos alineados

1. Conceptos generales. — Como se ha visto, el determinante [5] expresa la forma general de las funciones con tres variables susceptibles de representarse por un nomograma de rectas concurrentes, constituído por tres haces de rectas de pa-

rámetros z_1, z_2, z_3 que admiten como envolventes curvas S_1, S_2, S_3 y tales que las cotas de tres rectas, una de cada haz, concurrentes en un punto M satisfacen a la función.

Esta propiedad, puramente gráfica, de estos nomogramas, llevó a D'Ocagne a aplicar el principio de dualidad en el plano, que le permitió transformar ese tipo de nomogramas en un nuevo tipo denominado *nomogramas de puntos alineados*, constituídos entonces por tres haces de puntos (escalas) de parámetros (cotas) z_1, z_2, z_3, cuyo lugar (soportes) son tres curvas s_1, s_2, s_3 y tales que las cotas de tres puntos, uno de cada haz, alineados sobre una recta m satisfacen a la función; de ahí su nombre y su manejo, que consiste en colocar un hilo tendido o el borde de una regla biselada sobre dos de los puntos de cotas z_1, z_2, z_3 para obtener en la tercera escala el valor que con los dos anteriores constituye la terna que satisface a la función. El principio de dualidad convierte a los nomogramas de rectas concurrentes en nomogramas de puntos alineados (fig. 163).

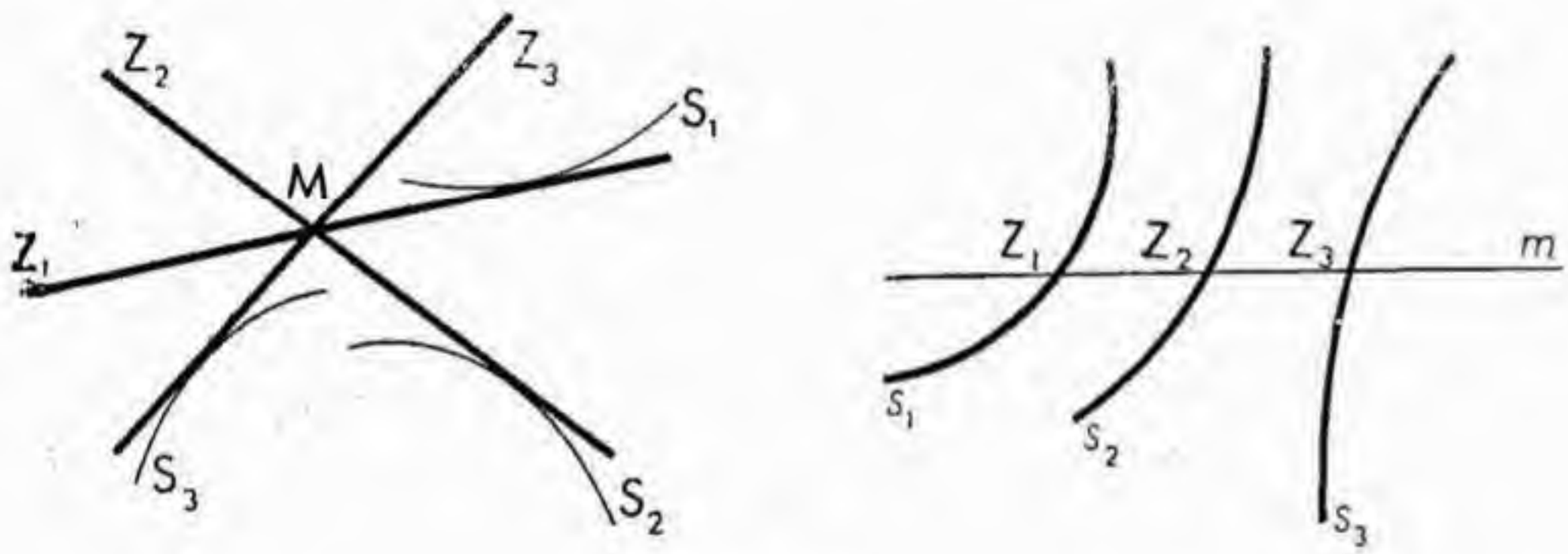

Fig. 163.

Siguiendo el principio de dualidad se suelen estudiar los nomogramas de puntos alineados mediante coordenadas paralelas, duales de las cartesianas, aunque pueden seguirse utilizando las coordenadas cartesianas sin más que observar que el determinante [5], que expresa la condición de concurrencia de tres rectas, puede también llevarse a la forma

$$[6] \qquad \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & 1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & 1 \\ \varphi_3 & \psi_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

que expresa la condición de alineación de los tres puntos (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3), tales que las expresiones

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1 \\ y_1 = \psi_1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_2 = \varphi_2 \\ y_2 = \psi_2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_3 = \varphi_3 \\ y_3 = \psi_3 \end{cases}$$

nos ofrecen, en forma paramétrica, las ecuaciones de los soportes s_1, s_2, s_3, mientras que, al mismo tiempo, permiten la construcción de sus escalas funcionales y, con ello, la confección del nomograma de puntos alineados.

En la práctica bastará examinar los casos particulares de uso más frecuente.

2. **Nomogramas con dos escalas paralelas.** — Un caso particular, sin embargo bastante general y frecuente, está dado por la ecuación

$$[7] \qquad f_1g_3 + f_2h_3 + f_3$$

que puede expresarse por el determinante

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & f_1 \\ 0 & -1 & f_2 \\ g_3 & h_3 & f_3 \end{vmatrix} = 0$$

que, mediante la introducción de coeficientes indeterminados para facilitar la confección del nomograma y algunas transformaciones, puede llevarse fácilmente a la forma [6]. En efecto, multiplicando las tres filas respectivamente por m_1, m_2, m_1m_2 y dividiendo las dos primeras columnas por m_1 y m_2 se llega, después de sumar a la primera columna la segunda y de multiplicar a ésta por $-d$, a

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & m_1f_1 \\ -1 & d & m_2f_2 \\ m_1h_3 + m_2g_3 & -m_1dh_3 & m_1m_2f_3 \end{vmatrix} = 0$$

que, luego de dividir la tercera columna por $m_1h_3 + m_2g_3$ y transponer el orden de las columnas, se transforma en el determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & m_1f_1 & 1 \\ d & m_2f_2 & 1 \\ \dfrac{m_1dh_3}{m_1h_3 + m_2g_3} & \dfrac{-m_1m_2f_3}{m_1h_3 + m_2g_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

que expresa la condición de alineación de los puntos de las tres escalas

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = m_1f_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = d \\ y_2 = m_2f_2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_3 &= \frac{m_1dh_3}{m_1h_3 + m_2g_3} \\ y_3 &= \frac{-m_1m_2f_3}{m_1h_3 + m_2g_3} \end{aligned}$$

y por tanto la ecuación [7] estará representada por un nomograma de puntos alineados constituído por las escalas de las funciones f_1 y f_2 construídas con módulos m_1 y m_2 sobre so-

portes paralelos a la distancia d y, en general, por una escala de soporte curvilíneo que se construirá de acuerdo con la forma de las ecuaciones x_3, y_3.

Consideremos los tres casos particulares siguientes:

a) *Nomogramas con tres escalas paralelas.* — Si $g_3 = h_3 = 1$, la ecuación [7] adopta la forma [4], que es la mas sencilla de las ecuaciones con tres variables

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0 \ ,$$

y la escala de las z_3 será entonces también rectilínea, de soporte paralelo a los otros dos y de ecuación $\begin{array}{l} x_3 = d' \\ y_3 = m_3 t, \end{array}$ siendo d' y m_3 tales que

$$d' = \frac{m_1 d}{m_1 + m_2} \ ; \quad m_3 = \frac{-m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ .$$

Los nomogramas de puntos alineados de las ecuaciones de la forma [4], que son muy frecuentes, pues muchas ecuaciones de la práctica son de esa forma o pueden llevarse a ella mediante transformaciones algebraicas, pueden construirse prescindiendo de los ejes coordenados. Para ello se construyen sobre dos soportes paralelos a la distancia máxima d las escalas funcionales y_1 é y_2, eligiendo los módulos de tal manera que las partes útiles de las escalas sean aproximadamente de igual longitud y que abarquen la altura máxima del nomograma. Para que la tercera escala esté comprendida entre las dos anteriores, m_1 y m_2 deben tomarse de igual signo. La escala de z_3 se construye sobre un soporte a la distancia d' con módulo m_3, a partir de un punto de cota conocida que se obtiene mediante una alineación particular. La determinación de d' y de m_3 puede obtenerse gráficamente mediante la construcción de la fig. 164. Si además se toman para A_1 y A_2 puntos de cotas conocidas, que permiten obtener la cota de A_3, la escala de z_3 puede proseguirse fácilmente a ambos lados de A_3, hasta completar su parte útil, generalmente de igual longitud aproximada que la de las otras dos.

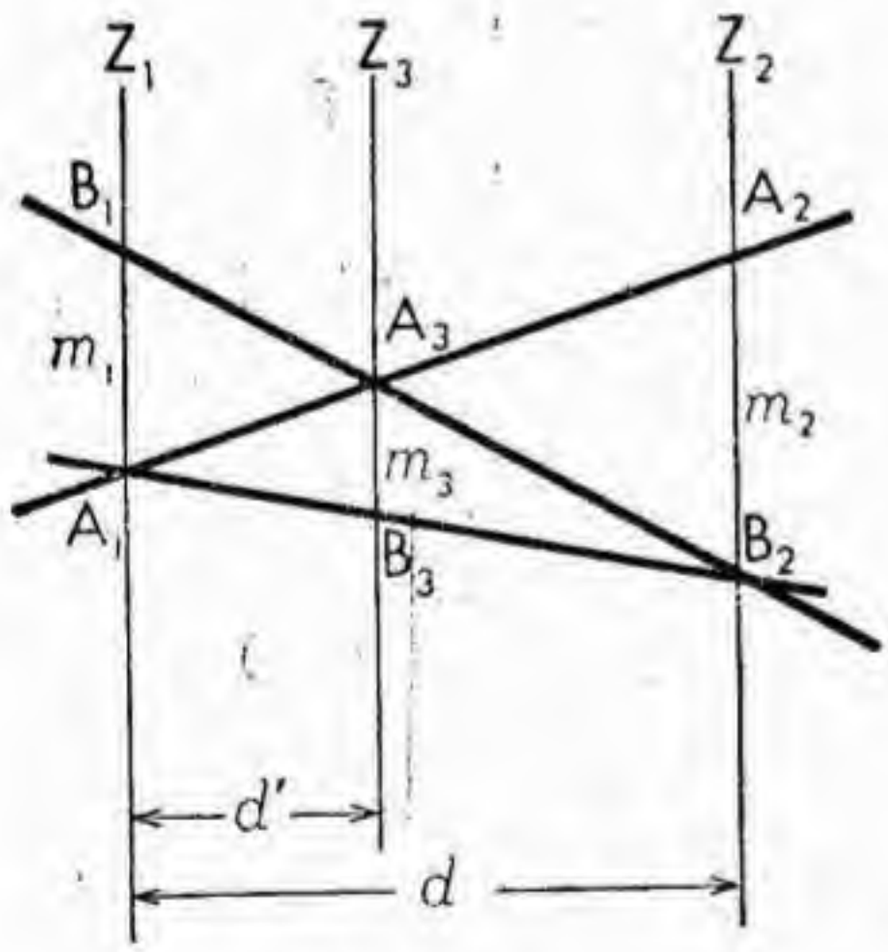

Fig. 164.

Un tipo de ecuación que se presenta con frecuencia y susceptible de representarse mediante un nomograma de puntos

alineados de tres escalas paralelas, es $z_3 = z_1^{\alpha} z_2^{\beta}$ que, tomando logaritmos, se convierte en la forma del tipo [4]:

$$\log z_3 = \alpha \log z_1 + \beta \log z_2 \ ,$$

de manera que si se toman por módulos valores de la forma

$$\frac{m_1}{\alpha} \text{ y } \frac{m_2}{\beta},$$

el nomograma estará constituído por tres escalas

$$y_1 = m_1 \log z_1 \quad ; \quad y_2 = m_2 \log z_2 \quad ; \quad y_3 = m_3 \log z_3$$

con

$$m_3 = \frac{m_1 m_2}{\beta m_1 + \alpha m_2},$$

cuyos soportes paralelos son tales que las distancias de las escalas de z_2 y de z_3 distan de la de z_1 de d y

$$d' = \frac{\beta m_1 d}{\beta m_1 + \alpha m_2},$$

respectivamente. La única dificultad parece residir en la construcción de la escala de z_3. Después de haber construído las escalas de z_1 y de z_2 se construye el soporte de la escala de z_3, ya calculando d', ya determinando un punto de esa escala mediante un par de alineaciones adecuadas, por ejemplo las alineaciones $z_1 = 1$, $z_2 = z^{\alpha}$ y $z_1 = z^{\beta}$, $z_2 = 1$, que determinan el punto de cota $z_3 = z^{\alpha\beta}$. Construído el soporte, se construye la escala o bien calculando m_3 y tomando los valores de $m_3 \log z_3$ sobre el soporte, o bien determinando otro punto de la escala (por ejemplo, $z_3 = 1$, obtenido por la intersección de la alineación $z_1 = 1$; $z_2 = 1$), y se construye la escala como semejante de una escala logarítmica.

Como ejemplo de función que puede representarse mediante un nomograma de tres escalas paralelas, consideremos la fórmula del interés compuesto

$$C = (1 + i)^n$$

que se puede llevar a la forma [4] tomando logaritmos dos veces

$$\log \log C = \log n + \log \log (1 + i).$$

Para lograr un nomograma más cómodo, Soreau ha observado que una misma alineación puede servir para calcular las ternas $C\lambda$, λn, i siendo λ un valor arbitrario, y superpuso en los soportes de n y de C dos escalas haciendo $\lambda = 10$. Si por tanto se supone que n varía de 1 a 10, la segunda escala dará los valores de n de 10 a 100; si m es el módulo de esta escala y se supone que i varía de 2 % a 6 %, el módulo de la escala de i, para que tenga igual longitud que la de n, ha de ser m' tal que $m = m'(\log \log 1{,}06 - \log \log 1{,}02) = 0{,}47\, m'$. Tomando $m' = 2m$ será $d' = {}^1/_3 d$ y $m_3 = {}^2/_3 m$, con lo que podrá construirse la escala de C que va de 1,02 a $1{,}08 \cong 1{,}06^{10}$, a la que se le superpone una escala que va de $1{,}2 \cong 1{,}02^{10}$ a $340 \cong 1{,}06^{150}$, correspondiéndose las cotas de cada escala.

La figura 165 representa el nomograma respectivo.

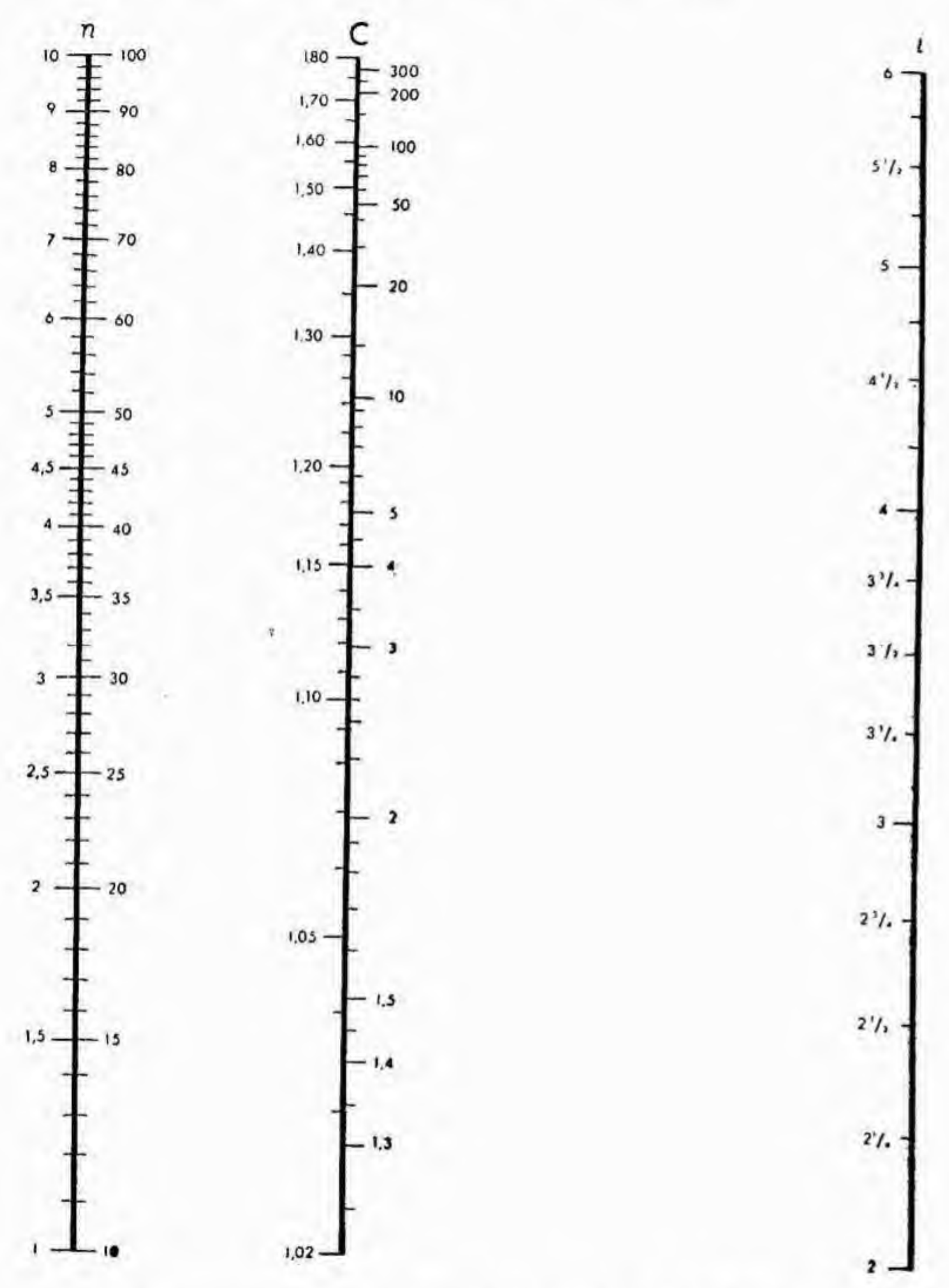

Fig. 165. — Nomograma de puntos alineados de la fórmula $C = (1 + i)^n$.

También tomando logaritmos, pero una sola vez, se puede representar mediante un nomograma de tres escalas paralelas la fórmula que relaciona el momento de inercia de un rectángulo con la base y la altura del mismo. En la figura 166 se ha reproducido ese nomograma, mostrando la alineación dibujada que un rectángulo de 8 cm de base y 10 cm de altura tiene un momento de inercia de 650 cm⁴.

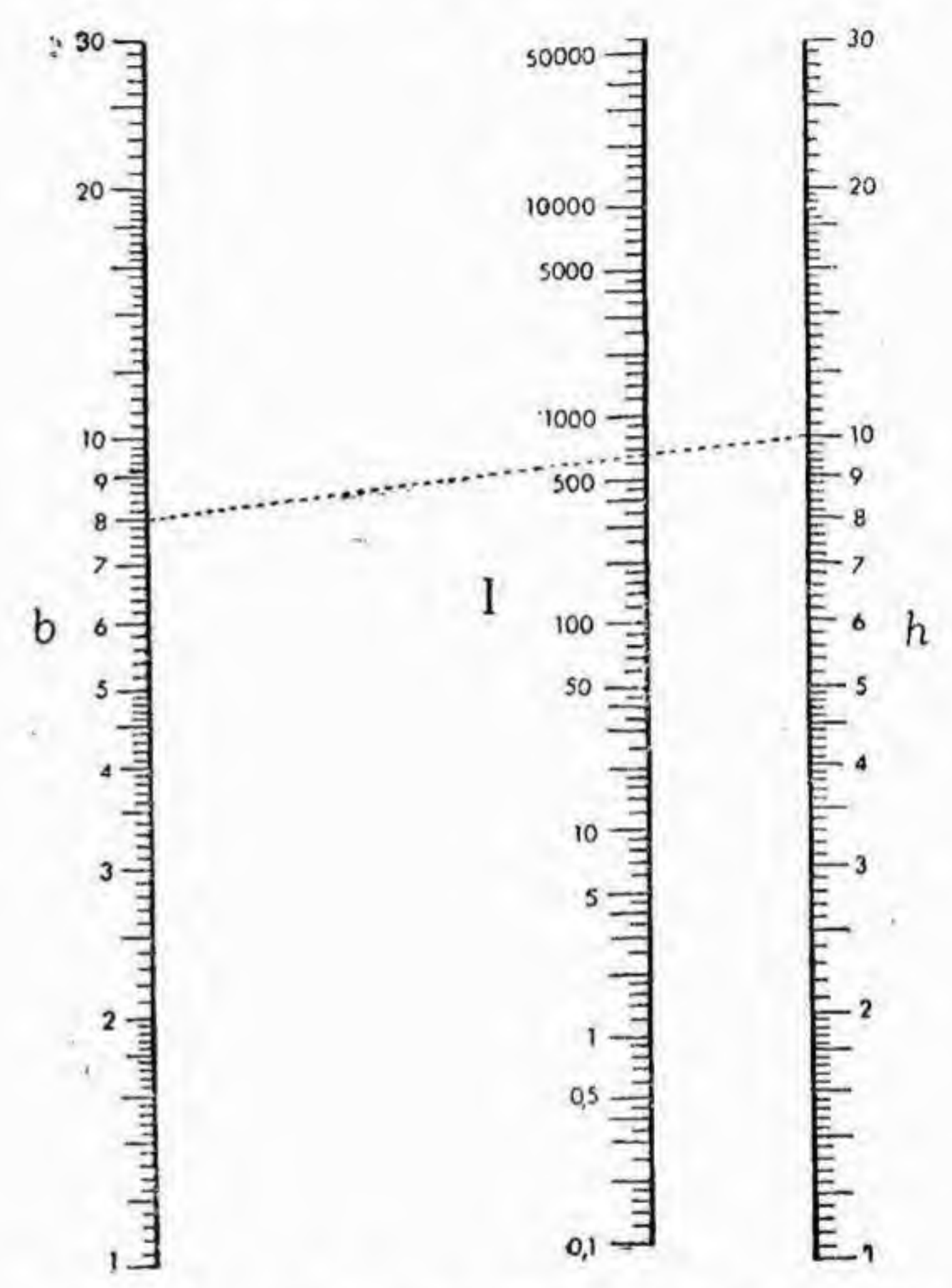

Fig. 166. — Nomograma de puntos alineados de la fórmula $12\,I = bh^3$.

b) *Nomogramas en* N *o en* Z. — Si $g_3 = 1$ y $f_3 = 0$ la ecuación adopta la forma

$$f_1 + f_2 h_3 = 0 \ ,$$

y el soporte de la escala de z_3 se convierte en el eje de las abscisas. Como en general se adoptan ejes oblicuos y se dispone la parte útil de esta escala de tal manera que esté comprendida entre las dos escalas de soportes paralelos, las tres escalas rectilíneas toman la forma de una N o de una Z, de ahí el nombre de estos nomogramas.

La escala de z_3 tiene por expresión

$$x_3 = \frac{m_1 d h_3}{m_1 h_3 + m_2},$$

y es, por tanto, una escala proyectiva de h_3 que puede construirse, por ejemplo, proyectando desde el punto $(d, -m_2 k)$ sobre el eje de las abscisas la escala $m_1 h_3 k$ dibujada sobre el eje de las ordenadas. En efecto, es fácil comprobar que los tres puntos $(0, m_1 h_3 k)$, $(x_3, 0)$ y $(d, -m_2 k)$ están alineados.

Por ejemplo, la ecuación del interés compuesto $C = (1 + i)^n$ puede representarse mediante un nomograma en N escribiéndola en la forma

$$\log C = n \log(1 + i)$$

y, por tanto, sus escalas serán:

$$y_1 = m_1 \log C \quad ; \quad y_2 = m_2 \log(1 + i) \quad ; \quad x_3 = \frac{m_1 d n}{m_1 n - m_2}.$$

Esta última escala se puede construir proyectando una escala métrica construída sobre el soporte de C, desde un punto de la escala de i. La elección de m_1, m_2, d y k permiten construir el nomograma de acuerdo con las partes útiles de sus escalas. Para que la escala de n esté comprendida entre las otras dos, m_1 y m_2 deben ser de signo contrario.

La figura 167 representa un nomograma de este tipo. Corresponde a la fórmula de Lamé para los tubos de fuerte presión interior, siendo R la tensión máxima, p la presión interior y m la razón entre el espesor del tubo y el radio interior. Para llevar la fórmula a la forma canónica basta despejar R.

c) *Nomogramas con una escala curvilínea.* — Cuando una (o ninguna) de las tres funciones f_3, g_3, h_3 es constante, la ecuación adopta la forma general [7], y la escala de z_3 será una escala curvilínea cuyo soporte tiene por ecuación, en forma paramétrica,

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{m_1 d h_3}{m_1 h_3 + m_2 g_3} \\ y_3 = \dfrac{-m_1 m_2 f_3}{m_1 h_3 + m_2 g_3}. \end{cases}$$

Esta escala se construirá de acuerdo con la naturaleza de las funciones f_3, g_3, h_3, aunque pueden tenerse en cuenta las observaciones generales siguientes:

1º) Como

$$\frac{x_3}{d - x_3} = \frac{m_1 h_3}{m_2 g_3},$$

para que la escala de z_3 esté comprendida entre las otras dos, las razones

$$\frac{m_1}{m_2} \quad \text{y} \quad \frac{h_3}{g_3}$$

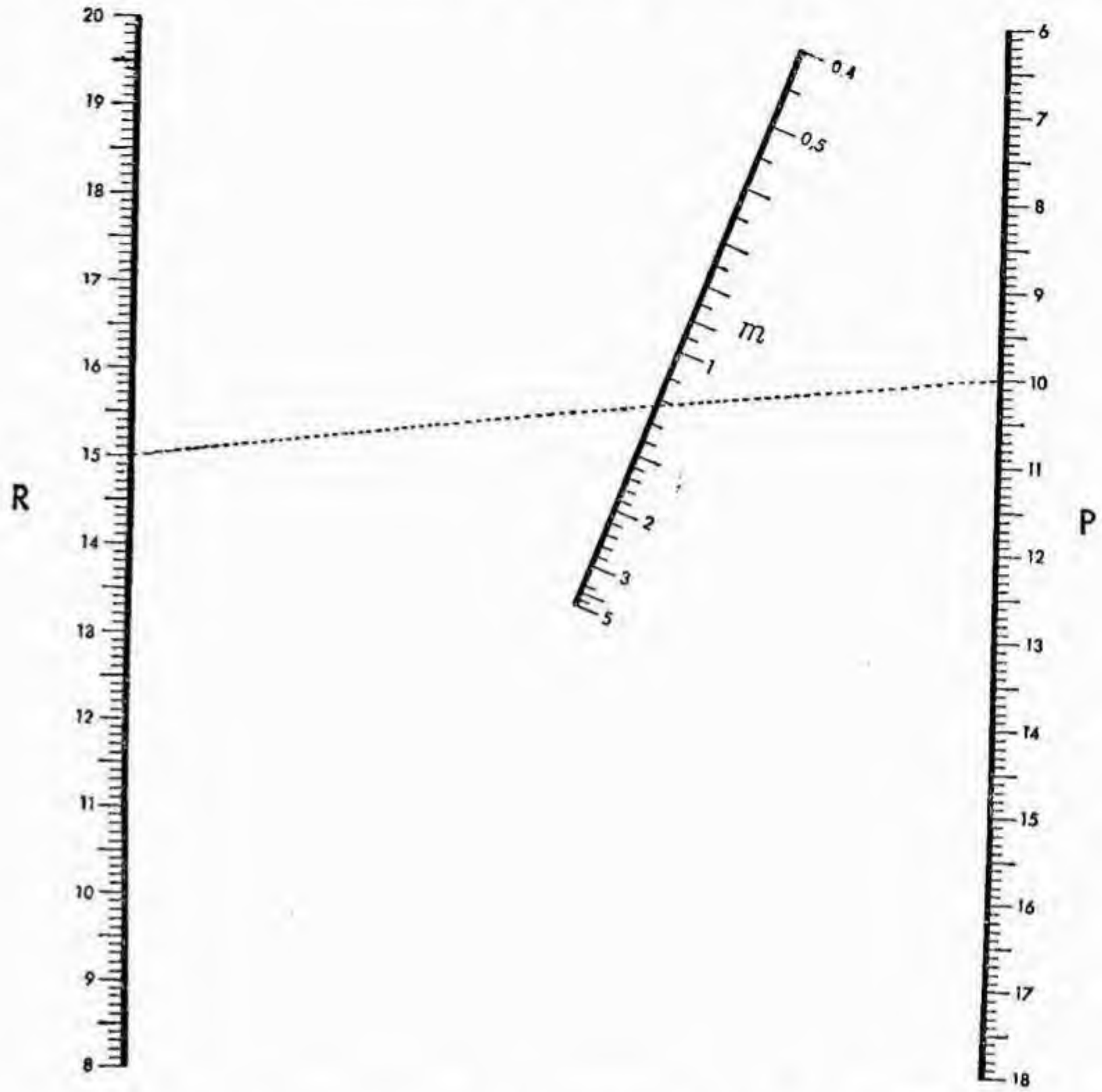

Fig. 167. — Nomograma de puntos alineados de la fórmula $m = \sqrt{\frac{R + p}{R - p}} - 1$.

deben tener igual signo. Si en la parte útil de la escala, la segunda razón cambia de signo se fracciona el nomograma, superponiendo una segunda escala para z_3 e invirtiendo el sentido de la escala z_1 (o de la z_2), pues los valores de x_3 é y_3 no alteran si se cambia simultáneamente de signo a la pareja m_1, g_3 (o de la m_2, h_3).

2º) Es claro que x_3 é y_3 representan escalas que proyectan paralelamente la escala de z_3 sobre rectas paralelas a los ejes coordenadas. Además, si desde los puntos $(d, 0)$ y $(0, 0)$ se proyecta la escala de z_3 sobre los soportes paralelos $x = 0$, y $x = d$, se obtienen respectivamente las escalas

$$y'_1 = -m_1 \frac{f_3}{g_3} \quad \text{é} \quad y'_2 = -m_2 \frac{f_3}{g_3},$$

como es fácil comprobar.

Si se considera como ejemplo la ecuación trinomia en la forma

$$z^{m+n} - pz^m + q = 0$$

con m y n constantes positivas, será $f_3 = z^{m+n}$; $g_3 = -z^m$; $h_3 = 1$ con $f_1 = q$ y $f_2 = q$. El nomograma de esa ecuación estará constituído pues, por dos escalas métricas

$$y_1 = m_1 p \quad ; \quad y_2 = m_2 q$$

de soportes paralelos y una escala curvilínea, para el parámetro z, de ecuación paramétrica

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{m_1 d}{m_1 - m_2 z^m} \\ y_3 = \dfrac{-m_1 m_2 z^{m+n}}{m_1 - m_2 z^m} \end{cases}.$$

En este caso, si la escala útil de z es la de los valores positivos de ese parámetro, habrá que elegir m_1 y m_2 de signo contrario. En cuanto a la construcción de la escala de z parece ser el mejor procedimiento la construcción de las escalas $y'_1 = m_1 z^n$ é $y'_2 = m_2 z^{m+n}$ sobre los soportes paralelos y proyectarlas respectivamente desde los puntos $(d, 0)$ y $(0, 0)$. Los soportes de las escalas de z son ramas hiperbólicas que pasan por el punto $(d, 0)$ y tienen por asíntota el semieje de las ordenadas.

En la figura 168 se ha representado el nomograma de la ecuación trinomia anterior escrita en la forma $z^m + pz + q = 0$, para $m = 2$ y $m = 3$, es decir para las ecuaciones cuadráticas y cúbicas.

Si se comparara este nomograma de puntos alineados con el de rectas concurrentes para la misma ecuación, se comprobaría la ventaja de los primeros sobre los segundos; no solamente el dibujo es más claro, la lectura más cómoda y la interpolación visual fácil, sino que también es posible superponer en la misma hoja varios nomogramas o fraccionarlos, cosa imposible en los ábacos cartesianos. Así, en el ejemplo anterior, podrían agregarse en el mismo nomograma varias escalas para distintos valores de m y n, hasta un haz de ellas, sin que esas escalas se molesten entre sí.

3. **Nomogramas con tres escalas concurrentes.** — Los nomogramas de puntos alineados con tres escalas paralelas o en N son dos casos particulares del caso general de nomogramas con tres escalas rectilíneas. Aunque el estudio de este caso general ofrece cierto interés teórico, prácticamente las ecuaciones respectivas pueden reducirse a los dos casos anteriores de fácil construcción. Veamos, como único ejemplo, el caso de las ecuaciones susceptibles de representarse mediante un nomograma de puntos alineados compuesto por tres escalas rectilíneas de soportes concurrentes. Si se toma el origen como punto de concurrencia, como soportes rectas que formen con el eje de las abscisas ángulos α, β y θ, y

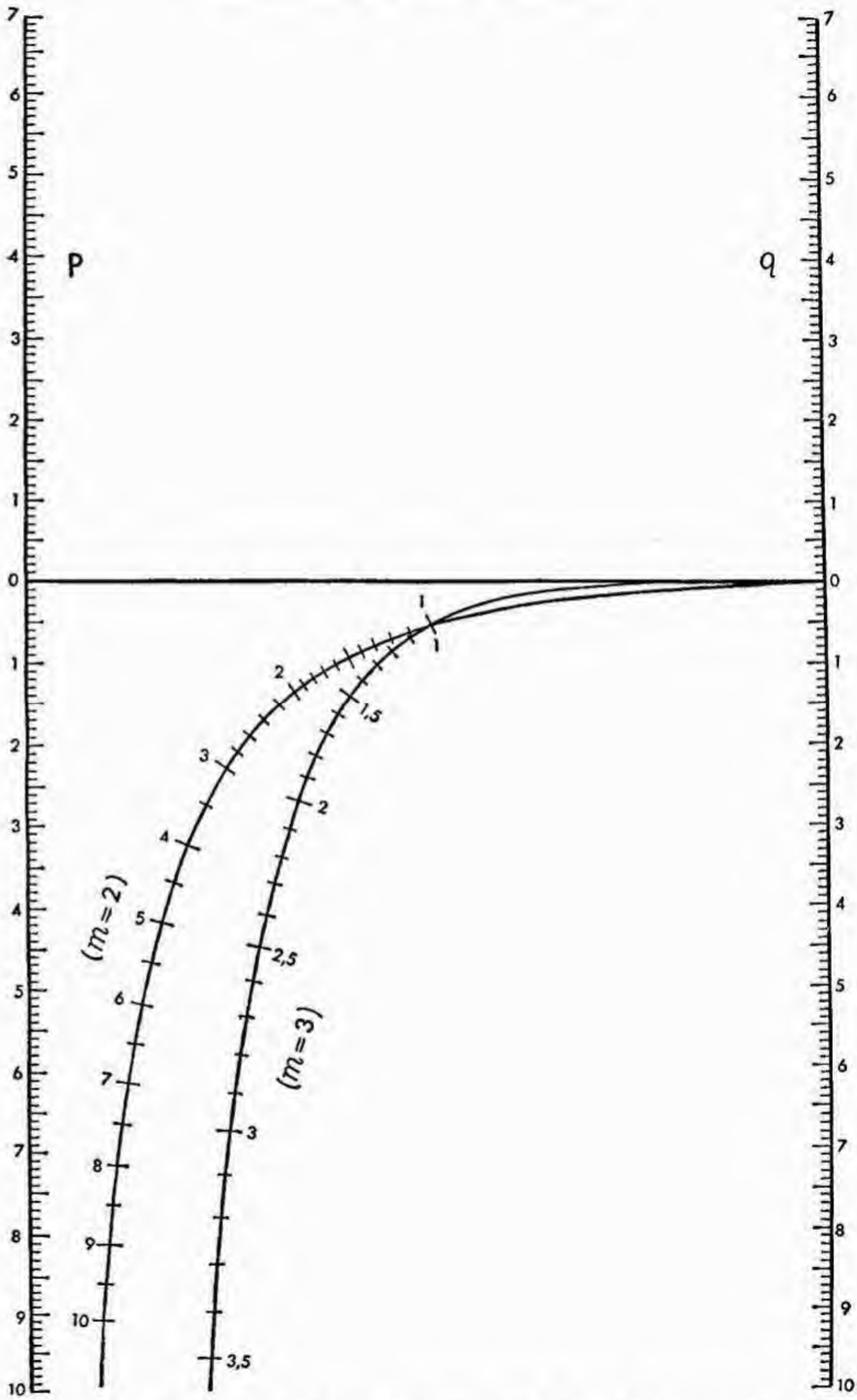

Fig. 168. — Nomograma de puntos alineados de la fórmula $z^m + pz + q = 0$.

bre esos soportes las escalas m_1f_1, m_2f_2 y m_3f_3, respectivamente, la condición de alineación se podrá escribir

$$- m_2m_3 \operatorname{sen} \beta \,.\, f_2f_3 + m_1m_3 \operatorname{sen} \alpha \,.\, f_1f_3 + m_1m_2 \operatorname{sen} (\beta - \alpha) \,.\, f_1f_2 = 0$$

que será de la forma

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = 0$$

sin más que tomar $m_1 = m_2 = - m_3$ y $\beta = - \alpha = 60°$. Aunque, como se observa, este tipo de ecuación es de la forma [7], y por ende susceptible de representarse mediante un nomograma de tres escalas paralelas, a veces es más cómodo representarla mediante un nomograma de escalas concurrentes.

Así, el caso

$$\frac{1}{f_1} + \frac{f_2}{1} = \frac{1}{f_3}$$

se calcula nomográficamente sin más que tomar con el mismo módulo, sobre los lados de un ángulo de 120° y sobre su bisectriz interior, las tres escalas f_1, f_2 y f_3, respectivamente.

Como ejemplo de este caso, en la figura 169 está representado el nomograma de la fórmula que da la resistencia R de un sistema de dos conductores de resistencias R_1 y R_2 en paralelo.

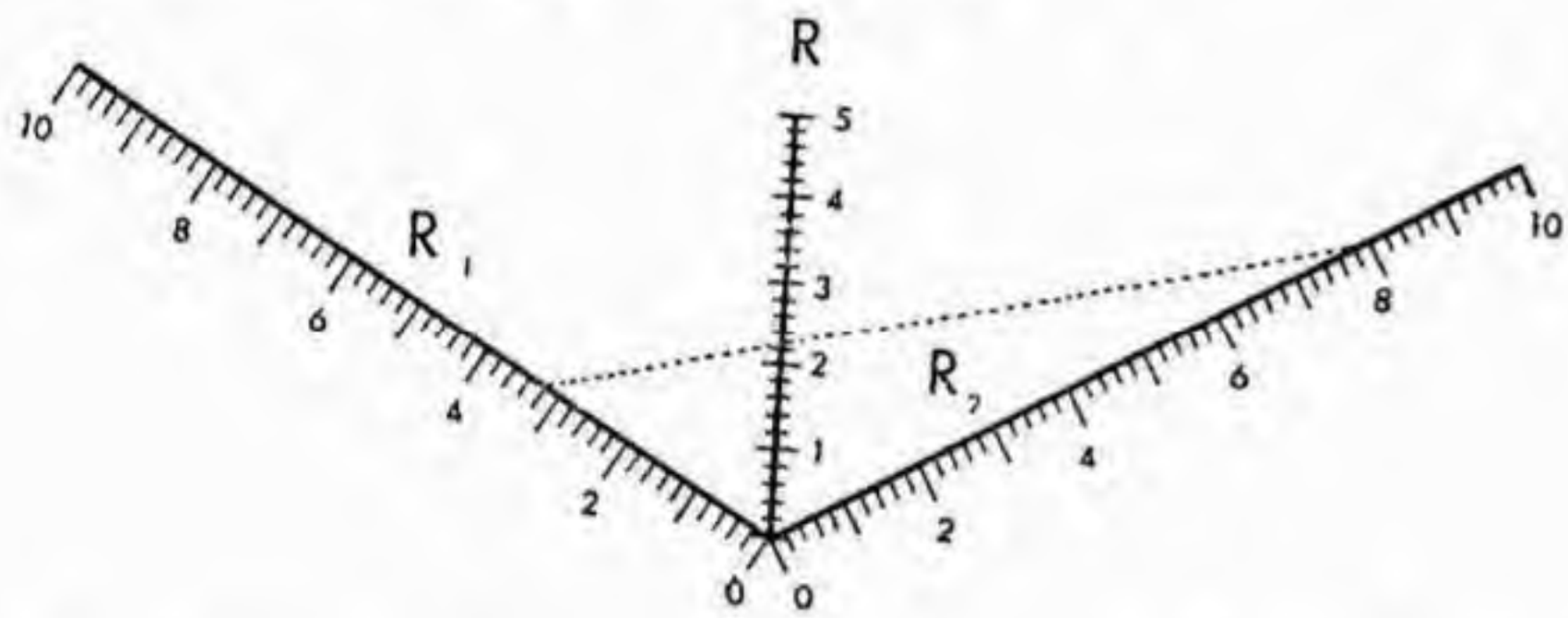

Fig. 169 — Nomograma de puntos alineados de la fórmula $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

4. **Nomogramas con escalas curvilíneas.** — De la misma manera pueden estudiarse los casos particulares de los nomogramas con dos o tres escalas curvilíneas que tengan interés practico. Uno de estos casos lo ofrecen las ecuaciones cuyo nomograma contiene escalas curvilíneas situadas sobre el mismo soporte.

Sea, por ejemplo, la ecuación de la forma

$$f_1f_2f_3 + (f_1 + f_2) g_3 + h_3 = 0 \quad ,$$

simétrica respecto de z_1 y de z_2. Si mentalmente se sustituyen f_3, $-g_3$ y h_3 por 1, f y f^2, la ecuación anterior no es sino la ecuación de segundo grado en f con raíces f_1 y f_2, de manera que, prescindiendo del factor no nulo $f_2 - f_1$, se podrá escribir en la forma

$$\begin{vmatrix} f_3 & -g_3 & h_3 \\ 1 & f_1 & f^2_1 \\ 1 & f_2 & f^2_2 \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

que es de la forma [5] y susceptible por tanto de representarse por un nomograma de puntos alineados, que en este caso se compondrá de una escala (de soporte rectilíneo o curvilíneo) para z_3, y de dos escalas superpuestas, para z_1 y z_2, sobre el mismo soporte de ecuación $x = t$, $y = t^2$, es decir, sobre la parábola $y = x^2$. Mediante transformaciones del determinante anterior, que equivalen geométricamente a homografías, puede transformarse esta parábola en una circunferencia. Bastará, por ejemplo, hacer $x = Y/X$, $y = (1 - X)/X$ para transformar la parábola anterior en la circunferencia de ecuación

$$X^2 + Y^2 = Y.$$

Si se aplican al determinante anterior las transformaciones correspondientes a esta homografía (se suma a la tercera columna los elementos de la primera y se divide cada fila por los elementos de la tercera columna), se llegará a que la ecuación anterior se representará mediante las escalas:

$$x_1 = \frac{1}{1+f_1^2} \quad ; \quad y_1 = \frac{f_1}{1+f_1^2} \qquad ; \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{1+f_2^2} \\ y_2 = \dfrac{f_2}{1+f_2^2} \end{cases} \qquad ; \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{f_3}{f_3+h_3} \\ y_3 = \dfrac{-g_3}{f_3+h_3} \end{cases}$$

las dos primeras de las cuales tienen por soporte común la circunferencia $x^2 + y^2 = x$; y considerando que los puntos $(1, 0)$, $(1 - mf_1, m)$ y (x_1, y_1) están alineados, la escala de z_1 (lo mismo para z_2) se construirá proyectando sobre esa circunferencia desde el punto de la misma $(1, 0)$ la escala $1 - mf_1$ construída sobre la recta $y = m$.

Un ejemplo interesante es la ecuación que da el radio medio R de un canal (razón entre la sección líquida y el perímetro mojado) de sección un trapecio isósceles, conociendo la base b y altura h del mismo:

$$R = \frac{bh + h^2}{b + h\sqrt{8}}$$

que pertenece a este caso haciendo

$$f_1 = mR \quad ; \quad f_2 = -\frac{mb}{\sqrt{8}}$$

$$f_3 = 1 \quad ; \quad g_3 = -mh \quad ; \quad h_3 = -\frac{m^2h^2}{\sqrt{8}}.$$

Las escalas de R y de b se construyen proyectando escalas métricas sobre la circunferencia; en cuanto a la escala de h, que tiene por soporte la elipse $x^2 + y^2/8 = x$, podría construirse por cualquiera de los métodos indicados para las escalas curvilíneas, aunque en este caso, considerando que para $b \to \infty$, $R = h$, bastará proyectar desde el origen (punto de cota $b \to \infty$) la escala circular de R sobre la elipse, para tener sobre ésta con igual cota la escala de h.

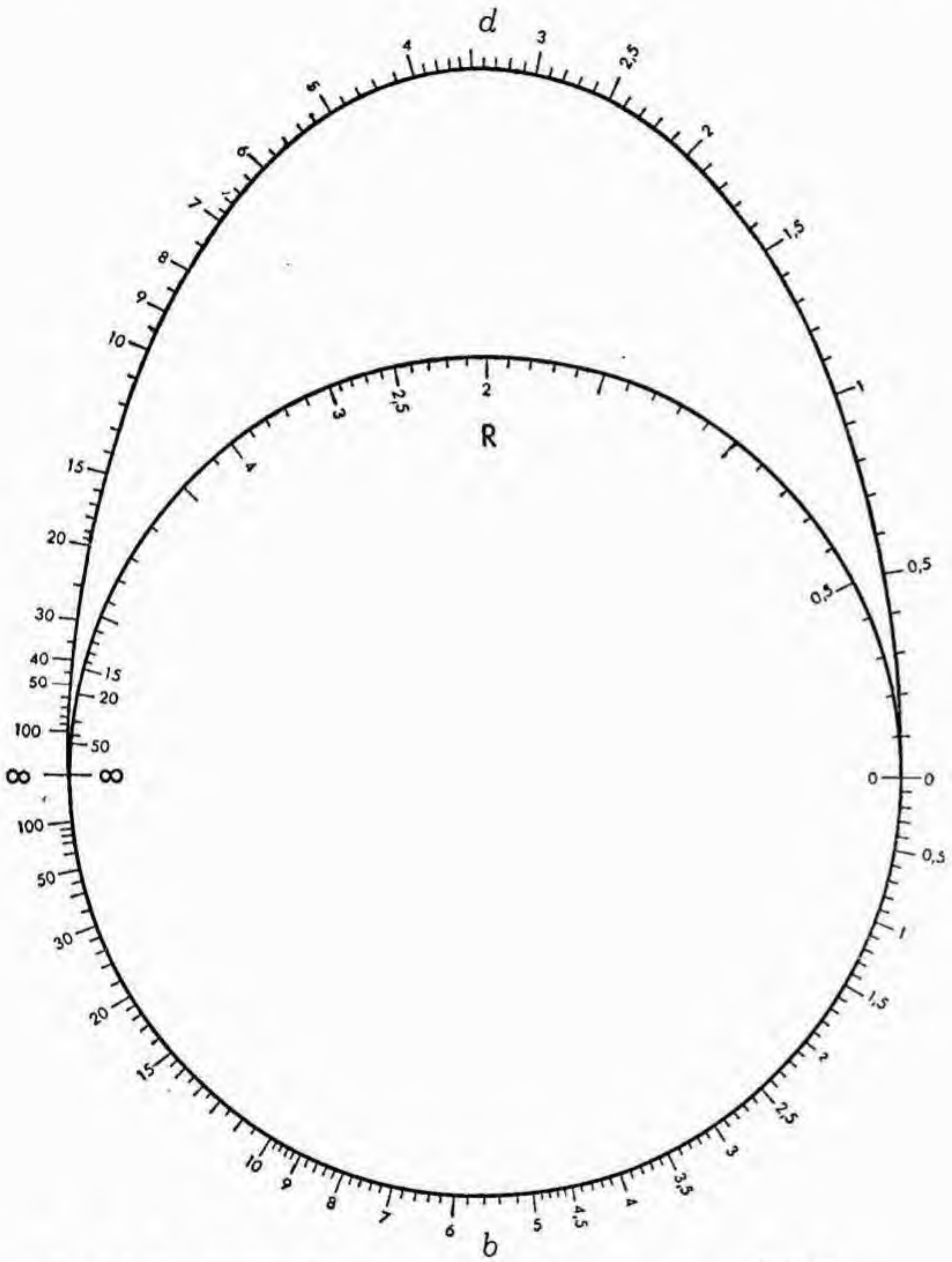

Fig. 170. — Nomograma de puntos alineados de la fórmula $R = \dfrac{bh + h^2}{b + h\sqrt{8}}$.

Otro caso de interés lo ofrecen las ecuaciones de la forma

$$f_3 = \frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2},$$

en especial cuando las funciones f_1 y f_2, y g_1 y g_2 son funciones de igual característica f y g, respectivamente; pues en este caso los puntos de cotas z_1 y z_2 situadas sobre la curva de ecuación $x = f/g$, $y = 1/g$ están alineados con el punto de cota z_3 de la escala f_3 dibujada sobre el eje de las x.

Por ejemplo, la ecuación que da el volumen V de un tronco de cono de altura unitaria y de bases de diámetros D y d, y que (§ 7) podía representarse mediante un ábaco circular, se podrá representar por un nomograma de puntos alineados de este tipo escribiéndola en la forma

$$\frac{12\,V}{\pi} = \frac{D^3 - d^3}{D - d}$$

y por tanto, haciendo

$$f_1 = m_1 D^3 \quad , \quad g_1 = m_2 D \quad , \quad f_2 = m_1 d^3 \quad , \quad g_2 = m_2 d \quad ,$$

$$f_3 = \frac{12\, m_1\, V}{m_2\, \pi},$$

la escala de D y d tendrá por soporte la curva de ecuación paramétrica $x = m_1 t^2/m_2$, $y = 1/m_2 t$, es decir, una hipérbola cúbica, sobre la cual las escalas se obtendrán proyectando paralelamente una escala de recíprocos construída sobre el eje de las ordenadas.

5. **Funciones con más de tres variables.** — La representación mediante nomogramas de funciones $F_{123\ldots n} = 0$ de $n > 3$ variables, se reduce a la construcción de $n - 2$ nomogramas de funciones con tres variables mediante la introducción de $n - 3$ variables auxiliares que vincularán esos nomogramas de dos en dos.

Así, si mediante ábacos cartesianos se desea representar una función con cuatro variables $F_{1234} = 0$, se supondrá ésta escrita en la forma $f_{12} = g_{34}$, y mediante la introducción de la variable auxiliar u se construyen los ábacos de las dos funciones con tres variables $u = f_{12}$, $u = g_{34}$, y la curva de nivel de cota u (que no es necesario calcular ni escribir excepto el caso en que tenga alguna interpretación útil en el problema considerado) permitirá pasar de los valores de z_1 y z_2 a los de z_3 y z_4 que forman la cuaterna que satisface a la función dada.

El ábaco de f_{12} sin el agregado de las curvas de nivel de parámetro u se denomina *escala binaria* de z_1 y z_2, pues generaliza el concepto de escala funcional, ya que cada pareja z_1, z_2 determina un punto, así como para cada valor de z_1 la escala f_1 fijaba el punto de esa cota.

Para las funciones de más de tres variables se trata de evitar su representación mediante ábacos cartesianos, pero el concepto de escala binaria es útil y aprovechable en los otros

tipos de nomogramas, ya que permite utilizar los dispositivos de las funciones con tres variables para un número de variables que puede llegar al doble, siempre que las escalas binarias puedan disponerse sin que superpongan.

Cuando la ecuación es de la forma

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = 0 \ .$$

puede representarse mediante un ábaco exagonal introduciendo $n - 3$ variables auxiliares $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-3}$, que dan lugar a los $n - 2$ ábacos de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 + u_1 &= 0 \\ u_2 - f_3 + u_1 &= 0 \\ u_2 + f_4 + u_3 &= 0 \\ u_4 - f_5 + u_3 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ - f_n - f_{n-1} + u_{n-3} &= 0 \quad \text{ó} \quad u_{n-3} + f_{n-1} + f_n = 0 \end{aligned}$$

según que n sea par o impar. En las ecuaciones anteriores las funciones en la misma columna se representan sobre soportes paralelos, aunque de las u_i ni es necesario dibujar el soporte, pues sus direcciones están dadas por el índice del transparente que, partiendo de la posición fijada por los valores de z_1 y z_2 se desplaza paralelamente a la dirección normal al eje de la variable común entre dos ecuaciones sucesivas, fijándose sucesivamente mediante los valores de $z_3, \ldots, z_{n-1}$, hasta obtener en la última escala el valor de z_n.

Si se reemplazan una o más escalas funcionales por escalas binarias, el mismo dispositivo anterior permite representar ecuaciones con un número mayor de variables.

Las consideraciones anteriores se extienden fácilmente a los nomogramas de puntos alineados. La introducción de variables auxiliares presupone soportes, en general sin escalas, que actúan de charnela en cada par de alineaciones sucesivas, mientras que la introducción de escalas binarias permite, con los mismos dispositivos, hasta duplicar el número de variables de la ecuación representada.

Si, por ejemplo, se quiere representar mediante un nomograma de puntos alineados una ecuación de la forma

$$f_n = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} f_3^{\alpha_3} f_4^{\alpha_4} \ \ldots \ f_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$$

bastará tomar logaritmos, reduciéndose la expresión a la forma canónica más simple que se representará mediante n escalas funcionales, sobre soportes paralelos a distancias y con módulos convenientes, y $n - 3$ charnelas, también constituídas por rectas paralelas a los soportes anteriores.

Si, en cambio, se desea representar una ecuación con cuatro variables $F_{1234} = 0$, dada en la forma

$$f_1 g_{34} + f_2 h_{34} + f_{34} = 0 \ ,$$

el nomograma respectivo se compondrá de las escalas

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = m_1 f_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = d \\ y_2 = m_2 f_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = \dfrac{m_1 d h_{34}}{m_1 h_{34} + m_2 g_{34}} \\ y_3 = \dfrac{-m_1 m_2 f_{34}}{m_1 h_{34} + m_2 g_{34}} \end{cases}$$

es decir, dos escalas funcionales de soportes paralelos y una escala binaria.

Sea por ejemplo la ecuación que se presenta en la resolución de triángulos cuando se conocen, por lo menos, dos lados:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

que se representará entonces por la escala de cuadrados $y_1 = m_1 a^2$; la escala sinusoidal $y_2 = m_2 \cos A$, sobre un soporte paralelo a la distancia d, y la escala binaria

$$\begin{cases} x = \dfrac{2bcm_1 d}{2bcm_1 + m_2} \\ y = \dfrac{m_1 m_2 (b^2 + c^2)}{2bcm_1 + m_2} \end{cases}$$

que, por la simetría de los parámetros b y c, estará representada por un único haz de curvas, en este caso hipérbolas que tienen la asíntota común $x = d$ y como envolventes las rectas $yd = \pm m_2 x$.

La alineación de los puntos de cotas a, A y el punto de intersección de los arcos de hipérbolas de cotas b y c, resuelven el problema.

Es claro que mediante adecuadas homografías se puede transformar el nomograma en otro con un haz de cónicas de mejor lectura o de más fácil construcción.

§ 50. Otros tipos de nomogramas

1. Nomogramas de tipo especial. — Los tipos de nomogramas descritos hasta aquí son los más comunes y también los de uso más frecuente. Sin embargo, no agotan los recursos de la nomografía, pues se dispone además de otros tipos especiales que pueden encontrar aplicaciones en la práctica.

Vamos a reseñar algunos de esos tipos especiales de nomogramas.

a) *Nomogramas de alineaciones paralelas o perpendiculares.* — Sea una función con cuatro variables que pueda llevarse a la forma

$$\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} = \frac{f_3 - f_4}{g_3 - g_4} \quad ;$$

es claro que tal igualdad puede interpretarse como la condición de paralelismo o de perpendicularidad de dos rectas, determinada, cada una de ellas, por un par de puntos de coordenadas

$$\begin{cases} x_1 = m_1 f_1 \\ y_1 = m_2 g_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = m_1 f_2 \\ y_2 = m_2 g_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = m_3 f_3 \\ y_3 = m_4 g_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = m_3 f_4 \\ y_4 = m_4 g_4 \end{cases}$$

en el primer caso, y

$$\begin{cases} x_1 = m_1 f_1 \\ y_1 = m_2 g_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = m_1 f_2 \\ y_2 = m_2 g_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -m_3 g_3 \\ y_3 = m_4 f_3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -m_3 g_4 \\ y_4 = m_4 f_4 \end{cases}$$

en el segundo; de ahí la disposición de estos nomogramas, formados por cuatro escalas cuyas ecuaciones en forma paramétrica están dadas en las expresiones anteriores, y tales que dos alineaciones paralelas o perpendiculares determinan cuatro valores que satisfacen a la ecuación. Como las direcciones se mantienen trasladando paralelamente los ejes, el sistema de las escalas correspondientes a z_3 y z_4 puede referirse a otros ejes, paralelos a los ejes de referencia de las escalas de z_1 y z_2. El manejo de estos nomogramas se facilita mediante transparentes que llevan grabadas una serie de índices paralelos a corta distancia entre sí, o un par de índices normales entre sí.

Consideremos como ejemplo la fórmula de trigonometría que expresa la relación entre dos lados y los ángulos opuestos de un triángulo

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}$$

que, introduciendo el tercer ángulo C, puede escribirse:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{ctg} B - \operatorname{tg} \frac{1}{2} C}{\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} C},$$

y por tanto es susceptible de representarse mediante un nomograma de este tipo. Si adoptamos el caso de alineaciones perpendiculares, las escalas serían:

$$\begin{cases} x_1 = m_1 a \\ y_1 = m_2 a \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -m_1 b \\ y_2 = m_2 b \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -m_3 \operatorname{ctg} B \\ y_3 = m_4 \operatorname{ctg} B \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -m_3 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} C \\ y_4 = -m_4 \operatorname{tg} \frac{1}{2} C \end{cases}$$

es decir, tres escalas rectilíneas y una escala curvilínea (para C) de soporte la hipérbola equilátera $xy = m_3 m_4$.

En la figura 171 se ha representado ese nomograma. Las alineaciones dibujadas muestran que el triángulo rectángulo de catetos 4 y 12 tiene un ángulo agudo de 71°30′, aproximadamente.

b) *Nomogramas circulares.* — Semejantes a los anteriores son los llamados nomogramas circulares que permiten representar las ecuaciones de la forma

$$f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = 0.$$

Supongamos que sobre dos circunferencias concéntricas, a par-

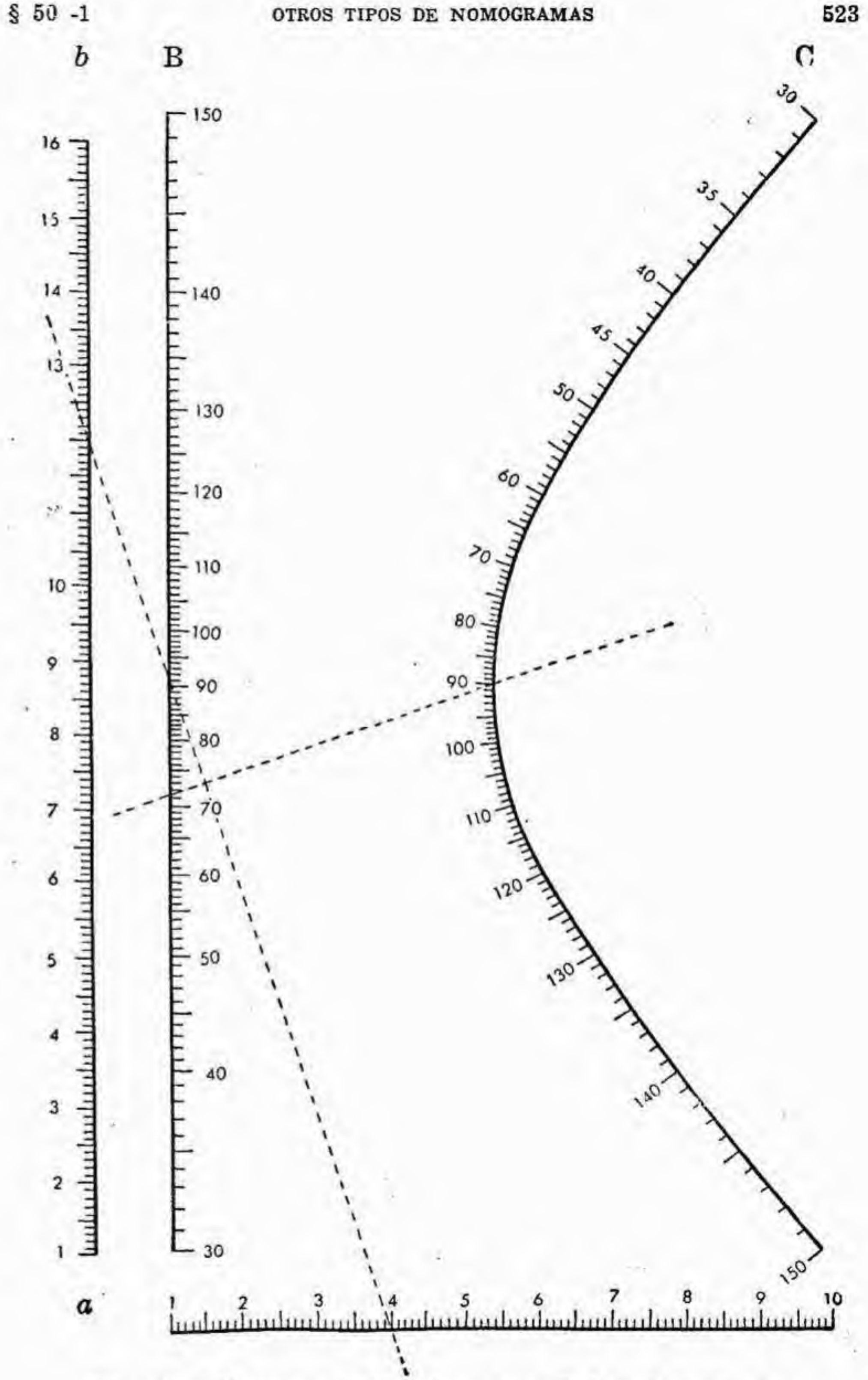

Fig. 171. — Nomograma de alineaciones perpendiculares de la fórmula

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\operatorname{ctg} B - \operatorname{tg} \frac{1}{2} C}{\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} \frac{1}{2} C}.$$

tir de orígenes situados sobre el mismo radio (o sobre radios perpendiculares) y en el mismo sentido, se toman escalas de las funciones f_1 y f_2 sobre una de ellas, y de $-f_3$ y $-f_4$ sobre la otra con módulos proporcionales a los radios respectivos; las cotas de las cuatro escalas situadas sobre alineaciones paralelas (o perpendiculares) satisfacen a la ecuación $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0$.

c) *Alineaciones de punto fijo y nomogramas a escuadra por el vértice.* — Puede ocurrir que una ecuación con n variables sea de más fácil representación nomográfica mediante su transformación en una ecuación de $n+1$ variables, donde una de ellas se supone constante, pasando por tanto la alineación respectiva por un punto fijo.

Por ejemplo, la ecuación que da las anualidades de amortización:

$$a = \frac{(1+i)^n i}{(1+i)^n - 1},$$

que escrita en la forma:

$$\log a - \log i + \log(1-(1+i)^{-n}) = 0$$

pertenece al tipo

$$f_1 g_{34} + f_2 h_{34} + f_{34} = 0$$

con

$$f_1 = \log a \quad ; \quad f_2 = 1 \quad ; \quad g_{34} = 1 \quad ;$$
$$h_{34} = -\log i \quad ; \quad f_{34} = \log(1-(1+i)^{-n}) \quad ,$$

y por tanto el nomograma se compondrá de una escala logarítmica para a, una escala binaria para i y n, constituída por una familia de rectas para i y de curvas para n, y un punto fijo por donde pasarán todas las alineaciones.

Si la ecuación con tres variables puede escribirse en la forma

$$\frac{f_1 - f_2}{g_1 - g_2} + \frac{g_2 - g_3}{f_2 - f_3} = 0 \quad ,$$

se comprueba que puede construirse su nomograma como el de una ecuación con cuatro variables mediante un nomograma de alineaciones perpendiculares haciendo coincidir las variables z_2 y z_4; de manera que las alineaciones que determinan los valores que satisfacen a la ecuación forman un ángulo recto cuyo vértice es el punto de cota z_2; de ahí el nombre de *nomogramas a escuadra por el vértice.* Por ejemplo, el trinomio de segundo grado: $z^2 - pz + q = 0$, puede llevarse a la forma anterior escribiéndolo

$$\frac{p - z}{-1} + \frac{1-(1-q)}{z} = 0$$

y podrá entonces representarse por un nomograma de este tipo mediante las tres escalas rectilíneas:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = p \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y^2 = z \end{cases}, \quad \begin{cases} x_3 = 1 - q \\ y_3 = 0 \end{cases}.$$

Observemos que en este nomograma los puntos de cotas p, q, z están sobre una circunferencia que pasa por el origen, de manera que si se le aplica una inversión respecto del origen se transformará en un nomograma de puntos alineados con dos escalas rectilíneas para p y q y una escala circular para z.

d) *Nomogramas con alineaciones circulares.* — Cabe pensar en una teoría general de nomogramas en que las cotas no estén alineadas sobre una recta sino sobre una circunferencia. Un caso particular lo constituyen los llamados *nomogramas de puntos equidistantes*, en los que la circunferencia de centro el punto de cota z_1, determina sobre las otras dos escalas los puntos de cotas z_2 y z_3.

Sin entrar en el caso general consideremos nuevamente el ejemplo del trinomio de segundo grado: $z^2 - pz + q = 0$, que escrito en la forma

$$(z - \tfrac{1}{2}p)^2 + 1 = \tfrac{1}{4}p^2 + 1 - q \ ,$$

expresa la condición de que los puntos de las escalas

$$\begin{cases} x_1 = z \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = \sqrt{1 - q} \end{cases}.$$

equidistan de los puntos de la escala

$$\begin{cases} x_3 = \tfrac{1}{2}p \\ y_3 = 0 \end{cases},$$

y el nomograma así construído, constituido por tres escalas rectilíneas, es la construcción general de la conocida determinación gráfica de las raíces del trinomio con regla y compás.

Una variante de este nomograma se obtiene modificando ligeramente la ecuación anterior en la forma

$$(z - \tfrac{1}{2}p)^2 + 1 - \tfrac{1}{4}p^2 = 1 - q \ ,$$

que expresa la condición de que la distancia entre los puntos

$$\begin{cases} x_1 = z \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_2 = \tfrac{1}{2}p \\ y_2 = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}p^2} \end{cases}$$

es $\sqrt{1 - q}$, y por tanto, construyendo la escala métrica de z y la escala de soporte circular para p: si se dibuja sobre el borde de una cartulina la escala de $\sqrt{1 - q}$, llevando sobre el punto de cota p el origen de esta escala, el punto de cota q de la misma da sobre el eje de las abscisas el o los valores de z.

e) *Nomogramas con escalas móviles.* — En los nomogramas hasta aquí descritos, con excepción del último ejemplo, las escalas son fijas; pero pueden imaginarse nomogramas con escalas funcionales (o binarias) móviles, introduciéndose mediante el movimiento un número de variables igual (o doble) al de grados de libertad del movimiento.

Las reglas o círculos calculadores constituyen el tipo más simple de estos dispositivos, aunque se han ideado otros más complejos que constituyen verdaderos aparatos para calcular.

Consideremos, por ejemplo, la expresión homográfica

$$F(y) = \frac{af(x) + b}{cf(x) + d}$$

siendo a, b, c, d cuatro valores variables cualesquiera con la condición $ad \neq bc$. Construyamos la escala funcional $F(y)$ y un haz de tres rectas s_1, s_2, s_3 concurrentes en O, que pasan por los puntos de esa escala de cotas y_1, y_2, y_3. Dibujemos además sobre el borde de una regla móvil la escala funcional $f(x)$ y calculemos los tres valores x_1, x_2, x_3 que, de acuerdo a los valores de a, b, c, d, corresponden a los y_1, y_2, y_3. Si se desplaza esta regla móvil en el plano de tal manera que los puntos de cotas x_1, x_2, x_3 coincidan con las rectas s_1, s_2, s_3, tendremos un dispositivo que permitirá obtener, debajo de todas las alineaciones que pasan por O, los valores de x é y que satisfacen la ecuación dada. Cuando $x = y$ se obtendrán las raíces de la ecuación

$$F(x)\,(cf(x) + d) = af(x) + b.$$

f) *Nomogramas para sistemas de ecuaciones.* — Cuando las variables que deben calcularse mediante nomogramas satisfacen a dos o más ecuaciones, se puede, con artificios o agregados de escalas auxiliares, determinar esos valores mediante el nomograma de una sola de esas ecuaciones. Por ejemplo, supongamos un sistema de dos ecuaciones con tres variables:

$$\begin{cases} f_{123} = 0 \\ g_{123} = 0 \end{cases}$$

y construyamos el nomograma de puntos alineados de una de ellas. Las alineaciones que satisfacen a la segunda ecuación forman una familia simplemente infinita de rectas que, en general, admitirá una envolvente: si se logra, mediante transformaciones de las escalas, que esa envolvente se reduzca a un punto, todas las alineaciones que pasan por ese punto fijo determinan cotas que satisfacen al sistema.

Como segundo ejemplo consideremos dos ecuaciones con cuatro variables:

$$\begin{cases} f_{1234} = 0 \\ g_{1234} = 0 \end{cases},$$

si se supone posible la eliminación de z_3 y z_4 ese sistema se reduce al

$$\begin{cases} f_{123} = 0 \\ g_{124} = 0 \end{cases}$$

y si representamos los nomogramas de estas dos ecuaciones de tal manera que las escalas de z_1 y de z_2 sean comunes, toda alineación dará sobre las cuatro escalas valores que satisfacen al sistema.

Consideremos el caso de los lados de los triángulos rectángulos semejantes, que han de satisfacer al sistema

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$b = a\lambda$$

siendo λ una constante. Si se representa la primera ecuación mediante un nomograma de tres escalas de cuadrados de soportes paralelos, es fácil demostrar que las alineaciones que satisfacen la segunda ecuación pasan por el punto fijo del eje de las abscisas de

$$x = \frac{m_1 d' \lambda^2}{m_1 \lambda^2 - m_3},$$

siendo m_1 y m_3 los módulos de las escalas de b y de a, y d' la distancia entre sus dos soportes.

Si se hace intervenir como nueva variable el ángulo agudo B tal que $\lambda = \operatorname{sen} B$, el sistema de dos ecuaciones con cuatro variables

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ b = a \operatorname{sen} B \end{cases},$$

se resolverá construyendo la escala de B:

$$x = \frac{m_1 d' \operatorname{sen}^2 B}{m_1 \operatorname{sen}^2 B - m_3},$$

y toda alineación determinará sobre las cuatro escalas los valores de los lados y de los ángulos de cualquier triángulo rectángulo.

2. Bibliografía. — Históricamente, las obras fundamentales sobre nomografía son las de D'Ocagne, a saber:

D'OCAGNE, *Traité de Nomographie*, 2ª ed. París, 1921.

— *Le Calcul simplifié par les procedés mecaniques et graphiques*, 3ª ed. París, 1928.

— *Calcul graphique et Nomographie*, 3ª ed. París, 1924.

De la última obra existe una traducción castellana (Madrid, 1914).

Otras obras más recientes, todas ellas con ejemplos y aplicaciones técnicas, son:

M. ADOLPH, *Einführung in die Nomographie*, Leipzig, 1942.

P. LUCKEY, *Nomographie*, 2ª ed. Leipzig, 1949.

H. DIERKS - H. EULER, *Praktische Nomographie*, Düsseldorf, 1942.

M. MAYER, *Nomographie des Bauingenieurs*, Sammlung Göschen, Berlín, 1927.

R. SOREAU, *Nomographie ou Traité des Abaques* (2 volúmenes), París, 1924.

H. SCHWERDT, *Lehrbuch der Nomographie auf Abbildungs geometrischer Grundlagen*, Berlín, 1924.

R. JAMIN, *La pratique des Abaques*, París, 1923.

M. FRECHET - H. ROULLET, *Nomographie*, 2ª ed. París, 1938.

DOUGLAS - ADAMS, *Elements of Nomography*, New York, 1947.

Además, un capítulo sobre Nomografía puede encontrarse en la mayoría de las obras dedicadas al cálculo numérico y gráfico en general. Por ejemplo:

F. A. WILLERS - R. T. BEYER, *Practical Analysis*, New York, 1948.

M. SADOSKY, *Cálculo numérico y gráfico*, Buenos Aires, 1952.

ÍNDICE ALFABÉTICO DE MATERIAS

A

Abacos: cartesianos, 498; circulares, 502; de escalas superpuestas, 497; exagonales, 504, 505; lineales, 499; polares, 504; triangulares, 505.
Abscisa, 3; angular, 7; eje de, 3; de un punto del plano, 25; homogéneas, 10; sistema de, 2; tangentes, 54.
Adición, de vectores, 19.
ADOLPH, 527.
Afinidad, 294; central, 296; homológica, 296, 297; unimodular, 295.
Algebraicas, curvas, 187; superficies, 449.
Analagmáticas, curvas, 312.
Analogías de Delambre y Neper, 353.
Ángulo, de dos rectas, 56, 342; de dos planos, 342.
Anomalía, 50.
Área, del triángulo, 60, 61; del polígono, 61, 62, 63.
Armónica, cuaterna, 14.
APOLONIO, 22, 119; problema de, 313, 491.
Arista de retroceso, 459.
ARISTÓTELES, 23.
ARQUÍMEDES, 22, 197, 218.
Asíntotas, 203; de la hipérbola, 100, 125; de una curva algebraica, 235.
Astroide, 217, 224.
Autopolar, triángulo, 167.

B

Baricentro, 333; de masas, 35.
BELLAVITIS, 37.
BERZOLARI, 274.
BESSEL, 351, 352.
BEUTEL, 274.
BEZOUT, teorema de, 229, 452.
BIEBERBACH, L., 493.
Bisectrices de un ángulo, 59.
Bivectores, 479.
BLASCHKE, W., 493.
BRIANCHON, 181.

C

Cambio de coordenadas, 33, 34; en el espacio, 347; oblicuas a rectangulares, 64; polares a cartesianas, 51.
Campos de racionalidad, 251.
CANTOR, 21, 30.
Característica de la afinidad, 297.
Caracol de Pascal, 213.
Cardioide, 214.
CASSINI, curvas de, 193; óvalos de, 194.
Catenaria, 222.
Centro de las cónicas, 194; de distancias medias, 333; de homotecia, 289-292; de involución, 307; de inversión, 300; radical de tres circunferencias, 79; radical de cuatro esferas, 362.
Cíclicos, puntos, 88.
Cicloide, 213 y sig.
Cilindros, 373; circunscritos a una superficie, 456; elíptico, 373; elíptico real, 418; elíptico imaginario, 418; hiperbólico, 373, 418; imaginario, 373; parabólico, 373, 428.
Circunferencia, 67; del infinito, 366; fundamental de la inversión, 309; homotéticas, 291; menor principal, 115; principal, 115; tangentes, 72.
Cisoide, 209.
Coeficiente angular de una recta, 56; en coordenadas oblicuas, 65.
Coeficientes directores, 327, 330. 331, 336; de una recta, 39, 57, 339, 341.
Colineaciones, 298.
Compás, geometría del, 319 y sig.
Componentes de un vector, 31, 32.

Concoides, 211; de Nicomedes, 212.
Complejos de rectas, 473; lineales, 474.
Condición de paralelismo de dos rectas, 56; de perpendicularidad, 56.
Cónicas, definición, 91; clasificación, 146.
Conjugados armónicos, 14.
Congruencias, 287; acordes, 288; lineales, 475; de rectas, 473.
Cono, 456; asintótico, 386, 387; asociado, 384; circunscrito a una superficie, 459; circunscrito a una superficie esférica, 357; cuadráticos, 384; cuadráticos referidos a una terna de diámetros conjugados, 394; imaginarios, 372, 417; isótropo, 366; real, 417, 419, 372.
Constante de afinidad, 294.
Construcción de cónicas, 179 y sig.
Construcciones geométricas, 13; de expresiones algebraicas, 16; de la involución, 308; de la polar de un punto respecto de una cónica, 168; con regla y compás, 250 y sig.; con regla y compás de los polígonos regulares, 265 y sig.; por puntos de la elipse, 116; de las tangentes a una cónica, 182; por puntos de una cónica, 181.
Coordenadas cartesianas en el plano, 25.
Coordenadas: cilíndricas, 350; esféricas, 350; homogéneas, 42, 43, 327; oblicuas, 325; ortogonales, 44, 325; plückerianas, 470; polares, 49; tetracíclicas, 484; tetracíclicas normalizadas, 489.
Cosecante, 45.
Cosenos directores de una recta, 57; en coordenadas oblicuas, 66.
Cotangente, 48.
COOLIDGE, J. L., 493.
CRÁMER, 228.
Cuadratriz de Dinostrato, 221.
Cuadratura del círculo, 250, 269, 274.
Cuádricas: alabeadas, 430; centro de las, 422; cono asintótico, 424; determinación de, 435; direcciones principales, 427; dirección asintótica de las, 423; ecuación en S de las, 426, en general, 415; estudio por el método de la formación de cuadrados, 415; generatrices rectilíneas, 428; homofocales, 436; planos diametrales, 423, 425; planos y direcciones principales, 426; polaridad en las, 437 y sig.; puntos umbílicos o cíclicos, 434; secciones circulares, 433; tetraedros autopolares, 439.
Cuárticas: bicirculares, 193; polizomales, 191.
Cuaterna armónica, 14.
Cuerpos, 251.
Curvas algebraicas, 187, 223; en el espacio, 452.
Curvas: de Cassini, 193; de Gaus, 221; de Lissajous, 220; de Pearson, 221; en coordenadas polares, 206; en forma explícita, 195; en forma implícita, 196; en forma paramétrica, 197; en el espacio, 444; "kappa", 220; planas, 187; reducibles e irreducibles, 225; trascendentes, 187.
Cúspides ordinarias o de primera especie, 244, 248; de segunda especie, 245, 249.

CH

CHASLES, 5, 23, 98, 106, 118; fórmulas de, 98, 106.

D

DARBOUX, G., 487, 493.
DELAMBRE, 353, 354.
Definición común de la elipse, hipérbola y parábola, 133.
Desarrollante de la circunferencia, 222.
DESCARTES, 3, 4, 17, 23, 26, 272, 273; folium de, 219.
Determinación: de cónicas, 169 y sig.; de circunferencias, 74; de una curva algebraica, 227 y sig.; de cuádricas, 435; de una superficie algebraica, 451.
Diámetros, de las cónicas, 152; de la elipse, 96; de la hipérbola, 103, 128; de la parábola, 110; conju-

gados de las cónicas, 154; conjugados de la elipse, 97, 118; conjugados de la hipérbola, 104; imaginarios de la hipérbola, 105; singulares de la hipérbola, 104; del elipsoide, 376.
DIERS, 527.
DINOSTRATO, 270, 274; cuadratriz de, 221.
DIOCLES, 210, 270.
Direcciones asintóticas, 203, 206, 386, 387.
Directriz de una cónica, 132, 135; imaginaria, 136; de la parábola, 128.
Discordes, congruencias, 288.
Distancia: entre dos rectas paralelas, 59; entre dos puntos, 55, 340; en coordenadas polares, 54; en coordenadas oblicuas, 65; entre dos rectas, 345; entre dos planos paralelos, 344; de un punto al origen, 349; de un punto a una recta, 58; de un punto a un plano, 343, 344.
D'OCAGNE, 506, 527.
DOUGLAS, 527.
Duplcación del cubo, 250, 261, 273.

E

Ecuaciones, algebraicas, 26; ciclotómica, 263; de la circunferencia, 67, [en coordenadas polares, 76]; de la cónica que pasa por cinco puntos, 179; de la recta, 37 y sig.; de la esfera, 355; de las cónicas en coordenadas polares, 137; de una cónica referida a diámetros conjugados, 155; focal de las cónicas, 134; de las bisectrices de un ángulo, 59; de una proyectividad, 302; en el centro de una cónica, 151; en S de una cónica, 158; general de las cuádricas, 371; explícta de una curva, 196; implícita de una curva, 196; normal de la recta, 56; normal del plano, 343; normal de la circunferencia, 68; paramétricas de la circunferencia, 75; de la elipse, 116; de la hipérbola, 125; de una curva, 197; reducidas de las cuádricas, 371; trinomía de las tres cónicas, 130.
Eje, de afinidad, 296; de homotecia, 292; de las cónicas, 155; de simetría, 284; radical de dos circunferencias, 78; radical de tres esferas, 362.
EISEINSTEIN, 264.
Elementos, imaginarios, 85, 364; unidos de una transformación, 276; de una involución, 306; de una proyectividad, 303.
Elipse, definición, 93; imaginaria, 144; estudio de la, 92 y sig.
Elipsoide, 371 y sig.; diámetros, 376; ecuación referida a tres diámetros conjugados, 377; imaginario, 372; de revolución, 383; plano polar, 380; propiedades métricas, 380; secciones planas. 378.
Entorno del punto impropio, 13.
Epicicloide, 216.
Equiafinidad, 295.
Equipolentes, vectores, 37.
ERLANGEN, programa de, 317.
Escala, 495; racional, 20; homográfica, logarítmica, métrica, proyectiva, 496.
Espacio, de una, dos y tres dimensiones, 23; de planos, 23; punteado, 23; reglado, 23.
Esquema de Neper, 352.
Espiral, 218; de Arquímedes, 218; hiperbólica, 219; logarítmica, 218; parabólica, 219.
Estrofoide, 219.
EUCLIDES, 1.
EUDOXIO, 2.
EULER, 5, 233, 349.
Excentricidad, de la elipse, 113; de la hipérbola, 124; de las cónicas, 132.

F

Factor S, 381.
FERMAT, 22, 23, 26, 273.
FIEDLER, 274.
Flecha, 37.
Focos, de la elipse, 112; de la hipérbola, 123; de la parábola, 128; de una cónica, 132, 135; imaginarios, 136.
Folium de Descartes, 219.

FORDER, H. G., 493.
Formas de 1ª, 2ª y 3ª especie o categoría, 23.
Fórmulas, de Bessel, 351; de Euler, 349; del coseno, 54; de los senos, 53; goniométricas de adición y substracción, 52, 53.
FRAILE, 29.
FRECHET, 527.
FROBENIUS, 487.
Funciones circulares, 45; inversas, 48.

G

GALOIS, 268.
GAUSS, curvas de, 221.
Geometría, definición general según Klein, 318; de círculos, 481; del compás, 319; reglada, 469.
GHETALDI, 22.
GIRARD, 22.
GOMES TEIXEIRA, 274.
Grado, de una curva algebraica, 223; de una superficie algebraica, 449; de una curva algebraica del espacio, 452.
GRAUSTEIN, W., 493.
Grupo, 19; de proyectividades, 300; de transformaciones, 277, 318.

H

HART, 319.
Haces, de planos, 23; de planos paralelos, 344; de rectas, 6, 23, 41, 42; de rayos, 9; lineales de circunferencias, 80 y sig.; lineales de superficies esféricas, 362.
Hélice circular, 445, 448.
Helicoide, desarrollable, 460; de cono director, 463; de plano director, 463.
Hipérbola, definición, 93; conjugadas, 106.
Hiperboloide, 372, 384; de dos hojas, 384, 385, 417, 419; de una hoja, 384, 385, 395, 417, 419, 462; de revolución, 399; planos tangentes al, 396.
Hipercuádrica de Klein, 472.
HIPIAS, 274.
Hipocicloide, 216.
Homofocales, cónicas, 138; cuádricas, 436.
Homografía, 298.
Homotecias, 289.

I

Inecuaciones, 29.
Imaginarios, elementos, 85 y sig.
Inscripción de polígonos regulares, 262 y sig.
Intersección, de circunferencias, 71; de cónicas, 175 y sig.; de curvas algebraicas, 229; de rectas, 41; de recta y circunferencia, 69; de recta y parábola, 109; de recta e hipérbola, 101; de recta con superficie esférica, 356; de recta con elipse, 94; de recta y elipsoide, 374; de plano y esfera, 358; de superficies esféricas, 359; de recta y curva algebraica, 226.
Inversa, homotecia, 289; de una proyectividad, 299.
Inversión, 309.
Inversores, 319.
Involución, 304; circular, 309; construcción geométrica, 308; elementos unidos, 306; elíptica, 306; hiperbólica, 306; rectangular, 309.
Irracionales cuadráticos conjugados, 255 y sig.
Irreducible, curva algebraica, 225.
Isomorfismo, 22.
Isótropas, rectas, 88.

K

Kappa, curva, 220.
KEMPE, A. B., 318.
KLEIN, F., 317, 372.
KOHN, 274.

L

LEIBNIZ, 23, 272.
Lemniscata, 195.
LEONARDO DE PISA, 23.
LISSAJOUS, curvas de, 220.
LORIA, 274.

Lugares geométricos, 26, 207; bidimensionales, 29; de las rectas que se apoyan en tres no coplanares, 465.

M

MAC LAURIN, trisectriz de, 219.
Masas, resultante de, 333.
MASCHERONI, L., 320.
Medida absoluta de un segmento, 1; de un vector, 4.
Método de formación de cuadrados, para las cónicas, 143 y sig.; para las cuádricas, 415 y sig.
Momentos, 333.
MÖBIUS, 23. 61, 468, 481, 483, 484.
Módulo, 495.

N

NEPER, 352, 353, 354.
NICOMEDES, 212, 270.
Nodos, 244.
Nomografía, 495.
Nomogramas, a escuadra por el vértice, 524; con alineaciones circulares, 525; circulares, 522; con escalas curvilíneas, 512, 516; con escalas móviles, 526; con tres escalas concurrentes, 514; con tres escalas paralelas, 508; de alineaciones paralelas o perpendiculares, 521; de dos escalas paralelas, 507; de líneas concurrentes 499; de puntos alineados, 505; en N, en Z, 511; para sistemas de ecuaciones, 526.
Normal a una curva plana, 200.
Normales, a la elipse, 120; a la hipérbola, 126; a la parábola, 130.
Número, de puntos que determinan una curva algebraica, 227; de puntos que determinan una superficie algebraica, 451.

O

Ordenada, 25.
Orden, de una curva algebraica, 223.
Origen, 3.
Ortogonales, circunferencias, 82; haces de circunferencias, 83; esferas, 362.

P

Pantógrafo, 318.
Parábola, definición, 93; cuártica, 190; cúbica, 188, 189; de orden *m*, 188; homofocales, 141 y sig.; límite de elipse o hipérbola, 131; semicúbica, 190.
Paraboloides, 373, 450.
Paraboloide elíptico, 400, 418; diámetros, 403; en coordenadas homogéneas, 401; intersección con una recta, 401; plano tangente, 404; plano diametral, 402; propiedades métricas, 407; referido a dos planos diametrales conjugados, 406; referdo al plano tangente y su diámetro conjugado, 406; referido a coordenadas ortogonales, 408.
Paraboloide hiperbólico, definición y forma, 409; direcciones asintóticas, 410; en coordenadas homogéneas, 414; intersección con una recta, 410; plano asintótico, 412; plano diametral, 412; plano diametral singular, 413; planos directores, 410; posiciones de una recta con respecto a un, 410.
PAPPUS, 273.
PASCAL, 179, 181, 213.
Paralelismo, de rectas del plano, 39; de rectas del espacio, 330; de planos, 335, 342, 343; entre recta y plano, 337.
PEARSON, curvas de, 221.
PEAUCELLIER, 319.
Pendiente de una recta, 56.
Perpendicularidad, de rectas en el plano, 56; de dos planos, 342; entre recta y plano, 343; de dos rectas del espacio, 342.
PI CALLEJA, 2, 28, 70, 128, 198, 229. 241, 267, 272.
PITÁGORAS, 20, 21, 340.
Plano, asintótico, 390; impropio, 327; determinado por tres puntos, 334; ecuación general, 334; ecuación normal, 343; ecuación segmentaria, 335; haces de, 338; imaginarios, 418; polar de un punto respecto de una cuádrica, 438; propiedades proyectivas, 334; radical de dos esferas, 361;

reglado, 23; tangente a una superficie, 446; tangente a un elipsoide, 378; tangente a un hiperboloide, 396; tangente a un paraboloide, 404.
PLÜCKER, 23.
Podaria, 208; de la elipse e hipérbola, 211; de la parábola, 209.
Polar, de un punto respecto de una cónica, 161; impropia, 162.
Polaridad, en las cóncas, 160 y sig.; en las cuádricas, 437.
Polares, coordenadas, 49, 50.
Polígono de 17 lados, construcción, 268.
Polo, de una recta respecto de una cónica, 162; de un plano respecto de una cuádrica, 438; impropio, 162.
Postulado, de Arquímedes, 20; de continuidad de la recta, 21.
Potencia, de un punto respecto de una circunferencia, 77; de un punto respecto de una esfera, 361; de inversión, 309.
Problema, de Apolonio, 313; de Pappus, 273; de tercer grado, 260.
Producto, de afinidades centrales, 297; de congruencia por homotecia, 293; de homotecias, 291; de proyectividades, 299; de rotaciones por traslaciones, 281; de simetrías, 285; de una simetría por una traslación, 286; de transformaciones, 276; de una traslación por una simetría, 283.
Programa de Erlangen, 317.
Proyectividad, 298; degenerada, 299; elíptica, 303; elementos unidos, 303; entre espacios unidimensionales, 298; hiperbólica, 303; parabólica, 303; puntos límites de una, 304.
Proyección estereográfica, 366, 368, 481; ortogonal de la elipse, 117.
PTOLOMEO, 22.
Puntos, aislados, 245, 247; de Brianchon, 181; del infinito, 9; del infinito de una curva algebraica, 234; de inflexión, 200; de retroceso, 244, 245; dobles, 190; dobles aislados, 244; fundamentales de una transformación cuadrática, 316; límites de una proyectividad, 304; ordinarios de una superficie, 446; singulares de una curva, 237; de una superficie, 446.
Puntos dobles, 243; estudio general, 246; clasificación, 243.
Puntos múltiples, 238; determinación, 239; en el infinito, 242.

R

Radiación, de rectas, 23; de planos, 23.
Radiante, 7.
Radio polar, 50.
Ramas infinitas, 203; parabólicas, 203.
Razón, de semejanza, 292; de homotecia, 289; doble, 300; simple, 11.
Recta, coeficientes directores de la, 339; como intersección de dos planos, 338; conjugadas, 167; del infinito, 327; determinada por dos puntos, 328; de Pascal, 181; ecuaciones de la, 328; ecuaciones reducidas de la, 329; paralelismo de, 39, 330; perpendicularidad 56; 342; perpendicular a un plano, 342; propiedades proyectivas, 328; real del plano imaginario, 364.
Resultante, 333; de masas, 333.
Reducible, curva algebraica, 225.
Relación, de Chasles, 5, 4, 8; de Euler, 56, 233; de Stewart, 6.
Resolución, de triángulos rectángulos, 352; de triángulos oblicuángulos, 354.
REY PASTOR, 2, 18, 19, 26, 37, 70, 198, 229, 241, 261, 268, 272.
ROBERVAL, 22.
Rosáceas, 220.
Rotación, de ejes rectangulares, 52; como transformación, 278 y sig.

S

SADOSKY, 527.
SALMON, 467.
SCHOOTEN, 22.

SCHWERDT, 327.
Secante, 45.
Semejanzas, 292.
Simetrías, respecto de un punto, 283; respecto de un eje, 284.
Sistemas, de coordenadas cartesianas, 25; de vectores, 479.
Sistemas nulos, 481.
SOREAU, 527.
STAUDT, 23.
STEWART, 6.
Superficie, algebraica, 449; cilíndrica, 326, 453; cónica, 456; cúbica, 467; de revoulción, 460; de segundo orden, 555; desarrollable, 459; ecuaciones de una, 443; en general, 443; esférica, 355; reglada, 467.
SYLVESTER, 230, 231.

T

Tacnodos, 245, 248.
Tangente, 45; a la circunferencia, 69, 72, 73; a la elipse, 93, 95, 96; a la hipérbola, 100, 103; a la parábola, 108, 109, 110; a una curva, 198, 206; a una curva algebraica, 232; a una curva del espacio, 446; en coordenadas homogéneas, 233.
Teorema, de Apolonio, 118, 125; de Bezout, 229; de Brianchon, 181; de Eiseinstein, 264; de Pascal, 179; fundamental de las construcciones con regla y compás, 255.
Toro, 462.
TORROJA, 23.
Tractriz, 202.
Transformaciones, birracionales, 315; conformes, 311; cuadráticas, 315, 316; de coordenadas, 348, 350; elementos unidos, 276; en general, 275; grupos de, 277; idéntica, 276; inversas, 275; involutorias, 310; lineales, 315; producto de, 276.
Trascendentes, curvas, 187; números, 269.
Traslaciones, de ejes, 347; en general, 278; producto de rotaciones y, 281.
TREJO, 2, 28, 70, 125, 198, 229, 241, 272.
Triedro, directo, 324; inverso, 324.
Trisección del ángulo, 250, 262, 273.
Trisectriz de Mac Laurin, 219.

U

Unidos, elementos de una transformación, 276; de una involución, 306; de una proyectividad, 303.

V

Vectores, axiales, 37; directores 331; en el plano, 31; libres, 37.
Vértices, de la elipse, 114; de la hipérbola, 124; de la parábola, 128; de una cónica, 157; imaginarios, 129.
VIETA, 22.
Volumen de tetraedro, 346.

W

WIELEITNER, 274.
WILLERS, 527.

EDITORIAL KAPELUSZ, S. A.,
dio término a la 4ª tirada de la
cuarta edición de esta obra en el
mes de junio de 1965, en FRIGERIO
Artes Gráficas, Perú 1257, Bs. As.

K. 8550

EX LIBRIS Scan Digit

The Doctor

Libros, Revistas, Intereses:
http://thedoctorwho1967.blogspot.com.ar/